COURS
DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE
DROITE ET PLAN

TEXTE

Coulommiers. — Imp. Paul BRODARD. — 794-1900.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

(DROITE ET PLAN)

à l'usage des candidats

AUX BACCALAURÉATS

ET

AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT

PAR

J. CARON

Ancien élève de l'École normale supérieure,
Agrégé des sciences mathématiques,
Directeur des travaux graphiques à l'École normale supérieure,
Professeur de géométrie descriptive au lycée Saint-Louis, etc.

SIXIÈME ÉDITION

TEXTE

PARIS
ANCIENNE LIBRAIRIE GERMER BAILLIÈRE ET Cie
FÉLIX ALCAN, ÉDITEUR
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 108

1901

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE
ÉLÉMENTAIRE

DROITES ET PLANS

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. — La *géométrie descriptive* a pour but l'étude des figures dans l'espace, en ramenant cette étude à celle des figures planes. Pour effectuer cette transformation, on emploie les *projections*.

2.—Définitions. — On appelle *projection conique* d'un point A sur un plan P par rapport à un centre de projection O (fig. 1, pl. I), le point de rencontre *a* du plan P avec la droite OA qui joint le point donné au centre de projection, et qu'on appelle la *projetante* du point.

On dit encore que le point *a* est la *perspective aérienne* du point A, en prenant comme point de vue le point O et comme plan du tableau le plan P.

Enfin le point *a* est également l'*ombre portée* par le point A sur le plan P, la source lumineuse étant le point O (ombre au flambeau).

3. — On appelle *projection oblique* d'un point A sur un plan P parallèlement à une direction D (fig. 2, pl. I) le point de rencontre *a* du plan P avec une parallèle à la droite D menée par le point A. Cette droite A*a* est comme précédemment la projetante du point.

Ce mode de projection peut être considéré comme un cas particulier du précédent, et on l'en déduit en supposant que le centre de projection s'éloigne indéfiniment dans la direction D.

On appelle encore le point a, la *perspective cavalière* du point A ou l'ombre du point A sur le plan P, en supposant la source lumineuse à l'infini dans la direction D (ombre au soleil).

4. — Enfin on appelle *projection orthogonale*, ou simplement projection d'un point A sur un plan P (fig.3, pl. I), le pied a de la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan P.

Ce dernier mode de projection est un cas particulier du précédent, et on l'obtient en supposant que la direction D devient perpendiculaire au plan de projection.

5. — D'après la définition que nous venons de donner, on reconnait que la projection d'un point est toujours déterminée, lorsque le point lui-même est donné. Il est important de remarquer que la réciproque n'est pas vraie; c'est-à-dire, qu'étant donné en a la projection conique d'un point (fig. 1, pl. I), ce point A n'est pas déterminé. Nous savons tout simplement que le point A se trouve sur la projetante Oa.

Il est donc indispensable, pour déterminer complétement le point A, de se donner une condition de plus.

Par exemple, on peut se donner la distance Aa.

Cette manière de déterminer un point de l'espace, en employant des projections orthogonales, constitue la méthode des *plans cotés*.

On peut encore, pour déterminer le point A, se donner une deuxième projection du point A dans un deuxième système de projection. On connaîtra ainsi une deuxième projetante o_1a_1 du point, et le point de rencontre de cette droite o_1a_1 avec oa sera le point demandé A.

6.— Remarque. — Les deux projections aa_1 d'un point dans deux systèmes différents ne sont pas arbitraires. En effet, pour que le point A existe, il faut que les deux projetantes oa, o_1a_1 se rencontrent, et par suite soient dans le même plan. Ainsi donc il existera toujours une relation entre les deux projections d'un point dans deux systèmes différents.

Dans la suite, nous emploierons des projections orthogonales avec deux plans de projection rectangulaires. Pour distinguer ces deux plans, nous donnerons à l'un d'eux le nom de *plan horizontal*, et par suite à l'autre celui de *plan vertical*. Ces deux noms ne supposent pas que les plans de projection sont physiquement l'un horizontal et l'autre vertical, mais on conserve

quand même ces dénominations parce que dans les applications, l'architecture par exemple, l'un des plans de projection est physiquement horizontal.

Soit donc H et V (fig. 4, pl. I), nos deux plans de projection. L'intersection de ces deux plans s'appelle la *ligne de terre;* on la représente généralement par les deux lettres *xy* ou LT, que l'on place dans l'ordre alphabétique de droite à gauche, en supposant l'observateur debout sur le plan horizontal, et regardant le plan vertical.

Étant donné alors un ensemble de points dans l'espace, nous les projetterons successivement sur les deux plans de projection, et pour obtenir finalement une seule figure plane, on est convenu de faire tourner le plan vertical d'un angle droit autour de la ligne de terre, de manière à le faire coïncider avec le plan horizontal. Enfin, pour déterminer le sens de cette rotation, on convient de faire coïncider la partie supérieure du plan vertical avec la partie postérieure du plan horizontal. En même temps, la partie inférieure du plan vertical vient coïncider avec la partie antérieure du plan horizontal.

Le résultat ainsi obtenu s'appelle une *épure.*

LIVRE I

REPRÉSENTATION DU POINT, DE LA DROITE, DU PLAN

CHAPITRE PREMIER

I. — REPRÉSENTATION DU POINT.

7. — Soit A (fig. 4, pl. I) un point quelconque de l'espace ; il se projette sur le plan horizontal en a et sur le plan vertical en a_1. Si maintenant nous rabattons le plan vertical sur le plan horizontal, le point a_1 vient prendre la position a', d'où il résulte que l'épure d'un point se compose de la ligne de terre xy (fig. 5, pl. I), et dans l'exemple actuel des deux points aa', de part et d'autre de la ligne de terre ; a est la projection horizontale du point, a' en est la projection verticale. Autrement dit on représente les deux projections d'un point par la même lettre a, en accentuant la projection verticale, et dans la lecture de l'épure, on nomme le point (aa').

8. — **THÉORÈME.** — *Dans toute épure, les deux projections d'un point se trouvent sur une même perpendiculaire à la ligne de terre* (fig. 4, pl. I).

En effet, le plan aAa_1 étant mené par deux droites respectivement perpendiculaires aux deux plans de projection, est lui-même perpendiculaire aux deux plans de projection, et par suite, il est également perpendiculaire à la ligne de terre.

En appelant α le point de rencontre de xy avec le plan Aaa_1, la ligne de terre sera alors perpendiculaire sur αa, αa_1 qui passent par son pied dans le plan Aaa_1. Si maintenant nous rabattons le plan vertical sur le plan horizontal de manière à former l'épure,

la droite $a_1\alpha$ restera perpendiculaire sur xy, et viendra se placer suivant $a'\alpha$ dans le prolongement de $a\alpha$ (fig. 5, pl. I).

Ainsi la droite aa' est bien perpendiculaire sur la ligne de terre, on la nomme une ligne de *rappel.*

9. — Réciproque. — *Étant donné dans une épure deux points* aa' *sur une même ligne de rappel, on a le droit de considérer les deux points comme les projections d'un point unique et parfaitement déterminé dans l'espace* (fig. 4 et 5, pl. I).

Soit α le point de rencontre de aa' avec la ligne de terre ; si nous relevons le plan vertical de manière à l'amener à être perpendiculaire au plan horizontal, la droite $a'\alpha$ prend la position $a_1\alpha$, en restant perpendiculaire à la ligne de terre.

Le plan $a\alpha a_1$ est donc perpendiculaire à la ligne de terre, et par suite, aux deux plans de projection.

Les deux projetantes déterminées par les deux projections connues aa_1 sont alors contenues dans le même plan $a\alpha a_1$, et par suite, elles se rencontrent en un point unique et parfaitement déterminé A.

Remarque. — Le théorème et sa réciproque sont vrais, quand même les deux plans de projection ne sont pas rectangulaires.

10. — THÉORÈME. — *Dans toute épure, la distance de la projection verticale d'un point à la ligne de terre représente la distance du point au plan horizontal, et en même temps, la distance de la projection horizontale d'un point à la ligne de terre représente la distance du point de l'espace au plan vertical* (fig. 4 et 5, pl. I).

En effet, en supposant les deux plans de projection rectangulaires, le quadrilatère $Aa\alpha a_1$ est un rectangle, dans lequel nous aurons $Aa = a_1\alpha = a'\alpha$ et $Aa_1 = a\alpha$. Ainsi $a'\alpha$ représente la distance du point A au plan horizontal, c'est ce qu'on appelle la *cote,* de même $a\alpha$ représente la distance du point A au plan vertical, c'est l'*éloignement.*

II. — POINTS REMARQUABLES.

11. — 1° Tout point contenu dans le plan horizontal se projette verticalement sur la ligne de terre, puisque sa cote est nulle.

12. — 2° Tout point contenu dans le plan vertical se projette horizontalement sur la ligne de terre, puisque son éloignement est nul.

13. — 3° Tout point contenu dans l'un des plans bissecteurs des dièdres formés par les deux plans de projection a ses deux projections à la même distance de la ligne de terre, et par suite symétriques par rapport à la ligne de terre, ou confondues.

14. — 4° Tout point de la ligne de terre a ses deux projections confondues sur la ligne de terre.

III. — ALPHABET DU POINT.

15.—Nous allons maintenant étudier les différents aspects que présente l'épure d'un point, lorsque ce point se meut dans l'espace. Remarquons d'abord que les deux plans de projection divisent l'espace en quatre angles dièdres droits. Pour plus de commodité, nous les numéroterons de la manière suivante : 1, l'angle dans lequel se trouve l'observateur, c'est-à-dire au-dessus du plan horizontal et en avant du plan vertical ; 2, l'angle adjacent au-dessus du plan horizontal et derrière le plan vertical ; 3, l'angle opposé à l'angle 1 ; enfin 4, l'angle adjacent à 1, mais au-dessous du plan horizontal.

Autrement dit, nous avons numéroté les angles, en tournant autour de la ligne de terre dans le même sens suivant lequel nous avons déjà fait tourner le plan vertical pour l'appliquer sur le plan horizontal.

Les plans bissecteurs divisent chacun des angles dont nous venons de parler, en deux nouveaux angles que nous appellerons en marchant dans le même sens que précédemment 11′, 22′, 33′ et 44′.

Rappelons enfin que d'après le sens du rabattement du plan vertical sur le plan horizontal, la portion qui est au-dessus de la ligne de terre, en lisant xy de gauche à droite, représente dans l'épure, la partie postérieure du plan horizontal, en même temps que la partie supérieure du plan vertical.

Au-dessous de la ligne de terre, nous avons la partie antérieure du plan horizontal ou la partie inférieure du plan vertical.

16. — Supposons donc qu'un mobile parte du plan horizontal dans la partie antérieure (fig. 6, pl. I).

1° Sa projection verticale a' est sur la ligne de terre.

2° Sa projection horizontale est au-dessous de xy, puisque le point est dans la partie antérieure du plan horizontal.

ANGLE 1. — Le point s'élève et entre dans la subdivision 1.

1° Il est au-dessus du plan horizontal, donc sa projection verticale est dans la partie supérieure du plan vertical, et par suite au-dessus de la ligne de terre.

2° Le point est en avant du plan vertical, et alors la projection horizontale se trouve dans la partie antérieure du plan horizontal, c'est-à-dire au-dessous de xy.

3° Le point est plus rapproché du plan horizontal que du plan vertical, donc sa cote $b'\beta$ est plus petite que l'éloignement $b\beta$.

Le point continuant de tourner arrive dans le premier plan bissecteur, ses deux projections occupent des positions analogues à celles du point bb', seulement la cote est égale à l'éloignement; et par suite, les deux projections sont symétriques par rapport à la ligne de terre.

ANGLE 1'. — Le point passe maintenant dans la subdivision 1'. La disposition générale est encore la même que dans la subdivision 1, seulement le point étant plus rapproché du plan vertical que du plan horizontal, la cote est plus grande que l'éloignement.

Arrivons alors dans la partie supérieure du plan vertical.

1° Sa projection horizontale se trouve sur la ligne de terre.

2° Sa projection verticale est au-dessus de la ligne de terre.

ANGLE 2. — En continuant de tourner, nous passons dans le grand angle 2.

1° Le point étant au-dessus du plan horizontal, la projection verticale est dans la partie supérieure du plan vertical, c'est-à-dire au-dessus de la ligne de terre.

2° Le point étant derrière le plan vertical, sa projection horizontale est dans la partie postérieure du plan horizontal, c'est-à-dire au-dessus de xy. Ainsi donc, les deux projections se trou-

vent maintenant toutes deux au-dessus de la ligne de terre.

Le point étant d'abord dans la subdivision 2, il est plus rapproché du plan vertical que du plan horizontal. Sa cote est plus grande que son éloignement.

Dans le deuxième plan bissecteur, la cote devient égale à l'éloignement, et alors les deux projections sont confondues.

ANGLE 2'. — Enfin dans la subdivision 2', la cote devient plus petite que l'éloignement.

Nous voici maintenant dans la partie postérieure du plan horizontal.

1° La projection verticale est sur la ligne de terre.

2° La projection horizontale est au-dessus de la ligne de terre.

ANGLE 3. — Passons alors dans le grand angle 3.

1° Le point étant au-dessous du plan horizontal, sa projection verticale est dans la partie inférieure du plan horizontal, c'est-à-dire au-dessous de xy.

2° Le point étant derrière le plan vertical, sa projection horizontale est dans la partie postérieure du plan horizontal ou au-dessus de xy. Donc les deux projections sont de part et d'autre de xy, seulement la projection verticale est au-dessous de xy.

Dans la subdivision 3, la cote est plus petite que l'éloignement. Dans le premier plan bissecteur, la cote est égale à l'éloignement; les deux projections sont donc symétriques par rapport à la ligne de terre.

ANGLE 3'. — Enfin dans la subdivision 3', la cote est plus grande que l'éloignement.

Nous laisserons au lecteur le soin de continuer cette discussion pour l'angle 4, les résultats auxquels on doit arriver étant d'ailleurs indiqués sur la figure.

17. — Nous allons maintenant, sur un exemple quelconque, résoudre la question inverse, c'est-à-dire, *étant donné les deux projections d'un point, reconnaître dans quel angle se trouve le point.*

Soit le point nn' (fig. 6, pl. I).

1° La projection horizontale n est au-dessus de xy dans la

partie postérieure du plan horizontal, donc le point est derrière le plan vertical dans les angles 2 ou 3.

2° La projection verticale n' est au-dessous de xy dans la partie inférieure du plan vertical, donc le point est au-dessous du plan horizontal dans les angles 3 ou 4. En résumé, le point est dans le grand angle 3.

3° La cote $n'\nu$ est plus grande que l'éloignement $n\nu$, donc le point est plus rapproché du plan vertical que du plan horizontal; il est finalement dans la subdivision 3'.

On fera bien d'appliquer ce même raisonnement à tous les points contenus dans la figure 6, et dont l'ensemble constitue ce qu'on appelle l'*alphabet du point*.

CHAPITRE II

I. — REPRESENTATION DE LA DROITE.

18. — Définition.— On appelle *projection d'une ligne*, le lieu des projections de tous les points qui composent la ligne. Les projetantes des différents points de la ligne forment un cône, qu'on appelle le *cône projetant* de la ligne, de telle sorte que la projection d'une ligne n'est autre chose que la trace de son cône projetant sur le plan de projection. Dans le cas des projections obliques et dans celui des projections orthogonales, le cône projetant devient un *cylindre projetant.*

19. — THÉORÈME. — *La projection d'une ligne droite est une ligne droite.*

En effet, le cône projetant d'une droite se réduit à un plan, dont la trace sur le plan de projection est toujours une ligne droite.

20. — Exceptions. — Dans le cas où la droite passe par le centre de projection, si l'on emploie des projections coniques, les projetantes des différents points de la droite coïncident toutes avec la droite elle-même, et par suite la projection de la droite se réduit à un point qui est en même temps la trace de la droite sur le plan de projection.

De même, toute droite parallèle à la direction suivant laquelle on projette dans le cas des projections obliques se projette suivant un seul point.

Enfin, en employant des projections orthogonales, *toute perpendiculaire à un plan se projette sur ce plan suivant un point.*

21. — *Une droite est déterminée par deux points.* Ainsi les deux points *aa'*, *bb'* (fig. 7, pl. I) définissent une ligne droite.

D'après le théorème précédent, les projections de cette droite s'obtiendront en joignant par des lignes droites les projections de même nom des deux points qui la déterminent. Ainsi *ab*, *a'b'* sont les deux projections de la droite.

22.—*Les deux projections d'une droite déterminent en général cette droite.* En effet, étant donné une projection d'une droite, cette projection définit l'un des plans projetants de la droite.

La deuxième projection de la droite définit un deuxième plan projetant, et alors la droite est parfaitement déterminée comme intersection de ses deux plans projetants.

La démonstration est en défaut dans le cas où les deux plans projetants coïncident.

23. — **PROBLÈME.** — *Déterminer sur une ligne droite un point quelconque.*

Pour trouver sur la droite *ab*, *a'b'* (fig. 7, pl. I) un point quelconque, il suffit de couper les deux projections de cette droite par une ligne de rappel quelconque. Ainsi *mm'* est un point quelconque de la droite ; en effet, les projections d'un point sont sur une même ligne de rappel et par définition, tout point d'une ligne se projette sur les projections de la ligne.

24. — **Discussion.** — Les deux projections de la droite n'étant pas perpendiculaires à la ligne de terre, une ligne de rappel quelconque coupera toujours ces deux projections, et on obtiendra ainsi autant de points que l'on voudra de la droite.

25. — 1° Supposons maintenant que l'une des projections de la droite soit perpendiculaire à la ligne de terre et l'autre quelconque, AA' par exemple (fig. 8, pl. I).

Une ligne de rappel quelconque rencontre bien A, mais ne rencontre plus A', excepté lorsque la ligne de rappel vient coïncider avec A'.

Les points de la droite de l'espace ne se projettent donc horizontalement qu'au point *a*, autrement dit la droite est verticale, c'est la verticale *a*.

Ainsi il est impossible à une droite d'avoir une projection perpendiculaire à la ligne de terre et l'autre quelconque.

26. — 2° Supposons que les projections de la droite soient toutes deux perpendiculaires à la ligne de terre et différentes (fig. 9, pl. I).

Une ligne de rappel quelconque ne coupera jamais les deux projections de la droite; il est donc impossible à une droite d'avoir ses deux projections perpendiculaires à la ligne de terre et différentes.

27. — 3° Supposons enfin que les deux projections de la droite soient confondues suivant une perpendiculaire à la ligne de terre (fig. 10, pl. I). La ligne de rappel α rencontre assurément A et A', puisqu'elle est confondue avec ces deux droites ; mais en se donnant arbitrairement la projection horizontale du point, on ne peut rien dire de sa projection verticale. La droite n'est plus déterminée par ses deux projections. Il est facile de voir qu'ici les deux plans projetants de la droite coïncident. En effet, le plan projetant horizontalement la droite est déterminé par A et il est perpendiculaire au plan horizontal, il est donc en même temps perpendiculaire à la ligne de terre au point α. Le plan projetant verticalement la droite est également perpendiculaire à la ligne de terre au point α, donc ces deux plans coïncident. Il est donc indispensable de revenir au mode général de détermination de la droite, c'est-à-dire de s'en donner deux points *aa'*,*bb'*. Les plans projetants de la droite, étant perpendiculaires à la ligne de terre, s'appellent des plans de *profil*. La droite est elle-même perpendiculaire à la ligne de terre.

II. — POINTS REMARQUABLES D'UNE DROITE.

28. —Nous entendrons par *points remarquables d'une droite*, les quatre points de rencontre de cette droite avec les deux plans de projection et les deux plans bissecteurs.

Soit la droite AA' (fig. 11, pl. 2).

29. — 1° Le point de rencontre avec le plan horizontal ou la *trace horizontale* de la droite étant dans le plan horizontal se projette verticalement sur la ligne de terre, et en même temps sur A', soit en *h'*. La ligne de rappel du point *h'* nous donne en *h* la projection horizontale de la trace horizontale cherchée. Ainsi *hh'* est la trace horizontale de la droite.

On dit quelquefois *h* est *la trace horizontale de la droite*, sans nommer sa projection verticale. Cela tient à ce qu'en disant (trace horizontale), on sous-entend que la projection verticale est sur la ligne de terre.

30. — 2° Le point de rencontre de la droite avec le plan vertical ou *la trace verticale de la droite* étant dans le plan vertical se projette horizontalement sur la ligne de terre et en même temps sur A, par conséquent en *v*. Menons alors la ligne de rappel du point *v*, et nous avons en *v'* la projection verticale de la trace verticale demandée ; *vv'* est donc la trace verticale de la droite.

Ici encore, au lieu de dire *vv'* est la trace verticale de la droite, on dit *v'* est la trace verticale, sans nommer la projection horizontale *v*, parce que l'on sait que tout point du plan vertical se projette horizontalement sur la ligne de terre.

31. — 3° Le point de rencontre de la droite avec le premier plan bissecteur doit avoir ses deux projections symétriques par rapport à la ligne de terre. Pour l'obtenir, construisons une ligne symétrique de A' par exemple, par rapport à *xy* soit *α*, elle rencontre A en *m* ; *mm'* est alors le point demandé. On aurait pu également construire la symétrique de A, elle aurait coupé A' en *m'*.

32. — 4° Le point de rencontre de la droite avec le deuxième plan bissecteur a ses deux projections confondues, c'est donc le point *nn'* donné par l'intersection des deux projections de la droite.

III. — RECONNAITRE LES DIFFÉRENTES RÉGIONS DE L'ESPACE TRAVERSÉES PAR UNE DROITE.

33. — Nous avons dit que l'espace était divisé par les plans de projection et les plans bissecteurs en huit angles dièdres. Les points de rencontre d'une droite avec ces quatre plans nous donnent donc les limites des régions traversées.

Soit alors *pp'* un point quelconque de la droite compris par exemple, entre les deux limites *hh'*, *mm'* ; nous reconnaissons que ce point est dans la subdivision 1 ; donc la portion *hm*, *h'm'* se trouve dans la même région. En marchant dans le sens *hm*, *h'm'*, nous arrivons en *mm'* dans le premier plan bissecteur, nous passons donc dans la région adjacente 1' et nous y restons de *mm'* jusqu'en *vv'*. A partir du point *vv'*, la droite passe derrière le plan vertical dans l'angle 2 jusqu'en *nn'*, et enfin à par-

tir de ce point, nous entrons dans l'angle 2' où nous restons jusqu'à l'infini.

Marchons maintenant sur la droite, dans une direction opposée à la première et toujours à partir du point *pp'*. Nous étions dans la subdivision 1 ; arrivés au point limite *hh'*, nous passons au-dessous du plan horizontal, et nous restons jusqu'à l'infini dans l'angle 4'.

Ainsi, en marchant de gauche à droite, nous traversons successivement les angles 4', 1, 1', 2 et 2'.

34. — Ponctuation des épures. — *Ponctuer une épure*, c'est indiquer le genre de trait qui convient à chaque ligne, dans le but de rendre la lecture de l'épure plus facile, en évitant, autant que possible, l'emploi d'un texte ou légende supplémentaire.

Les lignes de rappel dont nous avons déjà parlé se font de même que toutes les lignes de construction avec des petits traits fins ayant environ de un à deux millimètres de longueur et distants d'environ un demi-millimètre.

Si par hasard on rencontrait une ligne de construction ayant plus d'importance que d'autres, on pourrait la tracer avec des traits mixtes composés alternativement de petits traits et de points ou avec toute autre combinaison de grands traits, petits traits et points.

Tous les traits dont nous venons de parler se font sans distinction à l'encre rouge lorsqu'on veut employer cette encre. Dans tous les cas, les commençants se trouveront très-bien d'employer uniquement l'encre de Chine pour s'exercer à l'art du trait.

Passons maintenant aux lignes faisant partie de l'objet que l'on représente, toutes ces lignes se font en traits pleins lorsqu'elles sont vues et en petits points lorsqu'elles sont cachées.

Règle pour distinguer les parties vues des parties cachées. — A ce sujet, voici la règle à suivre pour établir la distinction entre les parties vues et cachées.

Soit M un point appartenant à un système, O la position de l'œil de l'observateur, OM est alors le rayon visuel qui passe par le point donné. Cette droite OM rencontre l'objet que l'on veut représenter en différents points échelonnés sur la droite OM

De tous ces points, celui qui est le plus rapproché de l'œil est le seul vu, et il cache tous les autres.

Ainsi OM étant plus petit que OM_1, OM_2, OM_3, etc., M est vu, et les points M_1, M_2, M_3, etc., sont cachés.

Il reste enfin les lignes enlevées que l'on marque en traits mixtes. Mais nous aurons plus tard l'occasion de définir ce genre de lignes d'une manière plus précise qu'on ne le pourrait faire ici.

On fera bien de marquer les traits pleins avec un trait fort et toutes les autres lignes, petits points, traits mixtes ou de construction avec un trait beaucoup plus fin que le premier, et le même pour tous ces différents traits. Il faut avoir soin aussi de donner à tous les traits pleins identiquement la même grosseur. On arrive facilement à ce résultat en se servant de deux tire-lignes, le premier affecté aux traits pleins, le second à tous les autres traits, et en évitant pendant tout le temps du travail de toucher aux vis des deux tire-lignes.

On agira de la même manière en employant de l'encre rouge.

Avant d'établir la ponctuation d'une épure, on devra toujours définir d'une façon bien précise l'objet que l'on se propose de représenter.

PROBLÈME. — Par exemple, proposons-nous (fig. 11, pl. 2) de *représenter le système formé par la droite AA' prolongée indéfiniment et les deux plans de projection supposés opaques et prolongés aussi indéfiniment.*

35. — 1° Ponctuation de la projection horizontale. — Pour établir la ponctuation de la projection horizontale, on suppose l'observateur à l'infini au-dessus du plan horizontal. Les rayons visuels sont donc verticaux et dirigés en montant pour aller de l'objet à l'œil.

Il résulte de là que tout point pris isolément au-dessus du plan horizontal est vu en projection horizontale. Au contraire, tout point au-dessous du plan horizontal est caché en projection horizontale.

Le point considéré est précisément caché par sa projection horizontale.

Or nous avons vu que la droite AA' traversait les angles 11', 22' à partir du point *h* en marchant dans le sens *hv*. Donc toute la région *hmvn*, jusque l'infini à droite, étant au-dessus du plan horizontal, est vue en projection horizontale, tandis que toute la

région à gauche de h est cachée, puisqu'elle est au-dessous du plan horizontal.

Remarquons que pour établir la ponctuation de la projection horizontale, on n'a pas à tenir compte du plan vertical, puisque les rayons visuels sont verticaux, et par suite ne rencontrent jamais le plan vertical.

36. — 2° Ponctuation de la projection verticale. — Pour établir la ponctuation de la projection verticale, on suppose l'observateur à l'infini en avant du plan vertical; les rayons visuels sont donc perpendiculaires au plan vertical. Il résulte de là, que tout point pris isolément en avant du plan vertical est toujours vu, tandis que tous les points placés derrière le plan vertical sont cachés.

Si nous appliquons cette règle à la droite AA', nous reconnaissons que la région $v'm'h'$ jusque l'infini à gauche est vue en projection verticale, puisqu'elle est en avant du plan vertical. Au contraire, toute la région à droite du point v' est cachée en projection verticale.

Ici encore, on n'a pas à tenir compte du plan horizontal, puisque les rayons visuels ne rencontrent jamais ce plan horizontal.

Il ne faut pas s'étonner que certaines régions de la droite soient vues dans une projection et cachées dans l'autre, puisque ces deux projections sont regardées par deux observateurs différents.

EXEMPLES DE PONCTUATION D'UNE DROITE.

36_a. — Nous avons montré la ponctuation d'une droite, en supposant la droite illimitée, et les plans de projection opaques illimités. Voici quelques autres conventions qu'il peut être intéressant d'étudier.

36_b. — Exemple I. — *Soit à représenter le système formé par la droite* AA' (fig. 179, pl. 17), *illimitée, et par les plans de projection; le plan horizontal étant la limite d'un sol d'épaisseur infinie, au-dessous du plan horizontal; le plan vertical*

étant de son côté, la limite d'un mur d'épaisseur infinie derrière le plan vertical. Le sol et le mur sont de même substance, ainsi que la droite.

Dans ces conditions, un point ne peut être vu, dans l'une quelconque des deux projections, que s'il appartient à l'angle 1, parce que, autrement, ou bien le rayon visuel aboutissant au point est tout entier dans le solide, ou bien le point est déjà caché par l'un des plans de projection.

Il en résulte que les régions *ab*, *a'b'* de la droite sont vues. Le reste de la droite est enlevé, car la droite étant de même substance que le sol et le mur, elle n'existe pas matériellement à l'intérieur du sol et du mur. On est convenu de marquer ces régions enlevées de la droite en traits mixtes, qui, par conséquent, n'admettent pas d'autre ponctuation.

Si la droite était de substance différente du sol et du mur, elle existerait matériellement à l'intérieur du sol et du mur; mais, dans ces deux régions, elle serait cachée. On a tenu compte de cette dernière hypothèse dans la figure 180, planche 17.

La ligne de terre est, dans ces deux exemples, marquée en trait plein, puisqu'elle représente les deux plans de projection vus par la tranche.

36_c. — Exemple II. — ***Représenter le système formé par la droite*** AA' (fig. 181, pl. 17), ***illimitée, le plan horizontal étant opaque, illimité, et le plan vertical transparent.***

Ici, un point quelconque de l'espace ne peut être vu en projection horizontale que s'il est au-dessus du plan horizontal; d'ailleurs, en projection verticale, un point quelconque est toujours vu.

Donc: 1° en projection horizontale, la droite est vue depuis le point limite *a* jusque l'infini à droite, au-dessus du plan horizontal; tandis qu'à gauche de *a*, elle est cachée jusque l'infini, au-dessous du plan horizontal.

2° En projection verticale, la droite est vue tout entière.

La ligne de terre est toujours vue, parce qu'elle représente le plan horizontal vu par la tranche.

36_d. — Exemple III. — ***Représenter le système formé par la droite*** AA' ***illimitée*** (fig. 182, pl. 17) ***et le plan horizontal; ce plan étant la limite d'un sol d'épaisseur infinie au-dessous du***

plan horizontal. Le plan vertical est supposé transparent. Enfin, la droite est de même substance que le sol.

Comme précédemment, un point ne peut être vu en projection horizontale, que s'il est au-dessus du plan horizontal; mais la même condition est aussi nécessaire pour que le point soit vu en projection verticale, parce que, autrement, le rayon visuel aboutissant au point serait dans l'intérieur du sol.

Donc : 1° en projection horizontale, la droite A est vue depuis *a* jusque l'infini à droite, tandis qu'à gauche de *a* elle est enlevée dans l'intérieur du sol, puisque la droite et le sol sont de même substance.

2° En projection verticale, la droite A′ est vue aussi depuis *a′* jusque l'infini à droite, et enlevée à gauche de *a′*.

Si l'on avait supposé la droite de substance différente du sol, elle serait cachée à gauche de *aa′* dans les deux projections, à l'intérieur du sol (fig. 183, pl. 17).

Dans ces deux exemples, la ligne de terre est marquée en trait plein, parce qu'elle représente le plan horizontal vu par la tranche.

36*e*. — **Exemple IV.** — *La droite* AA′ *est illimitée, et les deux plans de projection sont transparents* (fig. 184, pl. 17).

Les projections A et A′ de la droite sont vues tout entières, la ligne de terre n'étant plus marquée en trait plein.

On peut à volonté la marquer en trait mixte, ce qui serait préférable, ou en ligne de construction; ou même, on peut ne pas la dessiner.

IV. — DROITES PARALLÈLES.

37. — **THÉORÈME.** — *Deux droites parallèles ont leurs projections parallèles, en employant des projections obliques ou orthogonales.*

En effet, les plans projetants des deux droites étant menés par les deux droites qui sont parallèles entre elles, et parallèlement à une même direction, sont parallèles entre eux, et par suite leurs traces sur un plan de projection quelconque sont parallèles entre elles.

38. — **Réciproquement,** *deux droites, ayant leurs projec-*

tions de même nom dans deux systèmes différents parallèles entre elles, sont également parallèles entre elles en supposant chaque droite déterminée par ses deux projections, et en employant comme précédemment des projections obliques ou orthogonales.

En effet, les plans projetants des deux droites dans le premier système sont parallèles entre eux, puisqu'ils sont menés par les projections des deux droites qui sont parallèles entre elles et parallèlement à une même direction.

De même les plans projetants des deux droites dans le deuxième système sont aussi parallèles entre eux. Par conséquent, ces quatre plans forment un prisme dont les quatre arêtes sont parallèles entre elles. Or les deux droites sont précisément deux des arêtes de ce prisme.

Cette démonstration est en défaut, lorsque les droites ne sont pas déterminées par leurs projections, c'est-à-dire lorsque les deux plans projetants d'une même droite sont confondus. Les quatre plans projetants, au lieu de former un prisme, se réduisent alors à deux plans parallèles entre eux.

Encore une fois, le théorème et la réciproque ne sont vrais qu'en employant des projections obliques ou orthogonales.

On vérifiera facilement que dans le cas des projections coniques, les perspectives de droites parallèles sont convergentes.

39. — PROBLÈME.—*Mener par un point* aa′ *une parallèle à la droite* AA′ (fig. 12, pl. 2). — Pour résoudre ce problème, il suffit, en appliquant le théorème précédent, de mener par les deux projections du point donné, des parallèles aux projections de même nom de la droite. BB′ est alors la droite demandée. Cette construction est en défaut, lorsque la première droite AA′ est dans un plan de profil, puisqu'alors la seconde droite, étant également dans un plan de profil, n'est plus déterminée par ses deux projections. La remarque suivante permet de résoudre le problème simplement.

40.—Remarque. — Étant donné (fig. 13, pl. 2) quatre points aa', bb', $a_1a'_1$, $b_1b'_1$ tels que les longueurs ab, a_1b_1 soient égales, parallèles et dans le même sens ainsi que $a'b'$ et $a'_1b'_1$, les deux droites $aba'b'$, $a_1b_1a'_1b'_1$, sont également parallèles entre elles dans l'espace.

Donc, pour mener (fig. 14, pl. 2) par le point $\alpha\alpha'$ une parallèle à la droite $aba'b'$, qui est dans un plan de profil, il suffit de marquer sur la ligne de rappel α le point β tel que $\alpha\beta$ soit égal à ab et de même sens, puis le point β' tel que $\alpha'\beta'$ soit égal à $a'b'$ et dans le même sens. La droite $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ est alors la parallèle demandée.

V. — DROITES REMARQUABLES.

41. — Nous entendrons par droites remarquables, celles qui sont parallèles, ou perpendiculaires aux plans de projection ou aux plans bissecteurs.

1° *Toute droite parallèle au plan horizontal,* et que l'on appelle plus simplement une HORIZONTALE, *a sa projection verticale parallèle à la ligne de terre.*

En effet, tous les points d'une horizontale ont la même cote, par conséquent, tous les points de sa projection verticale sont à la même hauteur au-dessus de la ligne de terre,et par suite cette projection verticale est parallèle à la ligne de terre. Ainsi HH' (fig. 15, pl. 2) est une horizontale. Il est facile d'ailleurs de constater que la construction qui donne la trace horizontale d'une telle droite est ici en défaut, ou bien, comme on le dit, la trace horizontale de cette droite est à l'infini (29).

42. — 2° *Toute droite parallèle au plan vertical a sa projection horizontale parallèle à la ligne de terre.*

En effet, tous les points de cette droite ont le même éloignement, et par suite, tous les points de la projection horizontale sont à la même distance de la ligne de terre.

Une telle droite s'appelle une ligne de FRONT; ainsi FF' (fig. 16, pl. 2) est une ligne de front.

On peut vérifier encore ici que la trace verticale est transportée à l'infini.

43. — 3° *Toute droite contenue dans le premier plan bissecteur a ses deux projections symétriques par rapport à la ligne de terre,* puisque tout point du premier plan bissecteur doit avoir ses deux projections symétriques par rapport à la ligne de

terre. Ainsi AA′ (fig. 17, pl. 2) est contenue dans le premier plan bissecteur.

44. — 4° *Toute droite contenue dans le deuxième plan bissecteur a ses deux projections confondues.* Exemple BB′ (fig. 18, pl. 2) est une droite du deuxième plan bissecteur, puisque tout point de cette droite doit avoir ses deux projections confondues.

45. — 5° *Toute droite perpendiculaire au plan vertical a pour projection verticale un point, et pour projection horizontale une perpendiculaire à la ligne de terre* (25). Exemple CC′ (fig. 19, pl. 2) est perpendiculaire au plan vertical. On peut l'énoncer la perpendiculaire au plan vertical C′. C'est un cas particulier d'une horizontale. Une telle droite s'appelle aussi une ligne de bout.

46. — 6° *Toute verticale se projette horizontalement suivant un point et verticalement suivant une perpendiculaire à la ligne de terre.* Exemple DD′ (fig. 20, pl. 2) est une verticale. On peut encore la nommer la verticale D.

47. — 7° *Toute parallèle à la ligne de terre étant à la fois horizontale et de front a ses deux projections parallèles à la ligne de terre.* Exemple EE′ (fig. 21, pl. 2) est parallèle à la ligne de terre.

48. — 8° *Toute parallèle au premier plan bissecteur a ses deux projections symétriques par rapport à une ligne de rappel,* puisqu'elle doit être parallèle à une droite du premier plan bissecteur qui a elle-même ses projections symétriques par rapport à la ligne de terre, ou, ce qui revient au même, symétriques par rapport à une ligne de rappel. Exemple GG′ (fig. 22, pl. 2) est parallèle au premier plan bissecteur.

49. — 9° *Toute parallèle au deuxième plan bissecteur a ses deux projections parallèles entre elles.* En effet, une telle droite doit être parallèle à une droite du deuxième plan bissecteur, qui a ses deux projections confondues. Exemple KK′ (fig. 23, pl. 2) est parallèle au deuxième plan bissecteur.

Dans ces deux derniers exemples, on peut vérifier que les points de rencontre avec le premier ou le second plan bissecteur

sont à l'infini, en appliquant la construction indiquée pour déterminer ces points (31) (32).

50. — 10° *Toute perpendiculaire à l'un des plans bissecteurs* étant en même temps perpendiculaire à la ligne de terre sera, comme nous l'avons déjà dit, *dans un plan de profil,* et par suite elle ne sera plus déterminée par ses deux projections. On peut cependant en trouver très-simplement deux points.

Par exemple, supposons qu'il s'agisse d'une perpendiculaire au premier plan bissecteur, elle sera alors en même temps parallèle au deuxième plan bissecteur, et jouira tout en étant dans le plan de profil, des propriétés de ces droites.

Or si nous prenons sur une parallèle au deuxième plan bissecteur (fig. 24, pl. 2) deux points aa', bb' les éléments ab, $a'b'$ sont égaux, parallèles et dirigés dans le même sens, il en sera de même dans le plan de profil, et par suite en prenant les longueurs $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ égales et dirigées dans le même sens, $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ (fig. 24, pl. 2) sera une perpendiculaire au premier plan bissecteur.

51. — 11° Si au lieu de cela, on prenait toujours les longueurs $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ égales mais dirigées en sens contraire, la droite $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ (fig. 25, pl. 2) serait perpendiculaire au deuxième plan bissecteur, parce qu'on pourrait la considérer comme la limite d'une parallèle au premier plan bissecteur, cette parallèle devant avoir ses deux projections symétriques par rapport à une parallèle à la ligne de terre.

52. — 12° Comme derniers cas particuliers, nous citerons encore *les parallèles à la ligne de terre contenues dans l'un ou l'autre des plans bissecteurs.* Et d'abord si la droite est dans le premier plan bissecteur, elle a alors ses deux projections parallèles et symétriques par rapport à la ligne de terre.

53. — 13° *Si* enfin *la droite est dans le deuxième plan bissecteur, elle a ses deux projections confondues suivant une parallèle à la ligne de terre.*

On fera bien, comme exercice, d'établir la ponctuation de toutes ces droites remarquables, en observant la règle suivante :

Lorsque dans une épure plusieurs lignes sont superposées, on

marque avant tout les traits pleins appartenant aux choses qui existent et sont vues, ensuite les petits points correspondant aux choses qui existent mais sont cachées, puis les traits mixtes représentant les éléments qui existaient primitivement dans les données, mais sont enlevés dans l'objet que l'on représente, et enfin les lignes de construction.

VI. — INTERSECTION DE DEUX DROITES.

54. — Problème. — *Reconnaître que deux droites se rencontrent.*

Pour que deux droites AA′, BB′ (fig. 26, pl. 3) se rencontrent, il faut et il suffit que les points de rencontre des projections de même nom de ces deux droites se trouvent sur une même ligne de rappel.

Cette vérification ne peut se faire que si les points m, m' se trouvent tous deux dans les limites de l'épure; s'il n'en était pas ainsi, on remarquerait que si deux droites se rencontrent, il en est de même de toutes les droites s'appuyant sur les deux premières.

Nous marquerons donc sur la première droite AA′ (fig. 27, pl. 3) deux points quelconques aa', $a_1a'_1$, puis, sur la deuxième BB′, deux autres points bb', $b_1b'_1$: ensuite nous joindrons ces quatre points deux à deux de manière à former deux droites. Si ces deux droites $aba'b'$, $a_1b_1a'_1b'_1$ se rencontrent, c'est qu'il en est de même pour AA′ et BB′.

Comme les points qu'on a choisis sont tout à fait arbitraires, on pourra toujours les prendre de manière que les constructions restent tout entières dans les limites de l'épure.

On procéderait de la même manière si l'une des droites était dans un plan de profil, déterminée par deux points.

55. — Problème. — *Trouver le point de rencontre de deux droites contenues dans le même plan de profil, et déterminées chacune par deux points.*

Pour trouver le point de rencontre des deux droites ab $a'b'$, $cdc'd'$ (fig. 28, pl. 3), on projette ces deux droites obliquement sur le plan horizontal, parallèlement à une direction quelconque. A cet effet, par les quatre points aa', bb', cc', dd', nous

menons quatre parallèles à une direction quelconque. Soit $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ les traces horizontales de ces quatre droites, $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, sont les projections obliques des deux droites données, et par suite, μ est la projection oblique du point de rencontre. Menons alors par le point $\mu\mu'$ une parallèle à la direction suivant laquelle on projette, son point de rencontre mm' avec ab, $a'b'$ sera le point demandé.

On aurait pu arriver au même résultat à l'aide d'une projection conique, en choisissant un point quelconque de l'espace comme centre de projection.

CHAPITRE III

I. — REPRÉSENTATION DU PLAN.

56. — Un plan est déterminé par trois points non en ligne droite, ou par une droite et un point, ou enfin par deux droites qui se coupent.

En joignant les trois points deux à deux par deux droites, ou en joignant le point donné à un point quelconque de la droite, le plan, dans les deux premiers cas, sera encore déterminé par deux droites qui se coupent. On peut donc toujours supposer ces deux droites connues.

Soit, par exemple, les deux droites AA′, BB′ qui se rencontrent en *oo′* (fig. 29, pl. 3), elles déterminent un plan.

II. — DÉTERMINER UNE DROITE, UN POINT D'UN PLAN.

57. — Problème I. — *Trouver une droite d'un plan, connaissant une projection de cette droite.*

Donnons-nous par exemple, suivant C (fig. 29, pl. 3), la projection horizontale d'une droite contenue dans le plan ABA′B′. La droite inconnue étant contenue dans le plan, elle doit rencontrer toutes les droites du plan donné. Par exemple, elle rencontre la droite AA′ en un point dont nous connaissons immédiatement la projection horizontale *a*, et qui se projette verticalement en *a′* sur A′. De même, la droite inconnue rencontre BB′ au point *bb′*, donc *a′b′* est la projection verticale demandée.

Un raisonnement analogue au précédent nous aurait permis de trouver la projection horizontale, si nous nous étions donné la projection verticale de la droite.

Si la construction ne réussit pas, soit parce que les points *aa′*

bb', dont nous nous servons, sont en dehors de l'épure, ou bien parce qu'ils sont confondus, ce fait tenant à la disposition des droites AA', BB' choisies pour déterminer le plan, on n'a alors qu'à remplacer ces deux droites AA', BB' par d'autres droites mieux choisies dans le plan pour résoudre le problème.

58. — Exemple. — *Soit à trouver* (fig. 30, pl. 3) *la projection verticale d'une droite contenue dans le plan* ABA'B', *connaissant la projection horizontale* C *de cette droite.*

Nous disons comme précédemment, la droite inconnue rencontre premièrementAA' au point *aa'* puis BB' en un point qui est ici en dehors des limites de l'épure. Remplaçons alors la droite BB' avec laquelle la construction ne réussit pas, par une droite quelconque $\alpha\beta\alpha'\beta'$, rencontrant les deux droites AA', BB'. On peut alors considérer le plan comme étant déterminé par les deux droites AA', $\alpha\beta\alpha'\beta'$, avec lesquelles la construction réussit.

Nous continuons donc le raisonnement en disant, la droite inconnue rencontre deuxièmement $\alpha\beta$ $\alpha'\beta'$, en $\gamma\gamma'$. Donc $\alpha'\gamma'$ est la projection verticale demandée.

Au lieu de choisir, comme nous l'avons fait, la droite AA' d'une manière tout à fait arbitraire, on peut la prendre parallèle à l'une des droites données. Par exemple, par un point de la droite BB', on peut mener une parallèle à AA', soit $A_1A'_1$, et l'on considère alors le plan donné comme étant déterminé par les deux droites AA', $A_1A'_1$.

59. — **Problème II.** — *Trouver un point d'un plan, connaissant une projection de ce point.*

Soit ABA'B' le plan donné (fig. 29, pl. 3), *m* la projection horizontale d'un point du plan. Par le point inconnu, je fais passer dans le plan une droite quelconque. La projection horizontale de cette droite auxiliaire sera une droite quelconque passant par le point *m*.

Projetons cette droite verticalement, comme nous l'avons fait dans le problème précédent, à l'aide de ses deux points de rencontre *aa'*, *bb'*, avec les deux droites qui déterminent le plan donné. Le point inconnu se projette alors verticalement en *m'* sur *a'b'*.

Ici encore, au lieu de choisir la droite auxiliaire *ab* absolument quelconque, on peut la prendre parallèle à l'une des droites qui déterminent le plan donné.

60. — Remarque. — Le problème que nous venons de résoudre peut s'énoncer de la manière suivante : Intersection de la verticale *m* avec le plan ABA'B' ; *mm'* est le point demandé.

III. — DROITES REMARQUABLES D'UN PLAN.

61. — On entend par *droites remarquables d'un plan, les horizontales et les lignes de front de ce plan*, puis, comme cas particuliers de ces droites, les *traces du plan.*

62. — **Horizontale.** — Pour construire une horizontale d'un plan déterminé par deux droites AA', BB' (fig. 31, pl. 3), nous nous donnerons arbitrairement sa projection verticale H' parallèle à la ligne de terre, puis nous projetterons horizontalement ses deux points de rencontre *aa'*, *bb'*, avec les deux droites AA', BB'. L'horizontale cherchée est donc *ab*, *a'b'*.

Si maintenant on veut obtenir une horizontale quelconque du même plan, il suffit de mener par un point du plan une parallèle à la première horizontale connue. On choisira par exemple le point sur l'une des droites qui déterminent le plan.

63. — **Trace horizontale.** — Comme cas particulier d'une horizontale, nous avons la *trace horizontale* du plan, c'est-à-dire l'intersection du plan donné avec le plan horizontal de projection. Cette horizontale particulière se projette verticalement suivant la ligne de terre ; on l'obtiendra donc, en appliquant la même construction que pour une horizontale quelconque.

Autrement dit, la trace horizontale d'un plan s'obtient en joignant par une droite les traces horizontales de deux des droites du plan.

Soit, par exemple, AA', BB' (fig. 32, pl. 3) les deux droites qui déterminent le plan donné, hh', $h_1h'_1$ les traces horizontales de ces deux droites ; hh_1, $h'h'_1$ sera alors la trace horizontale du plan.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer pour la droite (29), au lieu de dire hh_1, $h'h'_1$ est la trace horizontale du plan, on se contente de dire hh_1 est la trace horizontale du plan, sans énoncer la projection verticale, parce qu'en disant trace horizontale, on sous-entend que la projection verticale se trouve sur la ligne de terre.

64.—Ligne de front.—Pour obtenir une ligne de front d'un plan, nous nous donnerons arbitrairement sa projection horizontale F parallèle à la ligne de terre, puis nous la projetterons verticalement à l'aide de ses deux points de rencontre avec deux des droites qui déterminent le plan donné.

Une ligne de front étant connue, les autres lignes de front seront toutes parallèles à la première, il suffira donc, pour déterminer l'une d'elles, de s'en donner un point.

65.— Trace verticale.— Comme cas particulier d'une ligne de front, nous avons la *trace verticale* du plan, qui se projette horizontalement sur la ligne de terre. Cette trace verticale s'obtient donc en joignant par une ligne droite les traces verticales des deux droites qui déterminent le plan. Ainsi $vv_1v'v'_1$ (fig. 32, pl. 3) est la trace verticale du plan.

Ici encore, on peut se contenter de dire $v'v'_1$ est la trace verticale du plan, parce qu'en disant trace verticale, on sous-entend que la projection horizontale se trouve sur la ligne de terre.

66. — Remarque. — Deux droites d'un plan se rencontrent, ou bien sont parallèles entre elles, il en est donc de même pour les deux traces d'un plan qui ne sont autre chose que deux droites du plan.

IV. — TRACES D'UN PLAN, DÉTERMINATION D'UN POINT, D'UNE DROITE DU PLAN.

67. — Dans l'exemple précédent (fig. 32, pl. 3), si nous appelons CC', DD' les deux traces du plan, nous voyons que ces deux traces se rencontrent en $\alpha\alpha'$ sur la ligne de terre. Il en doit être ainsi, car étant donné deux droites dans deux plans différents, ces deux droites ne peuvent se rencontrer que sur l'intersection des deux plans, à moins qu'elles soient toutes deux parallèles à cette intersection.

Ainsi en appelant P et P_1 les deux traces d'un plan, ces deux traces doivent rencontrer la ligne de terre au même point α et on nomme le plan $P\alpha P_1$.

Insistons encore une fois sur ce fait qu'*en nommant un plan de la manière suivante* $P\alpha P_1$, *il est déterminé par deux droites;*

l'une d'elles, la trace horizontale, par exemple, se projette horizontalement suivant $P\alpha$ *et verticalement sur la ligne de terre; l'autre, la trace verticale, se projette verticalement suivant* $P_1\alpha$ *et horizontalement sur la ligne de terre.*

Pour montrer qu'il n'y a pas de différence entre la détermination d'un plan par deux droites et la détermination du plan par ses traces, nous allons reprendre dans ce dernier cas les deux problèmes déjà résolus sur le plan.

68. — **Problème I.** — *Trouver une droite d'un plan connaissant une projection de cette droite.*

Soit, par exemple, le plan $P\alpha P_1$ (fig.33, pl.3) et C la projection horizontale d'une droite du plan. La droite inconnue rencontre premièrement la trace horizontale du plan en un point projeté horizontalement en a sur $P\alpha$, et verticalement en a' sur la ligne de terre; deuxièmement la trace verticale en un point projeté horizontalement en b sur la ligne de terre, et verticalement en b' sur $P_1\alpha$. La projection verticale demandée est donc $a'b'$.

Si la construction ne réussit pas, on remplace les deux traces à l'aide desquelles on a déterminé le plan par d'autres droites mieux choisies pour résoudre le problème.

69. — **Problème II.** — *Trouver un point d'un plan connaissant une projection de ce point.*

Soit $P\alpha P_1$ (fig. 34, pl. 3) le plan donné, et m la projection horizontale d'un point du plan. Par le point inconnu faisons passer dans le plan une droite quelconque que nous projetons verticalement comme dans le problème précédent. On en déduit la projection verticale demandée.

Au lieu d'une droite auxiliaire quelconque, on peut prendre une parallèle à l'une des droites qui déterminent le plan, c'est-à-dire une horizontale ou une ligne de front du plan.

Dans l'épure, on a pris l'horizontale du plan passant par le point m, elle est parallèle à la trace horizontale du plan, par suite sa projection horizontale est une parallèle à $P\alpha$ menée par m. Cette horizontale rencontre la trace verticale du plan au point vv', d'où il résulte que sa projection verticale est une parallèle à la ligne de terre menée par v'. La ligne de rappel du point m donne donc en m' la projection verticale demandée.

V. — PONCTUATION D'UN PLAN.

70. — Maintenant que nous savons déterminer les traces d'un plan, nous allons facilement établir la ponctuation du plan.

Proposons-nous par exemple (fig. 32, pl. 3), de *représenter le système du plan donné et des deux plans de projection supposés tous les trois opaques et prolongés indéfiniment.*

Le plan donné n'étant coupé par une ligne droite qu'en un seul point, il nous suffit d'établir la ponctuation de chaque droite du plan seulement par rapport aux deux plans de projection.

Occupons-nous d'abord de la projection horizontale.

1°. La droite AA′ est vue en projection horizontale dans toute la région *hv* jusque l'infini à droite, puisque dans toute cette région elle est au-dessus du plan horizontal. Au contraire, elle est cachée à gauche de *h*.

2° La droite BB′ est vue dans la région h_1v_1 jusque l'infini à gauche, et cachée à droite de h_1.

3° CC′ est vue tout entière, puisqu'elle est dans le plan horizontal.

Passons maintenant à la projection verticale.

1° La droite AA′ est vue dans toute la région *v′h′* jusque l'infini à gauche, puisque dans toute cette région elle est en avant du plan vertical, elle est au contraire cachée à droite de *v′*.

2° BB′ est vue dans la région $v'_1h'_1$ jusque l'infini à droite, et cachée à gauche de v'_1.

3° DD′ est vue tout entière en projection verticale, puisque cette droite est dans le plan vertical.

VI. — PLANS REMARQUABLES.

71. — Nous entendrons par *plans remarquables*, les plans perpendiculaires ou parallèles aux plans de projection ou aux plans bissecteurs.

72. — **THÉORÈME.** — *Tout plan perpendiculaire au plan*

horizontal a sa trace verticale perpendiculaire sur la ligne de terre.

En effet, le plan donné et le plan vertical de projection sont perpendiculaires tous deux au plan horizontal, donc leur intersection, c'est-à-dire la trace verticale du plan, est également perpendiculaire au plan horizontal. Il en résulte que la trace verticale du plan est perpendiculaire à la ligne de terre qui passe par son pied dans le plan horizontal.

73. — **Réciproque.** — *Tout plan ayant sa trace verticale perpendiculaire à la ligne de terre est perpendiculaire au plan horizontal.*

En effet, puisque les deux plans de projection sont rectangulaires, la trace verticale étant menée dans le plan vertical perpendiculairement à la ligne de terre, elle est aussi perpendiculaire au plan horizontal. Il en est de même pour tout plan passant par cette droite, et en particulier pour le plan donné.

Ainsi tout plan tel que $P\alpha P_1$ (fig. 35, pl. 3) est perpendiculaire au plan horizontal. On l'appelle un plan vertical.

74.— **THÉORÈME.**— *Tout point d'un plan vertical se projette horizontalement sur la trace horizontale du plan.*

En effet, on sait qu'étant donné deux plans rectangulaires, si d'un point de l'un d'eux on abaisse une perpendiculaire sur l'autre, elle est contenue dans le premier. Donc toutes les projetantes des points du plan donné relativement au plan horizontal sont contenues dans le plan donné, et par suite leurs traces horizontales se trouvent sur la trace horizontale du plan donné ; or la trace horizontale d'une projetante verticale est précisément la projection horizontale du point.

75. — **Réciproque**. — *Tout point ayant sa projection horizontale sur la trace horizontale d'un plan vertical est contenu dans ce plan vertical.*

En effet, le plan étant vertical, la projetante déterminée par la projection connue est contenue tout entière dans le plan donné, et par suite le point inconnu se trouvant sur cette projetante est lui-même dans le plan donné.

Ainsi *mm'* est un point du plan $P\alpha P_1$ (fig. 35, pl. 3). On serait évidemment arrivé au même résultat en appliquant la construction indiquée pour trouver un point d'un plan, connaissant la projection verticale de ce point.

A l'aide d'un raisonnement analogue au précédent, on démontrera les deux théorèmes suivants :

76. — THÉORÈME. — *Tout plan perpendiculaire au plan vertical a sa trace horizontale perpendiculaire à la ligne de terre, et réciproquement tout plan ayant sa trace horizontale perpendiculaire sur la ligne de terre est perpendiculaire au plan vertical.*

77. — THÉORÈME. — *Tout point d'un plan perpendiculaire au plan vertical se projette verticalement sur la trace du plan, et réciproquement, tout point de la trace verticale du plan peut être considéré comme étant la projection verticale d'un point du plan.*

Ainsi le plan $R\beta R_1$ (fig. 36, pl. 3) est perpendiculaire au plan vertical, de plus *nn'* est un point de ce plan. Un tel plan s'appelle aussi un plan de bout.

78. — Plan de front. — Un *plan de front* est un cas particulier d'un plan vertical, que l'on suppose devenu parallèle au plan vertical de projection.

Les traces d'un plan de front et du plan vertical de projection sur le plan horizontal sont donc parallèles entre elles. Ainsi, la trace horizontale d'un plan de front est parallèle à la ligne de terre. Enfin le plan de front étant parallèle au plan vertical, il n'a pas de trace verticale.

Tous les points d'un plan de front se projettent horizontalement sur la trace horizontale.

Ainsi F représente un plan de front, *mm'* est de plus un point de ce plan (fig. 37, pl. 3).

79. — REMARQUE I. — *Toute figure contenue dans un plan de front se projette verticalement suivant une figure égale.*

80. — Plan horizontal. — Un *plan horizontal*, c'est-à-dire parallèle au plan horizontal de projection, est un cas particulier d'un plan perpendiculaire au plan vertical. Un tel plan n'a plus que sa trace verticale, parallèle à la ligne de terre (fig. 38, pl. 3); la trace horizontale est à l'infini.

Enfin, tous les points d'un plan horizontal se projettent verticalement sur la trace verticale du plan.

81. — REMARQUE II. — *Toute figure contenue dans un plan horizontal se projette horizontalement suivant une figure égale.*

82. — **Plan de profil.** — Un *plan de profil* est perpendiculaire simultanément sur les deux plans de projection, et par suite sur la ligne de terre, il a ses deux traces confondues suivant une perpendiculaire à la ligne de terre (fig. 39, pl. 3).

Tous les points d'un plan de profil se projettent horizontalement et verticalement sur les deux traces.

83. — **THÉORÈME.** — *Tout plan ayant ses deux traces symétriques par rapport à la ligne de terre est perpendiculaire sur le premier plan bissecteur* (fig. 40, pl. 4).

En effet, si nous coupons un tel plan par un plan de profil, la droite *aba'b'* ainsi obtenue est perpendiculaire au premier plan bissecteur, puisque les deux longueurs *ab*, *a'b'*, sont égales et dirigées dans le même sens.

84. — **Réciproque.** — *Tout plan perpendiculaire au premier plan bissecteur a ses deux traces symétriques par rapport à la ligne de terre* (fig. 40, pl. 4).

En effet, menons par le point *aa'*, qui est dans le plan horizontal, une perpendiculaire au premier plan bissecteur, sa trace verticale se projette horizontalement en *b* sur *xy*, et verticalement en *b'*, que l'on obtient en portant *a'b'* égal à *ab* et dans le même sens. Tout plan passant par *ab*, *a'b'* sera perpendiculaire au premier plan bissecteur, et comme ses deux traces doivent passer respectivement par *a* et *b'*, pour se couper sur la ligne de terre, il en résulte que ces deux traces sont symétriques par rapport à la ligne de terre.

85. — **THÉORÈME.** — *Tout plan ayant ses deux traces confondues est perpendiculaire sur le deuxième plan bissecteur* (fig. 41, pl. 4).

En effet, si nous coupons un tel plan par un plan de profil, la droite ainsi obtenue *aba'b'* est perpendiculaire au deuxième plan bissecteur, puisque les deux longueurs *ab*, *a'b'* sont égales et en sens contraire.

La réciproque se démontre de la même manière que celle du théorème précédent.

86. — *Tout plan parallèle à la ligne de terre a ses deux traces* PP_1 (fig. 42, pl. 4) *parallèles à la ligne de terre.*

87. — *Tout plan parallèle au premier plan bissecteur a ses deux traces confondues suivant une parallèle à la ligne de terre* (fig. 43, pl. 4).

En effet, un tel plan est à la fois parallèle à la ligne de terre, et perpendiculaire sur le deuxième plan bissecteur.

88.—Enfin, *tout plan parallèle au deuxième plan bissecteur a ses deux traces parallèles et symétriques par rapport à la ligne de terre* (fig. 44, pl. 4).

En effet, ce plan est à la fois parallèle à la ligne de terre et perpendiculaire sur le premier plan bissecteur.

VII. — PLANS PARALLÈLES.

89. — Problème. — *Mener par un point de l'espace un plan parallèle à un plan donné.*

Pour mener par un point de l'espace un plan parallèle à un plan donné, il suffit de mener par le point deux parallèles à deux droites du plan donné; ces deux droites n'étant pas parallèles entre elles.

Supposons, par exemple, le plan primitif déterminé par deux droites quelconques AA′, BB′ (fig. 45, pl. 4). Nous menons par le point donné oo' deux parallèles aux deux droites AA′, BB′, soit $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$. Ces deux lignes déterminent le plan demandé.

Supposons encore le plan déterminé par ses deux traces (fig. 46, pl. 4). Nous mènerons par le point donné oo' deux parallèles à ces deux traces, et alors le plan demandé sera déterminé par une horizontale HH′ et une ligne de front FF′.

90. — Si l'on avait voulu déterminer immédiatement une trace du plan et une seule, il eût été inutile de dessiner à la fois l'horizontale et la ligne de front.

Proposons-nous, par exemple, de mener par oo' (fig. 47, pl. 4) un plan parallèle au plan $P\alpha P_1$, et de trouver uniquement la trace horizontale du plan inconnu. Menons alors par le point oo' la ligne de front du plan inconnu of, $o'f'$; sa trace horizontale ff' appartient à la trace horizontale du plan demandé. Il suffit

alors de mener par ce point une parallèle à la trace horizontale du plan donné, et l'on aura suivant Rβ la trace horizontale demandée.

De même si l'on avait voulu trouver immédiatement la trace verticale du plan, on aurait dessiné l'horizontale passant par oo'.

91. — Problème. — *Mener par une droite un plan parallèle à une droite donnée.*

Le plan inconnu sera déterminé par la droite primitive et par une parallèle à la direction donnée, menée par un point quelconque de la première droite.

92. — Problème. — *Mener par quatre points* a_0, b_1, c_2, d_3 *quatre plans parallèles entre eux et équidistants.*

Joignons les deux points a_0, d_3 par une ligne droite et partageons cette droite dans l'espace en trois parties égales. Il suffit pour cela de partager les projections de a_0, d_3 en trois parties égales. Nous obtenons ainsi les points β_1, γ_2. Considérons alors les deux droites $b_1\beta_1$, $c_2\gamma_2$, et menons par chacun des points a_0, b_1, c_2, d_3 un plan parallèle à ces deux droites, en employant la même construction que si ces deux droites étaient dans le même plan.

On vérifiera que ce problème présente douze solutions, en faisant varier les positions des indices 0, 1, 2, 3 dont on a affecté les lettres a, b, c, d, ces indices représentant le rang du plan correspondant.

VIII. — EXERCICES.

1. Construire une horizontale de grandeur donnée s'appuyant sur deux droites quelconques.

2. Trouver la plus petite horizontale s'appuyant sur deux droites quelconques.

3. Par une droite mener un plan dont les distances à deux points donnés soient entre elles comme m et n.

4. Par un point o mener un plan dont les distances à trois points soient entre elles comme m, n, p.

5. Trouver un plan dont les distances à quatre points soient entre elles comme m, n, p, q.

6. Étant donné deux droites dont les projections horizontales sont parallèles, démontrer que toutes les horizontales s'appuyant sur ces deux droites passent en projection horizontale par un point fixe.

LIVRE II

INTERSECTION DE DROITES ET DE PLANS

CHAPITRE PREMIER

93. — Problème. — ***Intersection d'une ligne quelconque et d'un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection.***

Soit, par exemple, la ligne LL′ (fig. 48, pl. 4) déterminée par ses deux projections et le plan vertical $P\alpha P_1$. Nous savons que tout point d'un plan vertical $P\alpha P_1$ se projette horizontalement sur la trace horizontale $P\alpha$, donc le point inconnu se projette horizontalement en m à l'intersection de L avec $P\alpha$ et verticalement en m' sur L′.

On emploierait identiquement la même construction si au lieu d'une ligne quelconque, on avait une ligne droite.

I. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN.

94. — Pour obtenir d'une manière générale l'intersection d'une ligne L et d'une surface S, on fait passer par la ligne L une surface auxiliaire S_1, dont on détermine l'intersection I avec la surface primitive S. Cette dernière ligne I rencontre la ligne donnée L au point demandé. La seule difficulté consiste donc dans le choix de la surface S_1 que l'on devra prendre de manière à obtenir simplement la ligne I.

Dans le cas d'une droite et d'un plan, nous choisirons comme surface auxiliaire, la plus simple que nous ayons à notre disposition, c'est-à-dire un plan, et pour profiter de l'exemple précédent, nous prendrons de préférence l'un des plans projetants de la droite.

95. — Soit donc la droite DD′ et le plan ABA′B′ (fig. 49, pl. 4). Prenons comme surface auxiliaire le plan qui projette horizontalement la droite, c'est-à-dire le plan vertical D. Ce plan coupera le plan donné ABA′B′ suivant une ligne droite dont nous pouvons trouver immédiatement deux points, ce sont les deux points de rencontre du plan vertical D avec les deux droites AA′, BB′ qui déterminent le plan donné. Ainsi donc le plan auxiliaire coupe le plan donné suivant *ab a′b′*, qui à son tour rencontre la droite donnée au point *mm′*.

Cette construction doit toujours réussir quand la droite DD′ n'est pas dans un plan de profil, parce qu'on a toujours le droit, si les points *aa′*, *bb′* ne se trouvent pas dans les limites de l'épure ou bien sont confondus, de remplacer les droites AA′, BB′ qui déterminent le plan, par d'autres droites mieux choisies dans le plan, comme nous avons eu déjà l'occasion de le faire (60).

II. — PONCTUATION.

96. — Proposons-nous, dans cet exemple, de *représenter le système formé par la droite et le plan supposé opaque et prolongé indéfiniment, les plans de projection étant transparents.*

Le plan donné ainsi que toutes les droites du plan seront complétement visibles, nous n'avons donc ici qu'à nous occuper de la ponctuation de la droite par rapport au plan.

Remarquons d'abord que la limite de la ponctuation de la droite, quelle que soit la position de l'observateur, sera toujours le point de rencontre *mm′* de la droite avec le plan. Occupons-nous alors de la projection horizontale.

97. —Considérons d'une manière générale, une verticale passant par un point de la droite ; puis déterminons l'intersection de cette verticale avec le plan. Si ce nouveau point est au-dessous du premier, c'est que le premier point de la droite est vu.

Comme il faut autant que possible éviter l'emploi de constructions supplémentaires pour établir la ponctuation, nous choisirons une verticale s'appuyant à la fois sur la droite donnée, et sur l'une des droites connues du plan. Par exemple, la verticale *a* rencontre DD′ en δδ′ et AA′, et par suite le plan en *aa′*. Nous constatons alors que le point *aa′* est au-dessus de δδ′, donc le

point $\delta\delta'$ de la droite est caché en projection horizontale par le point aa' du plan.

Ainsi, en projection horizontale, la droite est cachée depuis le point m jusque l'infini à gauche en passant par δ.

A droite de m, D est vue.

98. — Nous allons procéder de même pour la projection verticale. Considérons la perpendiculaire au plan vertical s'appuyant sur DD' et sur BB', par exemple ; elle rencontre DD' en $\delta_1\delta'_1$ et BB' en $b_1b'_1$. Nous constatons que le point $b_1b'_1$ est en avant du point $\delta_1\delta'_1$, donc le point $\delta_1\delta'_1$ est caché, et il en est de même pour tous les points de la droite DD' placés du même côté que $\delta_1\delta'_1$ par rapport à mm'. Ainsi toute la région de la droite DD' qui est à droite de mm' est cachée en projection verticale, celle qui est à gauche est vue.

Avec cette hypothèse des deux plans de projection transparents, on devra faire la ligne de terre en ligne de construction, ou encore ne pas la marquer.

III. — CAS PARTICULIERS.

99. — **Exemple I.** — *Intersection d'un plan avec une verticale.*

Ce problème a déjà été résolu, quand nous avons déterminé un point d'un plan connaissant une projection de ce point (60).

100. — **Exemple II.** — *Le plan est déterminé par ses deux traces* (fig. 50, pl. 4).

Nous dirons, comme dans l'exemple général, le plan projetant horizontalement la droite coupe premièrement la trace horizontale du plan au point hh', deuxièmement la trace verticale du plan au point vv', et par suite le plan donné suivant $hvh'v'$ qui à son tour rencontre la droite donnée au point demandé mm'.

101. — PONCTUATION. — Proposons-nous ici de *représenter le système formé par la droite, le plan donné opaque et les deux plans de projection également opaques*, en profitant de ce que nous connaissons les traces du plan.

Premièrement, les traces du plan sont vues tout entières, comme nous l'avons déjà reconnu en étudiant le plan. Il nous

reste donc à établir la ponctuation de la droite par rapport au plan donné, et par rapport aux plans de projection.

Occupons-nous d'abord de la projection horizontale. La verticale *b* coupe la droite au point *bb'* et la trace verticale du plan, et par suite le plan au point *vv'*. Donc le point *bb'* de la droite est caché en projection horizontale par le point *vv'* du plan. Il en résulte que toute la région *mb* jusque l'infini à droite est cachée par le plan. D'ailleurs à gauche du point *a*, la droite est cachée par le plan horizontal. Donc *am* est la seule région vue en projection horizontale.

Passons maintenant à la projection verticale. La perpendiculaire au plan vertical *k'* coupe la droite en *aa'*, le plan en *kk'*, donc le point *a* est vu en projection verticale, et il en est de même pour toute la région à gauche de *m'*. Cette même région étant aussi en avant du plan vertical, elle reste vue dans le système que nous voulons représenter.

102. — Exemple III. — *La construction ordinaire ne réussit pas.*

Dans cet exemple (fig. 51, pl. 4), le plan projetant horizontalement C coupe AA' et BB' au même point, la construction est donc en défaut.

Choisissons alors le plan projetant verticalement la droite, il coupe BB' dans les limites de l'épure, mais il ne rencontre pas AA' dans les limites de l'épure.

Il peut alors se présenter deux cas, ou bien A' et C' ne sont pas parallèles, et alors on remplace AA' par une autre droite du plan, ou bien, comme nous l'avons supposé dans la figure, A' et C' sont parallèles, et alors la construction réussit parfaitement.

Le plan projetant verticalement C' coupe BB' en *bb'* et AA' à l'infini. Donc le plan auxiliaire coupe le plan donné suivant une parallèle à AA', menée par *bb'*. Cette droite *b*α*b'*α' rencontre la droite donnée CC' au point demandé *mm'*.

103. — Exemple IV. — *Intersection d'une droite* CC' *et d'un plan déterminé par la ligne de terre et un point* (fig. 52, pl. 4).

Nous commencerons par construire une deuxième droite du plan. Nous obtiendrons cette droite en joignant le point *aa'* à un point quelconque de la ligne de terre. Prenons, par exemple, la parallèle à la ligne de terre menée par *aa'*, soit AA'. Le plan

est alors déterminé par deux droites AA′ et la ligne de terre BB′ et la construction réussit comme à l'ordinaire.

104. — Exemple V. — ***La droite donnée est dans un plan de profil*** **(fig. 53, pl. 4).**

Le plan projetant horizontalement la droite *mn* coupe ABA′B′ suivant *aba b′*. Le problème revient donc au suivant, trouver le point de rencontre de deux droites contenues dans le même plan de profil. Le point cherché est ici *pp′*, il a été obtenu à l'aide d'une projection oblique, parallèle à $a\alpha a'\alpha'$ (57).

Pour établir la ponctuation de la droite, on déterminera successivement les points de rencontre de la verticale *m* et de la perpendiculaire au plan vertical *m′* avec le plan.

IV. — EXERCICES.

105. — 1. *Mener par un point une droite s'appuyant sur deux droites données.*

Par le point et l'une des droites, on mène un plan dont on cherche l'intersection avec l'autre droite donnée; en joignant ce point au point donné, on aura la droite demandée.

106. — 2. *Mener une parallèle à une droite donnée s'appuyant sur deux droites données.*

Par l'une des droites, on mène un plan parallèle à la direction donnée; puis on cherche l'intersection de ce plan avec la deuxième droite. Il ne reste plus qu'à mener par ce point une parallèle à la direction donnée.

107. — 3. *Construire une parallèle à un plan s'appuyant sur deux droites données.*

On considère une droite quelconque du plan, puis on construit une parallèle à cette droite s'appuyant sur les deux droites données. On peut également couper les deux droites par un plan quelconque parallèle au plan donné, et joindre les deux points ainsi obtenus par une ligne droite. Comme on le voit, ce problème présente une infinité de solutions.

108. — 4. *Construire une droite s'appuyant sur trois droites données.*

Par un point de l'une des droites et l'une des deux autres on mène un plan dont on cherche l'intersection avec la troisième droite. En joignant le point ainsi obtenu au premier point choisi arbitrairement, on aura la droite demandée. Ce problème, comme le précédent, présente encore une infinité de solutions.

CHAPITRE II

I. — INTERSECTION DE DEUX PLANS.

109. — D'une manière générale, pour trouver un point de l'intersection de deux surfaces SS_1, on coupe ces deux surfaces par une troisième surface auxiliaire Σ, elle coupe les deux surfaces données, suivant deux lignes cc_1, dont le point commun M est le point demandé.

En répétant cette construction un certain nombre de fois, on aura autant de points que l'on voudra de l'intersection I de deux surfaces S et S_1.

Il reste alors à choisir les surfaces auxiliaires, de telle manièr que la détermination des lignes c et c_1 soit aussi simple que pos sible.

110. — Dans le cas de deux plans, l'intersection étant une ligne droite, il nous suffira d'en déterminer deux points. Comme surface auxiliaire, nous choisirons chaque fois un plan, et de plus, autant que possible, un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection.

Parmi ces plans, nous pourrons choisir en particulier un plan projetant une droite de l'un des plans, ou bien un plan parallèle à l'un des plans de projection, ou enfin, suivant les circonstances, les plans de projection eux-mêmes. Ces différents choix, rentrant toujours dans la méthode générale, dépendent bien entendu de la nature des données.

Soit par exemple (fig. 54, pl. 5), AA'.BB' les deux droites qui déterminent le premier plan, CC', DD', celles qui déterminent le second plan.

Prenons comme plan auxiliaire le plan projetant horizontalement C; il coupe ABA'B' suivant *aba'b'* et le plan CDC'D' suivant

la droite CC′ elle-même, nous avons donc en $\gamma\gamma'$ un premier point de l'intersection.

Si maintenant nous prenons comme plan auxiliaire le plan projetant horizontalement D, il coupera d'abord le plan CDC′D′ suivant la droite DD′ elle-même, et le plan ABA′B′ suivant $a_1b_1a'_1b'_1$, ce qui nous donne en $\delta\delta'$ un deuxième point de l'intersection.

En résumé, $\gamma\delta\gamma'\delta'$ est l'intersection demandée.

Comme vérification, cette droite étant contenue simultanément dans les deux plans, elle doit rencontrer toutes les droites des deux plans donnés; par exemple elle rencontre AA′ en $\alpha\alpha'$, et BB′ en $\beta\beta'$.

111. — Remarque. — Cette manière de procéder revient à celle-ci : pour trouver un point de l'intersection de deux plans, on cherche l'intersection d'une droite de l'un des plans avec l'autre plan.

112. — Si la construction ne réussissait pas avec les plans que nous avons choisis, on pourrait choisir les plans projetant horizontalement A et B, ou encore les quatre plans projetant verticalement les quatre droites. Si même avec toute cette variété de plans auxiliaires, les constructions ne pouvaient réussir, on recourrait au procédé général, dans lequel le plan auxiliaire étant assujetti à la seule condition d'être perpendiculaire à l'un des plans de projection, ce plan peut alors être choisi arbitrairement de manière à faire toujours réussir la construction.

L'avantage que présentent les premiers plans indiqués est que l'intersection de chaque plan auxiliaire avec l'un des plans donnés est toute trouvée, de telle sorte qu'on n'a à construire que l'intersection de ce plan auxiliaire avec l'autre plan.

II. — PONCTUATION.

113. — Proposons-nous de *représenter* dans cette épure *le système des deux plans supposés opaques et prolongés indéfiniment, les deux plans de projection étant transparents.*

Premièrement, chaque plan pris isolément étant vu tout entier, dans le système des deux plans opaques, leur intersection est vue tout entière. En effet, soit M un point quelconque de

l'intersection, le rayon visuel qui part de ce point rencontre le système des deux plans en deux points confondus en M, et qui par suite sont vus tous les deux.

Il nous reste alors à établir la ponctuation de chaque droite de l'un des plans par rapport à l'autre plan, la limite entre les parties vues et cachées se trouvant d'ailleurs sur l'intersection des deux plans donnés.

Une seule opération suffira pour établir complétement cette ponctuation. Considérons, par exemple, la verticale qui s'appuie sur AA' et CC', elle rencontre AA' en *aa'* et CC' en *cc'*; nous constatons alors que, en projection horizontale, le point *aa'* de AA' est vu, tandis que le point *cc'* de CC' est caché. Alors toute la région de AA', qui est du même côté que *a* par rapport à α, est vue en projection horizontale, tandis que toute la région de C, qui est du même côté que *c* par rapport à γ, est cachée.

Pour avoir maintenant la ponctuation de B, considérons le point de rencontre de BB' avec AA', ce point aura évidemment la même ponctuation pour les deux droites AA'BB'. Dans notre exemple, ce point est vu ; donc toute la région de B qui est à gauche de β est vue en projection horizontale.

On procédera de la même manière pour D et pour la projection verticale.

III. — CAS PARTICULIERS.

114.— Exemple I.— *Intersection de deux plans déterminés chacun par ses traces.*

Ici les plans auxiliaires les plus simples qui se présentent sont les plans de projection.

Coupons, par exemple, les deux plans donnés par le plan horizontal, nous obtiendrons les deux traces horizontales PαRβ (fig. 55, pl. 5) qui se rencontrent en *hh'*. Ce point *hh'* sera précisément la trace horizontale de l'intersection des deux plans.

Si maintenant, nous prenons comme plan auxiliaire le plan vertical, nous trouvons les traces verticales $P_1\alpha R_1\beta$ qui se rencontrent en *vv'*.

Ce nouveau point *vv'* est la trace verticale de l'intersection, et enfin *hvh'v'* est l'intersection elle-même.

115. — Ponctuation. — Comme dans cette épure, nous avons

les traces des plans, nous allons nous proposer de ***représenter le système des deux plans donnés et des deux plans de projection supposés tous opaques et prolongés indéfiniment.***

Occupons-nous d'abord de l'intersection ; en supposant les deux plans de projection transparents, elle serait vue tout entière, mais comme ils sont opaques, en projection horizontale hv sera vue jusque l'infini à droite, et en projection verticale $v'h'$ sera vue jusque l'infini à gauche.

Passons maintenant à la ponctuation des traces. La limite de la ponctuation pour ces différentes droites se trouve sur l'intersection des deux plans. D'ailleurs on n'a pas ici à tenir compte des plans de projection, puisque nous avons reconnu que les deux traces d'un plan étaient complétement vues.

La verticale β, par exemple, rencontre le plan $R\beta R_1$ en $\beta\beta'$ et le plan $P\alpha P_1$ en bb', donc le point β du plan $R\beta R_1$ est caché en projection horizontale par le point bb' du plan $P\alpha P_1$. Il résulte de là que la portion $h\beta$ jusque l'infini à droite est cachée. Ainsi le plan $R\beta R_1$ est caché à droite de l'intersection, c'est donc que le plan $P\alpha P_1$ est vu de ce côté, et par suite la portion $h\alpha$ jusque l'infini à gauche est cachée aussi.

On procédera de la même manière en projection verticale, en tenant compte, par exemple, des points de rencontre de la perpendiculaire au plan vertical β' avec les deux plans donnés.

Les plans de projection étant supposés opaques, la ligne de terre sera marquée en trait plein.

Dans cet exemple, nous avons pris comme plans auxiliaires les plans de projection, parce que nous connaissions les intersections des plans donnés avec ces deux plans de projection. D'une manière générale, il faudra voir si, d'après la disposition des données, une droite de l'un des plans rencontre une droite de l'autre plan, parce que ce point fait alors partie de l'intersection. De même, il faudra voir si une droite de l'un des plans est parallèle à une droite de l'autre plan, parce que dans ce cas on connaitra la direction de l'intersection. Il suffira donc de chercher un seul point de l'intersection. Nous aurons l'occasion d'appliquer ces remarques dans les exemples qui vont suivre, comme on aurait pu le faire dans le dernier exemple.

116. — Exemple II. — *Intersection de deux plans ayant deux traces de même nom parallèles entre elles.*

Soit les deux plans $P\alpha P_1$, $R\beta R_1$ (fig. 56, pl. 5), dont les traces horizontales sont parallèles entre elles, l'intersection est alors parallèle à ces deux traces. Nous avons d'ailleurs un point de l'intersection, c'est le point de rencontre vv' des deux traces verticales. Il suffit donc, pour avoir l'intersection des deux plans, de tracer l'horizontale de l'un des plans passant par le point vv'.

Si les traces verticales des deux plans étaient parallèles entre elles, on aurait comme intersection la ligne de front passant par le point de rencontre des deux traces horizontales.

Bien entendu, si dans les deux projections les traces de même nom des deux plans étaient parallèles entre elles, on n'aurait pas à chercher l'intersection des deux plans, puisque dans ce cas les deux plans seraient parallèles entre eux.

117. — Exemple III.—*Intersection de deux plans coupant la ligne de terre au même point.*

Soit les deux plans $P\alpha P_1$, $R\alpha R_1$ (fig. 57, pl. 5). Le point $\alpha\alpha'$ est évidemment un premier point de l'intersection, il suffit alors d'en déterminer un deuxième.

Remarquons ici que le point $\alpha\alpha'$ est donné simultanément par les deux plans de projection, nous devons donc employer de nouveaux plans auxiliaires différents des premiers. Dans l'épure, on a pris le plan horizontal H_1 d'où on déduit le point mm'. Ainsi $mxm'\alpha'$ est l'intersection des deux plans.

118. — Exemple IV. — *Intersection de deux plans parallèles à la ligne de terre et déterminés par leurs traces.*

L'intersection est elle-même parallèle à la ligne de terre, il suffit donc d'en trouver un point. Les plans de projection de même que les plans parallèles aux plans de projection donnent chaque fois le même point à l'infini. Il faut donc revenir au procédé général qui consiste à couper par un plan simplement perpendiculaire à l'un des plans de projection.

Coupons, par exemple, les deux plans PP_1RR_1 (fig. 58, pl. 5) par le plan $S\gamma S_1$, qui est perpendiculaire au plan vertical.

On en déduit le point mm', par lequel il faut mener une parallèle à la ligne de terre.

119. — Exemple V.— *Intersection de deux plans parallèles à la ligne de terre et déterminés par deux droites dans le même plan de profil.*

Commençons par construire deux droites de chaque plan, par exemple des parallèles à la ligne de terre menées par les quatre points *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'* (fig. 59, pl. 5), puis coupons les deux plans donnés par un troisième perpendiculaire au plan vertical P_1. Les deux droites ainsi obtenues $\alpha\beta\alpha'\beta'$, $\gamma\delta\gamma'\delta'$ se rencontrent en $\mu\mu'$ qui est un point de l'intersection. Il ne reste plus qu'à mener par ce point une parallèle à la ligne de terre.

120. — Remarque. — Le point de rencontre de l'intersection des deux plans avec la ligne de rappel *a* donne en *mm'* le point de rencontre des deux droites *aba'b'*, *cdc'd'*.

121. — **Exemple VI.** — ***Intersection de deux plans ayant chacun d'eux ses traces confondues, ces plans coupant la ligne de terre au même point.***

Soit les deux plans $P\alpha P_1$, $R\alpha R_1$ (fig. 60, pl. 5), $\alpha\alpha'$ est un premier point de l'intersection. Pour en trouver un deuxième, coupons les deux plans donnés par le plan horizontal H_1, les deux horizontales ainsi déterminées se rencontrent en *mm'* ; donc $m\alpha m'\alpha'$ est l'intersection demandée. Les deux triangles mvv_1, $\alpha'v'v'_1$ sont égaux comme ayant un côté égal $vv_1 = v'v'_1$ adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Donc *mv* est égal $\alpha'v'$, par suite $m\alpha'$ est parallèle à *vv'*. En résumé, la ligne de rappel du point *m* passe par α, et alors $\alpha m\alpha'm'$ est dans un plan de profil. D'un autre côté, les deux longueurs αm, $\alpha'm'$ sont égales entre elles, puisqu'elles sont égales toutes deux à *vv'*; donc $\alpha m\alpha'm'$ est l'intersection du plan de profil avec le premier plan bissecteur. Cette droite est alors perpendiculaire au deuxième plan bissecteur, d'où il résulte, comme nous le savions déjà (87), que les deux plans $P\alpha P_1$, $R\alpha R_1$ sont perpendiculaires tous deux au deuxième plan bissecteur.

122. — **Exemple VII.** — ***Intersection de deux plans dont les traces de noms contraires coïncident.***

Soit les deux plans $P\alpha P_1$, $R\alpha R_1$ (fig. 61, pl. 5); $\alpha\alpha'$ est toujours un premier point de l'intersection. Pour en trouver un deuxième, coupons les deux plans donnés par le plan horizontal H_1. On obtient ainsi le point *mm'* dont les deux projections coïncident.

Cette propriété tient à l'égalité des deux triangles $mvv'\alpha'v'v'_1$.

Donc l'intersection des deux plans $m\alpha m'\alpha'$ est dans le deuxième

plan bissecteur. On aurait pu prévoir ce résultat de la manière suivante : La trace horizontale P coïncidant avec la trace verticale R_1, ces deux droites sont symétriques par rapport au deuxième plan bissecteur. Il en est de même pour la trace horizontale R et pour la trace verticale P_1. Donc les deux plans sont symétriques par rapport au deuxième plan bissecteur, et par suite, leur intersection est contenue dans ce deuxième plan bissecteur.

123. — Exemple VIII. — *Intersection de deux plans dont les traces ne se coupent pas dans les limites de l'épure.*

Au lieu d'employer comme plans auxiliaires les plans de projection, on prendra ici des plans parallèles aux plans de projection, par exemple le plan horizontal le plus haut ou le plus bas dans les limites de l'épure et le plan de front le plus en avant ou le plus en arrière dans les limites de l'épure.

On peut encore chercher la direction de l'intersection, en remplaçant les deux plans donnés par deux plans parallèles dont les traces se coupent dans les limites de l'épure, puis on déterminera un point de l'intersection, et par ce point on mènera une parallèle à la direction trouvée.

124. — Problème I. — *Mener par un point une droite s'appuyant sur deux droites données.*

Par le point et les deux droites, on fait passer deux plans dont l'intersection est la droite demandée. Pour trouver cette intersection, il suffit d'en chercher un point, puisqu'on connait déjà le point donné.

125. — Problème II. — *Mener une parallèle à une droite donnée s'appuyant sur deux droites données.*

Par les deux droites, on mènera deux plans parallèles à la direction donnée, leur intersection sera la droite demandée. Ici encore, il suffit de chercher un seul point de la droite inconnue, puisqu'on en connait la direction.

IV. — POINT COMMUN A TROIS PLANS.

126. — *Soit à trouver le point commun aux trois plans* $P\alpha P_1$, $R\beta R_1$, $S\gamma S_1$ (fig. 62, pl. 5).

Pour résoudre cette question, il suffit de déterminer les intersections de ces plans deux à deux. Soit, par exemple, *aba'b'*, *cdc'd'*, *efe'f'* ces intersections ; comme vérification, ces trois droites se rencontrent au même point *mm'* qui est le point demandé.

127. — Ponctuation I. — Proposons-nous de *représenter* dans cette épure, *le système des trois plans donnés et des deux plans de projection, ces plans étant supposés tous opaques.*

Occupons-nous d'abord de la projection horizontale. La verticale α rencontre les deux plans $S\gamma S_1$, $R\beta R_1$ au-dessus du point $\alpha\alpha'$ du plan $P\alpha P_1$. Donc le point α du plan $P\alpha P_1$ est caché simultanément par les deux plans R et S. Si alors nous marchons sur αP dans le sens αP, en arrivant en *e*, on traverse le plan γ ; et par suite la droite αP redevient vue par rapport à γ, mais elle reste cachée par le plan β. Il en est ainsi jusqu'en α qui est le point de rencontre de $P\alpha$ avec le plan β. Donc aP jusque l'infini à droite est vue.

De même, le point β du plan $R\beta R_1$ est caché par les deux plans α et γ. En marchant dans le sens βR, nous arrivons en *cc'* dans le plan γ, et alors la droite n'est plus cachée que par le plan α, ceci ayant lieu d'ailleurs jusqu'en *a*.

Passons maintenant à la trace $S\gamma$. Le point γ est caché par le plan α. A partir de *c*, la droite $S\gamma$ est cachée par les deux plans α, β jusqu'en *e*, et à partir de ce point, la droite $S\gamma$ n'est plus cachée que par le plan β.

Voyons ensuite les intersections des plans deux à deux. En ne s'occupant que du système des trois plans, on n'a qu'à établir la ponctuation de l'intersection des deux plans par rapport à un troisième ; il faudra après cela tenir compte du plan horizontal.

Prenons d'abord la droite *aba'b'*, *mm'* est la limite de la ponctuation de cette droite par rapport au plan γ, d'ailleurs nous avons reconnu que le point *aa'* était vu, donc toute la région *am* est vue en projection horizontale. A gauche de *a*, la droite *ab* est cachée par le plan horizontal, et à droite de *m*, elle est cachée par le plan γ.

De même, le point *cc'* étant caché, la droite *cd* est vue en projection horizontale à gauche de *m* jusque l'infini. Enfin, le point *e* étant caché, la droite *ef* est vue en projection horizontale

à droite de *m* jusque l'infini. On pourrait d'ailleurs vérifier directement à l'aide des verticales *d* et *f* que les deux points *dd'* et *ff'* sont vus.

Un raisonnement identique au précédent donnera la ponctuation de la projection verticale.

128. — Ponctuation II. — Proposons-nous cette fois de *représenter le trièdre formé par les trois plans* $\alpha\beta\gamma$, *ce trièdre devant contenir la portion* $\alpha\beta$ *de la ligne de terre* (fig. 63, pl. 5).

Nous aurons ici, outre la distinction des parties vues et cachées, à faire la distinction des parties existantes et des parties enlevées, car le trièdre n'est formé que par des portions parfaitement déterminées des plans donnés.

Puisque $\alpha\beta$ est la portion de la ligne de terre à l'intérieur du trièdre que nous voulons représenter, c'est que α et β sont les points de rencontre de la ligne de terre avec des faces utiles du trièdre. Autrement dit, les points α et β des deux plans P et R sont conservés. Il en est de même de toutes les régions voisines des mêmes plans jusqu'aux arêtes du trièdre.

Ainsi αP est conservé dans le sens αe jusqu'en *e*, puisque l'arête *ef* est dans le plan α, et dans l'autre sens jusque l'infini, puisque nous ne rencontrons plus dans ce sens la deuxième arête *ab* du même plan α, le reste est enlevé et se marque en trait mixte. De même la région bfP_1 jusque l'infini est enlevée, et se marque en trait mixte. L'arête *ef* est donc conservée jusque l'infini à gauche de *m*, tandis que l'arête *ab* est conservée jusqu'à l'infini α à droite de *m*.

Passons maintenant au plan β. Nous savons d'abord que le point β est conservé, par suite $c\beta$ jusque l'infini à droite est conservée, et il en est de même pour $b\beta$ jusque l'infini à droite.

Il résulte de là que la portion de l'arête *cd* à droite de *m* est conservée, et que la partie conservée du plan γ est contenue dans l'angle *emc*. Ainsi donc *ec* sera conservée, tandis que γS_1 est tout entière enlevée.

Nous avons donc à représenter le système des trois angles *emb*, *cmb*, *emc*.

La verticale *x* rencontre maintenant les deux plans $\beta\gamma$ dans des régions enlevées, donc le point α est vu en projection horizontale, et il en est de même de toutes les lignes du plan α dans le voisinage du point α; ainsi $e\alpha$ est vue.

Le sommet du trièdre étant vu, il en sera de même pour l'arête *me*, du point *m* jusqu'à la trace horizontale. Au delà de *e*, cette arête est cachée.

La trace horizontale $c\beta$ est également vue, puisque les régions des plans α et γ au-dessus de β sont enlevées. Il en résulte que l'arête *mc* est vue jusqu'au plan horizontal.

La trace horizontale *ce* du plan γ est encore vue, puisque les régions des plans α et β qui se trouvent au-dessus sont enlevées.

Enfin l'arête *mb* est vue, puisque les portions conservées des deux plans α et β sont vues.

On procédera de la même manière pour établir la ponctuation en projection verticale.

PONCTUATION D'UN SYSTÈME DE PLANS.

128$_a$. — Pour établir la ponctuation d'un système de surfaces P, Q, R, S, etc. en projection horizontale, il est nécessaire de les couper par une série de verticales. Soit *p*, *q*, *r*, *s*... les points de rencontre d'une verticale quelconque A avec toutes les surfaces. Soit de plus *pqrs*, l'ordre dans lequel on rencontre ces différents points, en descendant sur la verticale A. Cela veut dire que le point *p* de la surface P est vu, tandis que tous les autres sont cachés.

Nous établirons comme principe que si la verticale A se déplace, de façon à venir occuper la position B, après avoir traversé la ligne (PQ), intersection des deux surfaces P et Q, il se produit une inversion dans l'ordre des lettres *p* et *q*; c'est-à-dire que sur la verticale B, l'ordre des points est maintenant *qprs*.

128$_b$. — Remarque I. — Une inversion ne peut se produire que sur deux lettres consécutives. Les lettres *pqrs* peuvent en effet être considérées comme les cotes des différents points. Autrement dit, ce sont des nombres rangés dans leur ordre de grandeur. Au moment où il se produit une inversion, deux nombres de cette suite deviennent égaux; ce sont, par conséquent, deux nombres consécutifs.

128$_c$. — Remarque II. — Lorsque l'inversion se produit sur les deux premières lettres, la ligne traversée est vue; dans tous les autres cas, elle est cachée.

128d. — THÉORÈME. — *En représentant le système de trois surfaces, soit* m *un point commun à ces trois surfaces, le point* m *étant vu, simple, et n'appartenant à aucun contour apparent, les intersections des trois surfaces deux à deux passent par le point* m, *et forment six rayons alternativement, vus et cachés.*

Dessinons autour du point *m* un contour suffisamment petit pour être sûr que chaque surface n'admet pas de contour apparent à l'intérieur de ce contour, et considérons seulement les régions de chaque surface à l'intérieur de ce contour, et voisines du point *m* dans l'espace. Il en résulte que chaque surface ne sera coupée par une verticale qu'en un point.

Soit, par exemple, *pqr* l'ordre des points sur la verticale A, que nous allons faire marcher tout le long du contour (fig. 185, pl. 17). Pour arriver en B, la verticale a traversé un rayon que nous pouvons supposer vu, puisque le point *m* est vu lui-même. Il se produit alors une inversion sur les deux premières lettres, ce qui prouve : 1° que la ligne traversée est l'intersection des deux surfaces P et Q; 2° que sur la verticale B l'ordre des points est *qpr*.

Pour arriver en C, nous traversons un nouveau rayon. Il va se produire une nouvelle inversion entre deux lettres consécutives. L'inversion possible aura donc lieu entre *q* et *p*, ou bien entre *p* et *r*. Mais, s'il se produisait une nouvelle inversion entre *q et p*, c'est que la ligne traversée serait encore l'intersection des deux surface Q et P. Cela est impossible, puisque le point *m* est un point simple, et qu'il n'existe par suite qu'un seul arc d'intersection de deux surfaces passant par le point *m*. La seule inversion possible aura donc lieu entre *p* et *r*.

Ce raisonnement nous montre : 1° que le nouveau rayon est l'intersection des deux surfaces P et R; 2° que ce rayon est caché; 3° que sur la verticale C, l'ordre des points est *qrp*.

La démonstration du théorème est maintenant complètement terminée, car nous reconnaissons qu'après une inversion entre les deux premières lettres, vient une inversion entre les deux dernières, et inversement. Autrement dit, après un rayon vu vient un rayon caché, et réciproquement, après un rayon caché, on rencontre un rayon vu.

Continuons de vérifier le théorème sur la figure 185, planche 17.

Le troisième rayon rencontré est nécessairement l'intersec-

tion des deux surfaces Q et R; il va se produire une inversion entre les deux lettres q et r.

Comme ces deux lettres sont les premières, la ligne traversée est vue, de plus en D l'ordre des points est rqp.

Les nouveaux rayons sont maintenant connus, et, par suite, l'ordre des points sur les verticales E, F est aussi déterminé.

On a donc successivement sur E l'ordre rpq et prq sur F, ce qui prouve qu'entre D et E l'arc (PQ) est caché, puis qu'entre E et F l'arc (PR) est vu, enfin, qu'entre F et A l'arc (QR) est caché.

Comme application de ce théorème, nous citerons la ponctuation d'un nombre quelconque de plans, en supposant que ces plans ne passent pas plus que trois par trois par un même point, le théorème supposant au maximun trois surfaces passant par un même point.

Pour établir, par exemple, la ponctuation d'une projection horizontale, on considère les traces verticales de tous les plans; elles se coupent en un certain nombre de points. Parmi tous ces points, on peut toujours en trouver au moins un aa', qui est vu en projection horizontale. Nous dirons alors : par le point a passe une intersection de deux plans qui est assurément vue en projection horizontale. On dessinera donc cette ligne en trait plein jusqu'à un premier point commun à trois plans. En ce point, nous appliquerons le théorème, ce qui nous donnera deux nouveaux rayons vus. On continuera de se déplacer sur ces nouveaux rayons jusqu'à de nouveaux points communs, et on procédera de la même manière jusqu'au moment où en se déplaçant toujours par rayonnement sur des traits pleins, on ne rencontrera plus de points communs à trois plans. A ce moment, on peut dire que toutes les intersections restantes sont cachées.

128$_c$. — Exemple I. — *Représenter le système des deux plans* $P\alpha P_1$, $R\beta R_1$, *opaques, illimités, les plans de projection étant eux-mêmes opaques et illimités* (fig. 186, pl. 17).

Les intersections des plans deux à deux sont : 1° $hvh'v'$, intersection des plans P et R.

2° $P\alpha$, intersection du plan P et du plan horizontal;

3° $R\beta$, intersection du plan R et du plan horizontal;

4° $P_1\alpha$, intersection du plan P et du plan vertical, enfin;

5° $R_1\beta$, intersection du plan R et du plan vertical.

Pour établir la ponctuation de la projection horizontale, nous considérons les traces verticales de tous les plans, ce sont les droites $P_1\alpha$, $R_1\beta$, xy. Elles se coupent aux points vv', $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$. Parmi ces trois points, vv' est vu en projection horizontale, car la verticale v ne coupe tout le système qu'en vv' et en un autre point sur la ligne de terre, au-dessous du premier.

Nous dessinons donc en trait plein la ligne qui passe par v jusque l'infini à droite, et à gauche, jusqu'au point hh'. Ce point étant commun à trois plans, nous marquons $h\beta$ caché, hP vu, le prolongement de hv à gauche caché; ensuite hR vu, et enfin $h\alpha$ caché, la ponctuation est alors complète en projection horizontale.

Pour la projection verticale, le point hh' est assurément vu, donc $h'v'$ est vu depuis l'infini à gauche jusque v'. Ensuite $v'\beta'$ est caché, $v'P_1$ est vu, puis $h'v'$ est caché à droite de v'. Le rayon suivant, $v'P_1$ est vu, enfin $v'\alpha$ est caché.

Il reste à marquer la ligne de terre en trait plein, parce qu'elle représente les plans de projection vus par la tranche.

Exemple II. — *Représenter le système des trois plans* $P\alpha P_1$, $R\beta R_1$, $S\gamma S_1$, *opaques, illimités, les plans de projection étant eux-mêmes opaques et illimités* (fig. 187, pl. 18).

Les différentes intersections des plans deux à deux sont figurées dans le tableau suivant :

PR	$aba'b'$	PH	$P\alpha$	RV	$R_1\beta$
RS	$cdc'd'$	PV	$P_1\alpha$	SH	$S\gamma$
SP	$efe'f'$	RH	$R\beta$	SV	$S_1\gamma$

Les traces verticales des plans se coupent en bb', dd', ff', $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Parmi tous ces points, le point dd', par exemple, est vu en projection horizontale. Donc dc est vue depuis l'infini à gauche jusqu'au point m, qui est le point commun aux trois plans PRS. Il en résulte que mb est caché jusque l'infini à droite, puis que mf est vue. Le rayon suivant, mc, est caché jusque l'infini. Nous rencontrons ensuite le rayon vu ma, et nous arrivous enfin au rayon caché me.

Marchons maintenant sur le trait plein ma, et arrêtons-nous en ce point a, qui est encore un point commun à trois plans, P, R et H. Les rayons vus sont : am, aP, aR, les trois autres rayons étant cachés.

En continuant de se déplacer sur les traits pleins *md*, *mf* *a*P, *a*R, on ne rencontre plus de points communs à trois plans donc toutes les autres lignes sont cachées, c'est ce qui a lieu pour la droite Sγ, qui est cachée tout entière.

Passons maintenant à la ponctuation de la projection verticale. Les traces horizontales des plans se coupent en aa', cc', ee', $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Parmi tous ces points, le point aa' est assurément vu en projection verticale. La droite $a'b'$ est donc vue depuis l'infini à droite jusqu'en mm'. Le théorème nous donne comme rayons vus, $m'f'$, $m'd'$, les trois autres, $m'c'$, $m'b'$, $m'e'$ étant cachés jusque l'infini.

Déplaçons-nous sur le trait plein $m'd'$ jusqu'au point dd', qui est commun aux trois plans R, S, V, on en déduit les rayons vus $d'm'$, $d'f'$, $d'R_1$, les trois autres étant cachés jusque l'infini.

Revenons enfin au point f', soit par $d'f'$, soit par $m'f'$, et appliquons une dernière fois le théorème en ce point qui est commun aux trois plans P S V. Nous trouvons ainsi, comme dernier trait plein, le rayon $f'P_1$.

Cette façon d'envisager la ponctuation d'un système de surfaces nous permet de reconnaître très rapidement le nom de la surface que l'on voit en un point quelconque, après avoir mené une seule verticale.

Soit, par exemple, la verticale A, choisie arbitrairement dans le plan vertical. Ses points de rencontre avec tous les plans se trouvent sur leurs traces verticales; il en résulte que l'ordre des points, sur cette verticale particulière, est *pshr*.

Pour passer de la région A à la région B, on traverse la ligne Rβ, intersection du plan $R\beta R_1$, et du plan horizontal, il se produira donc une inversion entre *h* et *r*, de telle sorte que sur la verticale B, l'ordre des points est *psrh*, ce qui prouve que la ligne traversée est cachée.

Le même raisonnement s'appliquera pour toutes les autres régions.

A	*pshr*	E	*rsph*	I	*rphs*	M	*phrs*
B	*psrh*	F	*rshp*	J	*rpsh*	N	*phsr*
C	*sprh*	G	*rhsp*	K	*prsh*	O	*hprs*
D	*srph*	H	*rhps*	L	*prhs*	Q	*hrps*

Les différents traits pleins dessinés forment un certain nombre de contours, à l'intérieur desquels on voit successivement les différents plans.

Ainsi, d'après le tableau précédent, le plan P se voit dans l'intérieur du contour P*amf;* puis le plan R se voit dans le contour R*amd;* ensuite le plan S est vu dans l'angle *dmf*. Enfin, on voit le plan horizontal dans l'angle P*a*R.

Dans la figure 188, planche 18, on a indiqué ces résultats en remplissant chaque région avec des horizontales en projection horizontale, et des lignes de front en projection verticale, du plan vu dans cette même région.

La même marche s'applique évidemment à un nombre quelconque de plans, mais il faut avoir soin de ne jamais suivre que des traits pleins, le théorème n'étant pas toujours applicable évidemment à un point commun à trois plans, lorsqu'on y arrive par une ligne cachée.

V. — EXERCICES.

1. Étant donné six points de l'espace, construire un tétraèdre dont les arêtes passent respectivement par ces six points. Compter le nombre des solutions.

2. Étant donné quatre points, mener respectivement par ces quatre points quatre plans parallèles entre eux et équidistants, ou dont les distances soient entre elles dans des rapports donnés. Nombre des solutions.

3. Représenter une droite, un plan, une droite et un plan, ou un système de plan dans l'hypothèse suivante. Le plan horizontal est la limite du sol dont la profondeur au-dessous du plan horizontal est infinie. Le plan vertical est la limite d'un mur dont l'épaisseur derrière le plan vertical est infinie. Le sol, le mur, la droite et les plans étant de même substance. Ou encore la droite et les plans étant de substance différente de celle du mur et du sol.

4. Employer comme plans auxiliaires, pour trouver l'intersection de deux plans, les deux plans bissecteurs des dièdres formés par les plans de projection.

LIVRE III

INTERSECTION DE DEUX POLYÈDRES

CHAPITRE PREMIER

I. — DÉFINITIONS.

129. — *Un polyèdre est un solide limité par des plans.*

La portion de chacun de ces plans qui convient pour le polyèdre s'appelle une face du polyèdre. Cette face est limitée à un contour polygonal dont les côtés sont les intersections de la face considérée avec toutes les faces adjacentes, enfin ces différents côtés sont les arêtes du polyèdre.

La surface d'un polyèdre est l'ensemble des surfaces de toutes les faces du polyèdre ; nous appellerons *intersection de deux polyèdres,* la ligne commune aux surfaces des deux polyèdres.

L'intersection de deux polyèdres sera donc un polygone gauche, dont les côtés sont donnés par les intersections des faces du premier polyèdre avec les faces du second, et dont les sommets sont les points de rencontre des arêtes de l'un des polyèdres avec les faces de l'autre.

Il résulte de là deux méthodes pour trouver l'intersection de deux polyèdres ; dans la première on cherche les côtés du polygone, dans la deuxième on détermine directement les sommets.

Nous emploierons la première méthode dans le cas général de l'intersection de deux polyèdres quelconques, et la deuxième dans le cas particulier des prismes et des pyramides.

130. — Remarque I. — *Tout mobile assujéti à rester constamment sur la surface d'un polyèdre, et se trouvant à un mo-*

ment donné à l'intérieur d'une face, reste encore un certain temps dans la même face.

131. — Remarque II. — ***Tout mobile assujéti à rester constamment sur la surface d'un polyèdre, et se trouvant à un moment donné sur une arête du polyèdre, peut se déplacer arbitrairement dans l'une ou l'autre des deux faces qui se coupent suivant l'arête considérée.***

II. — INTERSECTION D'UNE PYRAMIDE ET D'UN PRISME.

Exemple particulier. — Avant d'expliquer d'une manière générale la marche à suivre pour trouver l'intersection de deux polyèdres, nous allons étudier un exemple simple.

132. — *Soit à trouver l'intersection de la pyramide* Sabc, S'a'b'c' *et du prisme* $defd_1e_1f_1$, $d'e'f'd'_1e'_1f'_1$ (fig. 64, pl. 6).

Choisissons la face S*ab*, S'*a'b'* de la pyramide et la face $df d_1f_1$, $d'f' d'_1f'_1$ du prisme, puis cherchons l'intersection de ces deux plans.

En les coupant par le plan horizontal, nous trouvons *aba'b'* et *dfd'f'* qui se coupent en $\alpha\alpha'$. Coupons ensuite les deux mêmes faces par un deuxième plan auxiliaire, par exemple par le plan horizontal d'_1. Ce plan auxiliaire coupe la face S*ab* suivant une parallèle à *ab* menée par le point S, et la face dfd_1f_1 suivant $d_1f_1d'_1f'_1$. Nous obtenons donc en $\alpha_1\alpha'_1$ un deuxième point de l'intersection. Donc $\alpha\alpha_1$, $\alpha'\alpha'_1$ est l'intersection des deux plans considérés. La partie de cette droite $\alpha\alpha_1$ contenue à l'intérieur des deux faces S*ab*, dfd_1f_1 se réduit à *mn*. En effet, en marchant dans le sens *mn*, arrivé en *n*, on sort de la face dfd_1f_1, tandis qu'en marchant dans le sens *nm*, arrivé en *m*, on sort de la face S*ab*.

Proposons-nous de parcourir le polygone dans le sens *mn*. Le point *n* étant à l'intérieur de la face S*ab* et sur le contour de la face dfd_1f_1 conservons la face S*ab*, et remplaçons la face du prisme par la face adjacente ded_1e_1.

Le point *n* est déjà un point de l'intersection des deux nouvelles faces, puisque c'est le point de rencontre de l'arête *dd* de la face ded_1e_1 avec la face S*ab*. Il suffit donc de trouver un

deuxième point de cette intersection. Nous l'avons obtenu dans l'épure, en coupant les deux faces considérées par le plan horizontal, ce qui donne *ab* et *de* et par suite le point $\beta\beta'$. Donc $\beta n\beta' n'$ est l'intersection des deux faces S*ab*, ded_1e_1. La partie utile de cette droite se réduit à *non'o'*.

Le point *oo'* est ici à l'intérieur de la face ded_1e_1, et sur le contour de la face S*ab*, nous conservons alors la face ded_1e_1 du prisme, pour remplacer la face S*ab* de la pyramide par la face adjacente S*bc*.

Comme précédemment, nous connaissons un point *oo'* de l'intersection des deux nouvelles faces ; pour en trouver un deuxième, nous avons coupé les deux faces par le plan horizontal d'_1, qui nous donne le point $\gamma_1\gamma'_1$. Donc $o\gamma_1o'\gamma'_1$ est l'intersection des deux nouvelles faces. Nous n'avons pas pris ici comme plan auxiliaire le plan horizontal de projection, parce qu'il donnait un point γ en dehors des limites de l'épure.

La partie utile de cette intersection est *opo'p'*. Nous constatons alors que le côté suivant est donné par les deux faces S*bc*, S'*b'c'*, dfd_1f_1, $d'f'd'_1f'_1$. Nous connaissons deux points de cette intersection : 1° le point *pp'* qui est l'intersection de l'arête dd_1 avec la face S*bc* ; 2° le point *mm'* qui est l'intersection de l'arête S*b*S'*b'* avec la face dfd_1f_1, $d'f'd'_1f'_1$. Donc *pmp'm'* est le dernier côté du polygone.

En résumé, *mnopm*, *m'n'o'p'm'* est le polygone d'intersection.

Dans l'épure, nous avons *représenté uniquement le polygone d'intersection*. Il est donc vu tout entier dans les deux projections, puisque tous les sommets sont contenus dans le premier dièdre. Quant aux arêtes des polyèdres, elles sont marquées en trait mixte, puisqu'elles ne font pas partie de l'objet qu'on représente.

Généralisons maintenant ces constructions, et appliquons-les à deux polyèdres quelconques déterminés par les projections de tous leurs sommets.

III. — CAS GÉNÉRAL.

133. — *Pour trouver l'intersection de deux polyèdres*, nous commencerons par former le tableau de toutes les combinaisons des faces du premier polyèdre avec les faces du second. Pour

cela, écrivons sur une ligne horizontale les noms des faces du premier polyèdre, et sur une ligne verticale les noms de toutes les faces du deuxième polyèdre. Le carré commun à une colonne verticale et à une bande horizontale figure l'une quelconque des combinaisons.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
α	*mn*					
β					×	
γ		×		×		
δ					×	

Nous éliminerons ensuite de ce tableau toutes les combinaisons que l'on peut reconnaître inutiles sans le secours d'aucune construction. Une combinaison ne peut être utile, que si une partie de l'intersection des deux faces se trouve simultanément dans ces deux faces.

Il faut donc :

1° Que les deux faces présentent une partie commune en projection horizontale ;

2° Que les deux mêmes faces présentent une partie commune en projection verticale ;

3° Enfin, en supposant même l'existence des deux parties communes en projection horizontale et en projection verticale, il faut en outre que ces deux parties communes se correspondent par des lignes de rappel.

Ces trois conditions sont nécessaires pour que la combinaison puisse être utile, mais assurément elles ne sont pas suffisantes.

Soit donc *ax* l'une quelconque des combinaisons qui restent dans le tableau après avoir éliminé toutes les combinaisons reconnues inutiles.

Nous chercherons l'intersection de ces deux faces, en les considérant comme des plans illimités, déterminés chacun par les arêtes qui limitent ces faces ; ces arêtes étant à leur tour considérées comme des droites illimitées.

Nous voici donc ramenés au problème connu de l'intersection de deux plans déterminés chacun par deux droites.

Soit I (fig. 65, pl. 6) la droite d'intersection des deux plans *a* et *α*. La portion de I qui fait partie du polygone d'intersection, c'est la portion *mn* contenue simultanément à l'intérieur des deux faces *a* et *α*.

Il est bien évident que pour trouver cette partie utile *mn*, on peut regarder soit la projection horizontale, soit la projection verticale, car en appelant *m'n'* la partie utile en projection verticale, *mm'* et *nn'* sont nécessairement des lignes de rappel.

Ainsi *mn*, *m'n'* est un premier côté du polygone d'intersection; les deux points *mm'*, *nn'* sont deux sommets consécutifs du polygone d'intersection. Nous inscrirons *mn* dans la division correspondante du tableau.

Si la droite I n'avait pas présenté de partie utile, nous aurions supprimé la combinaison *aα* du tableau pour en essayer une autre quelconque, et l'on continuerait de même, jusqu'au moment où l'on trouverait une partie utile.

Proposons-nous maintenant de trouver le deuxième côté du polygone d'intersection. Dire deuxième côté suppose évidemment qu'un mobile parcourt le polygone d'intersection dans un sens déterminé, et rencontre successivement tous les côtés dans un certain ordre.

Supposons donc ici, qu'un mobile se déplace sur le polygone dans le sens *mn*, en partant du point *m*. Ce mobile décrivant le polygone d'intersection est assujetti à rester constamment sur les surfaces des deux polyèdres.

Arrivé en *n*, le mobile se trouve à l'intérieur de la face *α*, il est donc obligé d'y rester encore un certain temps, autrement dit le deuxième côté du polygone est contenu dans le plan *α*. D'ailleurs, nous arrivons en *n* sur le contour de la face *a*, donc par rapport au premier polyèdre, le mobile peut passer arbitrairement dans l'une ou l'autre des deux faces qui se coupent suivant l'arête AB. Soit *b* la face adjacente à *a*, et ayant pour arête commune avec *a* l'arête AB sur laquelle se trouve le point *n*.

Nous avons donc actuellement deux combinaisons possibles *aα*, *bα*. Or *aα* est précisément la dernière combinaison employée; donc le deuxième côté du polygone d'intersection est nécessairement donné par la combinaison *bα*.

Nous déterminerons alors l'intersection des deux plans *b*, *α*, soit en les coupant par deux plans auxiliaires, soit en les coupant par un seul plan auxiliaire, parce que l'intersection des deux plans *bα* doit nécessairement passer par le point *n*. Nous limiterons ensuite cette droite comme nous avons limité I. Le point *n* sera d'ailleurs l'une des limites de ce deuxième côté. Puis nous déduirons de cette opération la combinaison qui donne le troisième côté, et nous continuerons ainsi jusqu'au moment où nous reviendrons au point de départ.

On reconnaîtra que l'on arrive au point de départ, lorsque la combinaison nouvelle sera formée : 1° de la face *a*, 2° de la face adjacente à *α*, et ayant pour arête commune avec *α* l'arête sur laquelle se trouve le premier sommet *m*.

Arrivé à cette dernière combinaison, il se présentera deux vérifications, puisque le dernier côté doit passer à la fois par le dernier sommet trouvé et par le premier sommet *m*.

Ainsi pour les côtés intermédiaires, on peut se contenter d'une seule opération, et pour le dernier côté on peut rigoureusement se passer de toute espèce de construction.

Malgré cela, on fera bien de temps en temps de déterminer deux points d'un ou plusieurs côtés, de manière à compenser les erreurs commises en ne vérifiant pas séparément tous les côtés.

Nous venons ainsi de former un premier polygone d'intersection et dont tous les côtés sont inscrits dans le tableau. On vérifiera alors s'il ne reste pas dans le tableau quelques combinaisons non employées. S'il reste des combinaisons, on essaiera l'une quelconque d'entre elles, et l'on pourra former de cette manière un, deux ou plusieurs polygones d'intersection.

Dans tous les cas, on devra continuer les essais jusqu'à épuisement complet de toutes les combinaisons du tableau.

134. — Remarque I. — Nous avons dit, en formant le premier polygone, que l'on continuait les opérations jusqu'au moment où l'on revenait au point de départ, parce que, en général, il en est ainsi. En effet, les polyèdres pris séparément n'ayant qu'un nombre limité de faces p et p_1, il n'y a en tout que $p \times p_1$ combinaisons possibles.

Cependant le polygone peut ne pas se fermer quand les deux polyèdres admettent une face commune, ou bien quand les deux

polyèdres s'étendent à l'infini, auquel cas on peut encore dire qu'ils ont une face commune à l'infini. Il arrive alors que le polygone d'intersection reste ouvert, et se termine à la face commune.

Plaçons-nous dans cette hypothèse d'une face commune ; nous partirons comme précédemment d'une combinaison quelconque $a\alpha$, puis nous continuerons jusqu'au moment où nous arriverons à ces deux faces communes, et alors le polygone s'arrêtera.

Pour trouver le reste du polygone, nous reviendrons au point de départ et nous marcherons dans le sens nm pour arriver encore une fois dans ce nouveau sens aux deux mêmes faces communes.

Si par hasard on retombait sur deux autres faces communes, c'est qu'il y aurait un deuxième polygone non fermé.

135. — Remarque II. — Pour définir la combinaison qui donne le deuxième côté, nous nous sommes appuyés sur ce fait que le point n était à l'intérieur de la face α et sur le contour de la face a. Supposons comme cas particulier (fig. 67, pl. 6) que le point n se trouve à la fois sur les contours des deux faces. Nous avons alors comme combinaisons possibles $a\alpha$, $a\beta$, $b\alpha$, $b\beta$, en appelant b et β les faces adjacentes à a et α passant par n. Le point n est alors un sommet commun à deux polygones d'intersection, en supposant que les quatre combinaisons donnent lieu à quatre combinaisons utiles.

Il faudra donc essayer l'une de ces combinaisons, fermer s'il y a lieu le polygone correspondant et revenir à l'une des deux combinaisons non employées en n.

On peut énoncer ce cas en disant que deux arêtes se rencontrent. Il contient celui de la remarque précédente, puisqu'il suffit pour cela de supposer que les deux faces b et β coïncident.

136. — Remarque III. — Lorsque les deux polyèdres ont un sommet commun, le nombre des côtés aboutissant à ce sommet peut s'élever à $p \times p_1$, p et p_1 étant le nombre des faces des deux angles polyèdres qui ont même sommet.

137. — Remarque IV. — Dans la recherche d'un polygone d'intersection, il faudra profiter de toutes les faces perpendiculaires à l'un ou l'autre des plans de projection, et ne pas oublier qu'il est inutile d'employer des plans auxiliaires pour toutes les combinaisons dans lesquelles entrent ces faces particulières.

Il sera même avantageux quelquefois, d'employer ces mêmes

faces pour plans auxiliaires dans des combinaisons contenant des faces adjacentes.

On simplifiera généralement les constructions, quand les particularités précédentes ne se présentent pas, en employant deux plans auxiliaires parallèles entre eux, et autant que possible les mêmes plans auxiliaires pour toutes les combinaisons. En effet, si les plans auxiliaires sont parallèles entre eux, leurs intersections avec une même face sont parallèles entre elles ; donc, si pourdéterminer la première il faut en chercher deux points, pour déterminer la deuxième, il suffira d'en chercher un seul point.

D'un autre côté, si l'on conserve toujours les deux mêmes plans auxiliaires pour toutes les combinaisons, l'opération faite pour la face a dans la combinaison $a\alpha$ sera toute faite pour la même face a dans la combinaison $a\beta$.

137_a. — Remarque V. — La partie utile de l'intersection de deux faces n'est pas toujours comprise entre les sommets qui limitent cette droite, sauf lorsqu'on a des polyèdres convexes. Ainsi (fig. 189, pl. 18), soit asb $a'sb'$, $a_1s_1b_1$ $a'_1s_1b'_1$, les faces de deux pyramides illimitées. Pour mettre en évidence les parties utiles de ces deux faces, nous avons rempli l'intérieur de chacune d'elles avec des hachures parallèles. Soit de plus I l'intersection de ces deux faces, la partie utile de cette droite va de m jusque l'infini à gauche, pour reprendre de l'infini à droite jusque n.

La partie utile pourrait aussi se composer de plusieurs segments distincts, c'est ce qui a lieu dans la figure 190, planche 18, où la partie utile se compose de deux segments mn, $\mu\nu$.

Lorsque ce fait se présente, on continue de déterminer le premier polygone, en marchant de m vers n, où on détermine le côté suivant ; puis, lorsque ce premier polygone est fermé, on reprend $\mu\nu$ comme origine d'un nouveau polygone, à moins qu'on ait eu l'occasion de rencontrer cette droite $\mu\nu$ en continuant le premier polygone, même en passant par l'infini, comme cela s'est présenté dans l'exemple précédent.

137_b. — Remarque VI. — Il n'est pas toujours nécessaire d'essayer toutes les combinaisons qui restent, lorsqu'on a fermé un certain nombre de polygones d'intersection, après

avoir reconnu toutefois que les deux polyèdres n'ont pas de faces dans le même plan.

Remarquons, en effet, que dans le passage d'une case à une autre dans le tableau des combinaisons des faces du premier polyèdre avec toutes les faces du second, on se déplace, soit dans une tranche horizontale, soit dans une colonne verticale.

Cela tient à ce que deux combinaisons consécutives admettent toujours une face commune. Par conséquent, la marche d'une case à une autre est analogue à la marche de la tour dans le jeu d'échecs.

Supposons donc qu'après avoir déterminé un certain nombre de polygones, en supprimant chaque fois la case correspondante du tableau, on soit arrivé au résultat indiqué dans le tableau suivant :

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
α	×	×	×	×	×	1
β	×	×	×	×	3	2
γ	×	×	×	5	4	×
δ	×	×	7	6	×	×
ε	×	9	8	×	×	×
φ	11	10	×	×	×	×

dans lequel les cases marquées d'un × ont été employées ou reconnues inutiles.

Dans ces conditions, on peut supprimer toutes les combinaisons qui restent, en supposant encore une fois qu'il n'existe pas, dans ces combinaisons, deux faces dont les plans sont confondus et pouvant donner lieu à des polygones ouverts, lesquels pourraient se réduire à un seul côté.

Partons, par exemple, de la case *αf*. Dans la tranche horizontale, il n'y a plus de case libre, et dans la colonne verticale

il n'y en a qu'une, donc la case n° 1 est inutile, puisqu'une case ne peut-être utile que s'il existe deux chemins permettant d'y arriver.

On en déduit que la case n° 2 est également inutile, et ainsi de suite des autres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

Dans le tableau que nous avons choisi, les cases inutiles sont angées en diagonale, mais elles pourraient occuper d'autres positions, l'ordre *abcdef* ou αβγδεφ étant tout à fait arbitraire.

Il faut alors, pour que ce raisonnement soit applicable, qu'il existe au maximum deux cases vides dans une colonne verticale ou dans une tranche horizontale quelconque. Il faut, de plus, qu'une colonne et une tranche particulières admettent une seule case vide.

IV. — INTERSECTION D'UN CUBE ET D'UN PRISME.

138. — *Trouver l'intersection du cube* $abcda_1b_1c_1d_1$, $a'b'c'd'a'_1b'_1c'_1d'_1$ *et du prisme hexagonal régulier* $efghkl$, $e'f'g'h'k'l'$ (fig. 66, pl. 6).

Nous ne nous occuperons pas pour le moment de la construction de ces deux polyèdres, c'est-à-dire que nous les supposerons donnés tous deux par leurs projections.

Formons d'abord le tableau de toutes les combinaisons des faces du cube et des faces du prisme, et supprimons toutes les combinaisons inutiles.

		$\pm'$	$\mp'$	$\mp'$ (−′ / +)	$\pm'$ (+′ / +)	$\pm'$ (+′ / +)	$\pm'$
		ef	*fg*	*gh*	*hk*	*kl*	*le*
+′ −	*abcd*	rr_1	pr	×	×	×	r_1p_1
+′ +	$a_1b_1c_1d_1$	×	×	$\rho_1\pi_1$	$\rho\rho_1$	$\pi\rho$	×
−′ −	$ab\ b_1a_1$	$\nu_1\mu$	$\omega_1\nu_1$	$\pi_1\omega_1$	×	×	×
−′ +	$bc\ c_1b_1$	×	op	no	mn	×	×
+′ +	$cd\ d_1c_1$	×	×	×	n_1m	o_1n_1	p_1o_1
+ −	$da\ a_1d_1$	$\mu\nu$	×	×	×	$\pi\omega$	$\nu\omega$

Partons ensuite de l'une quelconque des combinaisons qui restent, par exemple bcb_1c_1 et *hk*. Nous profiterons ici de ce que la face *hk* est horizontale; elle rencontre $cc_1c'c'_1$ en *mm'* et $b_1c_1b'_1c'_1$ en $\alpha x'$.

L'intersection des deux faces est donc $mxm'\alpha'$, sa partie utile est *mnm'n'*.

Proposons-nous de parcourir le polygone dans le sens *mn*.

Le sommet *n* étant à l'intérieur de la face bcb_1c_1, nous resterons encore dans cette face; mais le mobile *n* étant sur le contour de la face *hk*, il faut passer dans la face adjacente *hgh'g'*.

Ainsi le deuxième côté est l'intersection des deux faces bcb_1c_1 et *hg*.

Nous connaissons un premier point de cette droite, c'est le point *n*; pour en trouver un deuxième, coupons les deux faces considérées par un plan auxiliaire, par exemple le plan horizontal *g'*. Ce plan coupe les deux faces suivant $\beta\gamma$ et *g*, ce qui donne en *o* un deuxième point de l'intersection; *no* est donc cette intersection, de plus *no* en est la partie utile. La combinaison suivante est bcb_1c_1, *gf*. Pour trouver un deuxième point de l'intersection de ces deux faces, nous les couperons par exemple par le plan *a'b'c'd'* qui est perpendiculaire au plan vertical. Ce plan auxiliaire nous donne d'un côté *bcb'c'*, de l'autre $r\delta r'\delta'$ et par suite le point *pp'*. Le troisième côté du polygone d'intersection est donc *opo'p'*.

La combinaison suivante est formée des deux faces *abcd* et *fg*; l'intersection correspondante est δr, sa partie utile se réduit à *pr*.

Il faut alors choisir les deux faces *abcd* et *ef*. Ces deux faces étant perpendiculaires au plan vertical, leur intersection est également perpendiculaire au plan vertical, et sa partie utile se réduit à rr_1.

Arrivés ici, nous pouvons éviter toute espèce de construction, en profitant de ce que les deux polyèdres sont symétriques par rapport au plan de front *a*, et en même temps par rapport au centre du cube. Nous obtenons alors, comme intersection, premièrement le polygone $mnoprr_1p_1o_1n_1$, deuxièmement le polygone $\mu\nu\omega\pi\rho\rho_1\pi_1\omega_1\nu_1$.

Il reste maintenant quatre combinaisons non employées dans

le tableau, en les essayant successivement, on reconnait qu'elles ne donnent aucune partie utile.

139. — Ponctuation. — Proposons-nous, dans cet exemple, de *représenter le système des surfaces opaques des deux polyèdres*. (Nous reviendrons plus tard sur les différentes combinaisons de surfaces ou de solides que l'on peut former avec deux polyèdres.)

Il convient avant tout d'établir la ponctuation de chacun des polyèdres pris séparément.

Commençons, par exemple, par le cube. Ce polyèdre n'étant coupé par une ligne droite qu'en deux points, il a toujours son *contour apparent* vu. On appelle contour apparent d'un polyèdre le polygone formé par un certain nombre d'arêtes, et à l'intérieur duquel se trouvent les projections de toutes les autres arêtes.

Ainsi $cbb_1a_1d_1dc$ est le contour apparent horizontal du cube. Tous les points de la surface du cube se projettent horizontalement à l'intérieur du contour apparent. Toute verticale ayant son pied à l'intérieur du contour apparent horizontal coupe le cube en deux points. Si la verticale avait son pied en dehors du contour apparent elle ne couperait plus le cube. Enfin la verticale ayant son pied sur le contour apparent, elle ne rencontre le cube qu'en un seul point. C'est pour cette raison que le contour apparent est toujours vu lorsque le polyèdre comme ici n'est coupé qu'en deux points par une droite.

Il nous reste à faire la distinction des parties vues et cachées pour les arêtes à l'intérieur du contour apparent. Nous y arriverons rapidement dans cet exemple en remarquant que les deux sommets a et c_1 sont sur une même verticale, et que le sommet c_1 se trouve au-dessus de a. Donc les trois arêtes c_1b_1, c_1c, c_1d_1 sont vues en projection horizontale, tandis que les trois arêtes aboutissant au sommet a sont cachées.

En résumé, les trois faces c_1cbb_1, c_1cdd_1, $c_1b_1a_1d_1$ sont vues en projection horizontale, et les trois autres sont cachées.

Pour plus de commodité, nous avons marqué dans le tableau les faces vues avec le signe $+$ et les faces cachées avec le signe $-$.

En projection verticale, le contour apparent vertical $c'c'_1a'_1a'$ est vu. L'arête $d'd'_1$ étant en avant de l'arête $b'b'_1$ est vue en pro-

jection verticale et cache $b'b'_1$. Il n'y a donc que les deux faces cc_1bb_1, aa_1bb_1 qui soient cachées en projection verticale ; nous les marquerons dans le tableau avec le signe —.

Passons maintenant au prisme. Le contour apparent horizontal *gl* est vu, les deux arêtes *h* et *k* étant au-dessus des arêtes *e* et *f* sont vues aussi; donc les trois faces *gh*, *hk*, *kl* sont vues en projection horizontale, tandis que les trois autres faces *lf*, *fe* et *eg* sont cachées.

On reconnaîtra de même qu'en projection verticale, les deux faces *gh* et *gf* sont seules cachées.

Ce travail effectué, nous pouvons maintenant nous occuper du système des deux polyèdres.

140. — RÈGLE I. — *En représentant le système des surfaces des deux polyèdres, tout côté du polygone d'intersection est vu, lorsqu'il est donné par deux faces vues, en considérant les polyèdres isolément.*

En effet, soit *ab* un côté du polygone d'intersection correspondant à deux faces vues, et *m* un point quelconque de l'arête *ab*. Le rayon visuel qui aboutit au point *m* peut rencontrer le premier polyèdre en d'autres points que le point *m*, mais tous ces points sont au delà de *m* par rapport à l'observateur.

De même ce rayon visuel rencontre le deuxième polyèdre en d'autres points qui sont au delà de *m*, puisque par hypothèse *ab* est donné par des faces vues. Donc le point *m* est encore vu dans le système des deux polyèdres, puisqu'il est toujours le plus rapproché de l'observateur.

Il est bien évident, au contraire, que si l'une des faces était cachée en considérant chaque polyèdre séparément, le côté serait caché. Il en serait de même si les deux faces étaient cachées.

Pour appliquer cette règle, nous n'aurons qu'à donner dans le tableau le signe + à toute division correspondant à une colonne et à une bande affectées toutes deux du signe +, et le signe — à toutes les autres.

141. — RÈGLE II. — *Toute arête primitivement vue d'un polyèdre, aboutissant à un sommet vu du polygone d'intersection, reste vue dans le voisinage de ce point.* Au contraire, *une arête primitivement vue d'un polyèdre aboutissant à un sommet caché du polygone d'intersection est cachée par le second polyèdre dans le voisinage du point.*

142. — RÈGLE III. — En représentant le système des deux surfaces, cela veut dire que ces surfaces sont conservées complétement, il en résulte alors que *la surface de l'un des polyèdres à l'intérieur de l'autre reste conservée, mais est généralement cachée.*

Appliquons ces deux nouvelles règles à notre exemple.

L'arête e du prisme est cachée primitivement en projection horizontale, donc elle reste cachée tout entière. Il en est de même pour l'arête f.

L'arête g primitivement vue pénètre dans le cube par le point o qui est vu; elle reste donc vue à gauche de o. De o à ω_1, elle est cachée à l'intérieur du cube, puis elle sort du cube par le point ω_1 qui est caché; elle reste donc cachée jusqu'au moment où elle sort du contour apparent du cube.

L'arête h vue primitivement coupe le cube en deux points vus, donc elle n'a de cachée que la partie $n\rho_1$, contenue dans le cube.

Rappelons ici que s'il y a superposition de traits, les traits pleins se marquent avant tous les autres.

La ponctuation des deux arêtes k et l est la même que celle de h et g à cause de la symétrie.

L'arête b_1a_1 primitivement vue rencontre le prisme en π_1 qui est vu, donc la portion $b_1\pi_1$ est vue aussi. De π_1 à a_1, cette arête est cachée à l'intérieur du prisme.

L'arête a_1d_1 part de l'intérieur du prisme où elle est cachée, sort du prisme par le point π qui est vu et redevient vue de π en d_1.

L'arête d_1d qui est hors du contour apparent du prisme reste vue.

L'arête dc pénètre dans le prisme par le point p_1 qui est caché, donc cette arête est d'abord vue, puis cachée à l'intérieur du contour apparent du prisme, ensuite de p_1 en c elle est cachée aussi, mais à l'intérieur du prisme.

L'arête cb est d'abord cachée de c en p à l'intérieur du prisme, puis elle sort du prisme par le point p qui est caché, et par suite, elle reste cachée jusqu'au moment où elle sort du contour apparent du prisme.

L'arête bb_1 reste vue, puisqu'elle est hors du contour apparent du prisme.

Le sommet c_1 étant au-dessus du prisme reste vu, il en est de même des arêtes partant du point c_1 jusqu'à leurs points de ren-

contre avec le prisme quand il y en a, c_1m, c_1b_1, c_1d_1 restent donc vues.

Quant aux arêtes partant du point a, elles sont toutes trois cachées.

En projection verticale, l'arête ee' du prisme était primitivement vue, elle pénètre dans le cube par le point $\nu\nu'$ qui est vu pour en sortir par le point $r_1r'_1$ qui est vu aussi. Donc $r'_1\nu'$ est la seule région cachée.

L'arête ff' est cachée de ν'_1 en r'.

L'arête gg' reste cachée tout entière.

L'arête hh' est cachée de ρ'_1 à n'.

L'arête kk' rencontrant le cube en deux points $\rho\rho'$, $n_1n'_1$ vus tous les deux, la région $n'_1\rho'$ est la seule cachée.

Enfin l'arête ll' rencontre le cube aux deux points vus $\omega'\omega$, $o_1o'_1$. Donc la région $\omega'o'_1$ est la seule cachée.

Il nous reste maintenant à examiner ce qui passe pour le cube.

L'arête $cc_1c'c'_1$ rencontre le prisme en mm', donc cette arête est cachée dans la région $m'c'$ à l'intérieur du prisme.

De même les arêtes $c'b'$, $c'd'$ sont cachées à l'intérieur du cube depuis le point cc' jusqu'aux points pp', $p_1p'_1$, mais l'arête $c'd'$ sortant du prisme par un point vu redevient vue de $p_1p'_1$ jusqu'en dd'.

L'arête $ada'd'$ qui ne rencontre pas le prisme reste vue tout entière, de sorte qu'on n'a pas à s'occuper de $aba'b'$.

La ponctuation des deux autres lignes de contour apparent se déduit de la précédente, en tenant compte de la symétrie par rapport au centre.

Enfin l'arête dd_1 qui est en avant du prisme reste vue en projection verticale.

V. — INTERSECTION DE DEUX PYRAMIDES.

143. — *Représenter le système de deux pyramides solides reposant par leurs bases sur le plan horizontal.*

Soit les deux pyramides S$abcd$ S'$a'b'c'd'$, S$_1efg$S'$_1e'f'g'$ (fig. 68, pl. 6).

Formons d'abord le tableau des combinaisons des faces des deux pyramides,

	s_1ef	s_1fg	s_1eg	efg
sab	*mn*	×	×	
sbc	*no*	*op*	×	
scd	×	*pq*	×	
sda	×	×	×	×
abcd			×	

puis supprimons les combinaisons manifestement inutiles.

Au lieu de partir maintenant d'une combinaison tout à fait arbitraire, profitons du fait que nous connaissons déjà un point de l'intersection.

Le point m, par exemple, appartient aux deux faces Sab, S_1ef; pour trouver un deuxième point de l'intersection de ces deux faces, nous les coupons par un plan auxiliaire; soit le plan horizontal H_1, il donne des parallèles à ab et ef menées respectivement par β et ε, d'où l'on déduit le point $\mu\mu'$. L'intersection des deux faces Sab, S_1ef est donc $m\mu$, $m'\mu'$, et sa partie utile se réduit à mn, $m'n'$.

La combinaison suivante est composée des deux faces Sbc, S_1ef, nn' est un premier point de l'intersection de ces deux faces, nous en avons un deuxième en $\nu\nu'$ à l'intersection des traces horizontales des deux mêmes faces. Donc $n\nu n'\nu'$ est l'intersection des deux faces considérées, sa partie utile est $non'o'$. Le côté suivant est donné par les deux faces Sbc, S_1fg, nous le déterminons à l'aide du point oo' et du point de rencontre des deux traces horizontales $\omega\omega'$. La partie utile est $opo'p'$.

Enfin le dernier côté $pqp'q'$ est donné par les deux faces Scd, S_1fg, il est déterminé par le point pp' et par le point de rencontre des deux traces horizontales qq'. La combinaison suivante est $abcd$, efg, elle est formée de deux faces identiques, donc le polygone s'arrête en qq'. D'ailleurs, si nous marchons en sens contraire, arrivés en mm', la combinaison suivante est encore $abcd$, efg, donc le polygone s'arrête encore en mm'.

Quant aux combinaisons qui restent, elles ne donnent que le contour de la face commune.

144. — Ponctuation. — Nous allons nous proposer ici de *représenter le système des deux pyramides solides et de même substance.*

Commençons comme toujours par établir la ponctuation de chaque pyramide prise séparément.

La pyramide S*abcd* a ses deux contours apparents vus. La verticale s'appuyant sur *ada'd'* et S*b*S'*b'* rencontre cette dernière droite en un point qui est au-dessus du point de rencontre avec la première ; donc l'arête *sb* est vue en projection horizontale, tandis que *ad* est cachée. Il en résulte que S*c* est vue.

De même, en projection verticale, l'arête S*d* étant en avant est vue, tandis que l'arête S*b* est cachée.

La pyramide S_1efg a également ses contours apparents vus.

La verticale qui s'appuie sur S_1f et *eg* rencontre S_1f au-dessus du point d'intersection avec *eg*, donc l'arête S_1f est vue en projection horizontale, tandis que *eg* est cachée.

En projection verticale, l'arête S_1e est seule cachée, car le point *ee'* est caché par un point de *fgf'g'*.

Pour résumer, les faces vues en projection horizontale sont S*ab*, S*bc*, S*cd*, S_1ef, S_1fg, et les faces vues en projection verticale sont S*ad*, S*dc*, S_1fg.

145. — Règle I. — *Un côté du polygone d'intersection est vu lorsqu'il est donné par deux faces vues; dans les autres cas, il est caché.* En appliquant cette règle, nous reconnaissons que la projection horizontale du polygone d'intersection *mnopq* est vue tout entière, tandis qu'en projection verticale, la région *p'q'* est la seule vue.

146. — Règle II. — *La surface de l'un des polyèdres contenue dans l'autre polyèdre n'existe plus, puisqu'elle ne sépare plus deux milieux de nature différente; donc toutes les portions d'arêtes contenues dans ces régions sont marquées en trait mixte.* Ici *nbn'b'*, *pcp'c'*, *mbm'b'*, *bcb'c'*, *cqc'q'*, *ofo'f'*, *mfm'f'*, *fqf'q'* sont donc marquées en trait mixte.

147. — Remarque. — Une fois qu'une arête doit être marquée en trait mixte, on n'a plus à s'occuper de savoir si elle est vue ou cachée, puisque ce trait mixte représente une ligne qui actuellement n'existe plus matériellement.

148. — RÈGLE III. — *Une arête d'un polyèdre aboutissant à un point vu du polygone d'intersection est vue dans le voisinage de ce point; si au contraire elle aboutissait à un point caché, elle serait également cachée dans le voisinage du point.*

Ainsi, *ab* qui est vue primitivement pénètre dans la pyramide S_1 par le point *m* qui est vu, donc *am* est vue.

De même, la portion *dq* de *de* reste vue. S*a* continuant à former un contour apparent est vue. S*b* vue primitivement pénètre dans la pyramide S_1 par un point vu, donc S*n* est vue; de même S*p* et S*d* restent vues. Enfin *ad* reste cachée tout entière.

Pour la pyramide S_1,*em*,*gq*, S_1e, S_1o,S_1g sont vues, et *eg* reste cachée. En projection verticale, S'*a'* reste vue comme contour apparent, S'*b'* primitivement cachée reste cachée de S' à *n'*, et S'*c'* aboutissant au point vu *pp'* reste vue jusqu'à ce point.

Quant à l'arête S'*d'* qui est vue primitivement, elle reste vue, car elle est en avant de la pyramide S_1.

L'arête S'_1e' reste cachée tout entière.

L'arête S'_1f, aboutissant au point *o'* qui est caché, reste cachée à l'intérieur du contour apparent de la pyramide S', enfin l'arête S'_1g' reste vue comme contour apparent.

CHAPITRE II

I. — SECTION PLANE DES POLYÈDRES.

149.—La méthode que nous venons d'indiquer pour la détermination de l'intersection de deux polyèdres peut servir également pour la détermination d'une section plane. On commencera donc par chercher l'intersection d'une face du polyèdre avec le plan sécant, à l'aide de deux plans auxiliaires quelconques; puis on prendra la partie utile de cette droite, c'est-à-dire la région contenue dans la face considérée, et on en déduira la face qui donne le côté suivant. En continuant de cette manière, on reviendra au point de départ. On essaiera successivement toutes les autres faces, et l'on pourra former un ou plusieurs polygones d'intersection.

On aura soin de vérifier si par hasard il n'existe pas de faces perpendiculaires aux plans de projection, parce qu'il sera facile alors de trouver les côtés correspondants. De même on profitera de l'existence de faces parallèles dont les intersections avec le plan sécant sont parallèles entre elles, ou bien encore de faces passant par une même droite et dont les intersections avec le plan sécant se rencontrent au même point.

Nous verrons plus tard à propos des changements de plans, une méthode plus commode pour la détermination d'une section plane. L'un des avantages de cette méthode est que les faces utiles sont toutes mises en évidence, et l'on n'aura à faire que les opérations rigoureusement nécessaires.

II. — SECTION PLANE D'UN DODÉCAÈDRE RÉGULIER.

150. — Soit le dodécaèdre $abcdea_1b_1c_1d_1e_1\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1$, défini par les projections de tous ses sommets et le plan TOT (fig. 69, pl. 6).

La trace horizontale du plan sécant rencontre l'arête $aba'b'$ au point mm' qui est un premier sommet du polygone d'intersection. Or l'arête $aba'b'$ appartient à la face $ab\beta\delta_1\alpha$; nous aurons donc un premier côté du polygone d'intersection donné par cette face. En profitant de cette remarque, nous n'aurons aucun essai à faire pour trouver un premier côté du polygone.

Déterminons un deuxième point du premier côté, et pour cela coupons le plan sécant et la face $ab\beta\delta_1\alpha$ par un plan auxiliaire, par exemple, le plan horizontal h'.

Nous avons d'un côté l'horizontale hh' du plan sécant, de l'autre $\alpha\beta\alpha'\beta'$, ce qui nous donne le point ff'. Donc $mfm'f'$ est l'intersection cherchée; quant à sa partie utile, elle se réduit à mn.

Nous nous trouvons en n sur le contour de la face $ab\beta\delta_1\alpha$; il faut donc la remplacer par la face adjacente $b\beta\epsilon_1\gamma c$. Le point n est un premier point du nouveau côté; pour en trouver un deuxième, coupons le plan sécant et la face par le plan horizontal, ce qui nous donne d'un côté Tθ, de l'autre bc, et par suite le point kk'. Donc kn est l'intersection cherchée, et sa partie utile se réduit à no.

Nous passons alors dans la face $d_1e_1\epsilon_1\beta\delta_1$. En coupant cette face et le plan sécant par le plan horizontal h'_2, nous avons d'un côté d_1e_1, de l'autre l'horizontale h'_2, et par suite le point ll'; $olo'l'$ est donc le nouveau côté, et sa partie utile se réduit à $opo'p'$.

La face adjacente est maintenant $a_1e_1\epsilon_1\gamma\alpha_1$, elle nous donne le point qq' à l'aide du plan horizontal h'_2. Donc $pqp'q'$ est le nouveau côté du polygone.

On continuera de la même manière jusqu'à ce qu'on soit revenu au point de départ.

L'opération sera complète, car le polyèdre étant convexe, il ne peut être coupé par un plan que suivant un seul polygone.

151. — Ponctuation. — Proposons-nous, dans cet exemple, de *représenter la surface opaque du dodécaèdre au-dessous du plan sécant.*

Commençons par établir la ponctuation du dodécaèdre pris isolément.

En projection horizontale, le contour apparent $\alpha\delta_1\beta\epsilon_1\gamma\alpha_1\delta\beta_1\epsilon\gamma_1\alpha$ est vu. Il en est de même de la face supérieure $a_1b_1c_1d_1e_1$, et par

suite des arêtes $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c_1\gamma_1$, $d_1\delta_1$, $e_1\varepsilon_1$ aboutissant à cette face supérieure. Quant aux autres arêtes, elles sont toutes cachées.

En projection verticale, toutes les arêtes sont marquées en trait plein, parce qu'elles sont toutes doubles.

La région au-dessous du plan sécant étant la même que la région derrière le plan, il en résulte que l'intersection est vue tout entière en projection horizontale comme en projection verticale.

Il est facile de reconnaître que le sommet aa' du polyèdre est au-dessus du plan, donc il appartient à une région enlevée du polyèdre; il en résulte que si nous parcourons les arêtes du polyèdre en partant du sommet a, de manière à arriver au polygone d'intersection, toutes ces régions d'arêtes parcourues sont enlevées.

Ainsi am, $a\nu$, $a\alpha$, $\alpha\delta_1$, $\delta_1\beta$, βo, βn, $\alpha\gamma_1$, $\gamma_1\varepsilon$, εt, εu, $\gamma_1 c_1$, $c_1 b_1$, $b_1 s$, $b_1 r$, $\delta_1 d_1$, $d_1 c_1$, $d_1 e_1$, $e_1 p_1$, $e_1 q$ sont enlevées et par suite sont marquées en traits mixtes, en projection horizontale comme en projection verticale. Quant aux autres arêtes, elles conserveraient leur même ponctuation si on supposait le polyèdre solide.

Ici, nous nous sommes proposé de représenter seulement la surface opaque du dodécaèdre; il en résulte que les arêtes primitivement cachées redeviennent vues à l'intérieur du polygone d'intersection dans les deux projections.

CHAPITRE III

I. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN POLYÈDRE.

152. — Pour trouver l'intersection d'une droite et d'un polyèdre quelconque, on fait passer par la droite un plan dont on construit le polygone d'intersection avec le polyèdre.

Les points de rencontre de ce polygone avec la droite sont les points demandés.

Parmi les plans auxiliaires passant par la droite, il sera en général préférable de prendre l'un des plans projetants de la droite. De plus, il ne sera pas toujours nécessaire de construire complétement le polygone d'intersection. En effet, pour que le point de rencontre d'une droite avec une face d'un polyèdre soit l'un des points de rencontre de la droite et du polyèdre, il faut nécessairement que le point trouvé soit à l'intérieur de la face. Il faut donc : 1° que la droite traverse la face considérée en projection horizontale ; 2° que la droite traverse la même face en projection verticale, et plus généralement, il faut qu'il en soit de même dans une projection quelconque ; 3° en supposant les deux conditions précédentes remplies, il faut en outre que les deux régions de la droite contenues dans les deux projections de la face se correspondent par des lignes de rappel.

Il est bien entendu que ces conditions sont nécessaires, sans pour cela être suffisantes.

II. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE PYRAMIDE.

153. — Si au lieu d'un polyèdre quelconque, nous avons une pyramide, il est possible alors par un choix convenable du plan auxiliaire, de réduire le polygone d'intersection à sa plus simple expression ; de telle sorte qu'on n'effectuera que les constructions strictement nécessaires pour trouver les points d'intersection.

Prenons en effet comme plan auxiliaire un plan passant par la droite et par le sommet de la pyramide, puis cherchons la trace de ce plan SF sur le plan de base P de la pyramide (fig. 70, pl. 6). Soit *f* cette droite, elle rencontre la base de la pyramide aux deux points *mn*, et par suite le plan auxiliaire coupe la pyramide suivant les deux droites S*m*, S*n*, qui à leur tour rencontrent la droite donnée aux deux points demandés MN.

Il est évident que les deux points MN sont utiles, car les points *mn* étant pris le premier entre *a* et *b*, le second entre *c* et *d*, il en résulte que les deux droites S*m*, S*n* sont à l'intérieur des deux faces S*ab*, S*cd*; donc il en est de même des points M et N.

La même méthode pourrait s'appliquer au cas d'un prisme, en choisissant comme plan auxiliaire un plan parallèle aux arêtes du prisme et passant par la droite donnée.

CHAPITRE IV

I. — INTERSECTION DE PRISMES ET DE PYRAMIDES. — PÉNÉTRATION. — ARRACHEMENT.

154. — Jusqu'à présent, nous avons trouvé les polygones d'intersection de deux polyèdres en déterminant les côtés de ces polygones. Nous allons nous proposer maintenant d'appliquer la deuxième méthode, qui consiste à chercher les sommets, au cas particulier où les polyèdres sont des prismes ou des pyramides.

Les sommets du polygone d'intersection sont, comme nous l'avons dit, les points de rencontre des arêtes de l'un des polyèdres avec les faces de l'autre.

Nous allons donc ici chercher successivement les points de rencontre des arêtes de chaque pyramide avec les faces de l'autre pyramide.

Les plans auxiliaires passeront par les sommets des deux pyramides, et en tournant autour de la droite qui joint les deux sommets pourront contenir successivement toutes les arêtes des deux pyramides.

Étant donné l'un de ces plans auxiliaires passant par une arête de la première pyramide, il sera nécessaire, pour appliquer la construction précédente, de construire sa trace sur le plan de base de la deuxième pyramide.

Nous remarquons alors :

1° Que les traces de tous les plans auxiliaires sur les deux plans de base passent par deux points fixes qui sont les points de rencontre de la ligne des sommets avec les deux plans de base ;

2° Que les deux traces d'un même plan auxiliaire sur les deux plans de base rencontrent l'intersection des deux plans de base au même point.

Assurément ces deux remarques ne sont pas nécessaires pour

la construction de l'épure, mais elles simplifient tellement la construction en général, qu'il serait préférable quelquefois de changer les plans de base afin de pouvoir s'en servir comme nous allons le faire immédiatement.

Soit, par exemple, les deux pyramides S*abc*, S_1*def* (fig. 71, pl. 7). Nous commencerons par chercher les deux points de rencontre de la ligne des sommets SS_1 avec les deux plans de base. Soit $\sigma\sigma_1$ ces deux points. Soit de plus XX_1 l'intersection des deux plans de base.

155.—Remarque. — La figure que nous allons continuer est par exemple la projection horizontale d'une épure dont la projection verticale a servi seulement pour déterminer les éléments $\sigma\sigma_1$, XX_1. La suite du raisonnement s'appliquerait au cas où cette même figure représenterait une projection quelconque orthogonale, oblique ou conique.

Considérons le plan auxiliaire passant par l'arête S*a*, il aura pour trace sur le plan de base de la pyramide S la droite σa qui rencontre XX_1 en α; donc la trace du même plan auxiliaire sur le plan de base de la pyramide S_1 est $\sigma_1\alpha$. Cette droite rencontre la base de la pyramide S_1 aux deux points a_1a_2, et par suite ce plan auxiliaire coupe la pyramide S_1 suivant S_1a_1, S_1a_2; nous avons donc en *m* et *n* deux sommets du polygone d'intersection. Ces deux sommets sont les points de rencontre de l'arête S*a* avec les deux faces S_1*de*, S_1*ef*.

En prenant de même le plan auxiliaire passant par l'arête S*b*, nous trouverons les deux sommets *o*, *p*, mais si nous appliquons la même construction à l'arête S*c*, nous reconnaissons que la trace du plan auxiliaire sur le plan de base de la pyramide S_1 ne rencontre plus la base de cette pyramide S_1.

Nous passerons alors aux arêtes de la pyramide S_1, et nous trouverons comme nouveaux sommets les points *q*, *r*, *s*, *t*.

Maintenant que nous avons tous les sommets du polygone d'intersection, il nous reste à les joindre de manière à former le polygone. Pour cela, remarquons qu'à un sommet quelconque, *m* par exemple, correspondent toujours deux points bien déterminés sur les bases; aa_1, dans le cas actuel, et un troisième point α sur XX_1. Considérons alors ces quatre points comme les

sommets d'un quadrilatère articulé dont les côtés passent par les points fixes $SS_1\sigma\sigma_1$. Pendant que le point α décrira la droite XX_1, les deux points aa_1 se déplaceront sur les bases, et en même temps le quatrième sommet m décrira le polygone d'intersection.

Pour fixer les idées, donnons le numéro (1) aux positions initiales $maa_1\alpha$ de ces quatre sommets ou mobiles, puis faisons marcher l'un d'eux, $\alpha(1)$, pour en déduire les positions successives de tous les autres.

Le mobile α marchant dans le sens αX arrive en φ; le point a peut venir soit en f_1 soit en f_2, supposons, par exemple, qu'il vienne en f_2. Quant au point a_1, il vient nécessairement en f. Le quatrième sommet du quadrilatère est alors le point t.

Donnons le numéro (2) à ces nouvelles positions des quatre mobiles; nous allons vérifier que mt ou (1)(2) est un premier côté du polygone d'intersection.

En effet, les deux faces Sab, S_1ef coupées par le plan $\sigma\alpha\sigma_1$ donnent Sa, S_1a_1, et par suite le point m; puis coupées par le plan $\sigma\varphi\sigma_1$, elles donnent Sf_2, S_1f, et par suite le point t.

Donc mt est bien la droite d'intersection des deux faces. De plus, mt en est la partie utile; en effet, la méthode employée permet d'éliminer tous les points de rencontre d'arêtes et de faces inutiles, et nous n'avons rigoureusement marqué que tous les sommets utiles. D'ailleurs, on peut vérifier sur la figure que mt est bien la région contenue simultanément à l'intérieur des deux faces. Dans tous les cas m et t sont les extrémités de la partie utile.

La méthode pour joindre les points étant justifiée, nous allons continuer de l'appliquer.

Le mobile qui était en φ marche dans le même sens $\alpha\varphi$ et arrive en β. Les points f_2 et f des deux bases viennent nécessairement en b et b_1. Quant au point t, il vient en o, donc to ou (2)(3) est le deuxième côté du polygone d'intersection.

Le premier mobile qui était en β continue jusqu'en δ, ce qui nous donne comme positions correspondantes d_2, d et r; or est donc le troisième côté (3)(4) du polygone d'intersection.

Arrivé en δ, le premier mobile ne peut plus continuer dans le même sens, puisque s'il continuait, le plan sécant ne couperait plus la pyramide S_1. C'est pour cette raison qu'on appelle le plan $\sigma\delta\sigma_1$ un plan *limite*.

Ainsi $\sigma\delta\sigma_1$ est une position limite du plan sécant pour la pyra-

mide S_1. Le premier mobile va donc marcher en sens contraire du sens précédent et revenir en β.

Le mobile qui était en d_2 revient nécessairement en b_1 ; quant à celui qui était en d, il peut revenir en b_1 ou continuer son chemin dans le même sens pour aller en b_2. Dans la première hypothèse, on trouverait comme sommet le point o que nous avons déjà rencontré ; il faut donc rejeter cette hypothèse pour prendre la seconde. En résumé, nous mettons le chiffre (5) aux points β, b, b_2, p, et rp sera le quatrième côté du polygone d'intersection.

Maintenant le premier mobile arrive en φ. Celui qui était en b vient en f_2 ; d'ailleurs celui qui était en b_2 prend une position qui n'était pas marquée, et que nous appellerons f_3. A priori, on pourrait croire que nous avons oublié de déterminer un sommet, mais il n'en est pas ainsi, car aucune des deux droites Sf_2, S_1f_3 n'est une arête de l'une des deux pyramides.

Le point correspondant à cette position du plan sécant appartient cependant à l'intersection des deux polyèdres, mais ce n'est pas un sommet.

En résumé, ce point se trouvera compris entre les deux sommets du côté donné par les faces Sab, S_1de, et comme il est inutile de marquer trois points pour déterminer une ligne droite, nous sauterons la position φ, pour continuer jusqu'en α, ce qui nous donnera le cinquième côté pn.

Nous arrivons de nouveau en $\sigma x \sigma_1$ à une position limite du plan sécant, mais cette fois pour la pyramide S.

Le premier mobile va donc marcher en sens contraire et venir jusqu'en δ en passant par-dessus les positions intermédiaires φ et β qui ne donneraient pas de sommets. Nous obtenons ainsi le sixième côté nq, puis on continuera de la même manière, jusqu'à ce que l'on soit revenu au point de départ.

Si après avoir fermé ce premier polygone on reconnaissait qu'il existe encore des sommets non employés, il faudrait prendre l'un d'eux comme point de départ, et former un nouveau polygone d'intersection.

156. — Arrachement. — Pénétration. — En supposant les deux pyramides convexes, on dit qu'il y a *arrachement*, comme dans l'exemple que nous avons traité, lorsque des deux plans limites, l'un d'eux correspond à une pyramide et l'autre

plan a l'autre pyramide. Il en résulte que sur chaque pyramide, il existe des arêtes qui ne rencontrent pas l'autre pyramide, et l'intersection se réduit à un seul polygone. Il y a au contraire *pénétration,* lorsque les deux plans limites correspondent à la même pyramide. Dans ce cas, toutes les arêtes de la pyramide comprise entre les deux plans limites rencontrent l'autre pyramide qui, de son côté, a des arêtes de part et d'autre des deux plans limites ne rencontrant pas la première pyramide.

L'intersection se compose alors de deux polygones que l'on appelle, l'un d'eux le polygone d'entrée, et l'autre le polygone de sortie.

Il est inutile d'insister plus longtemps sur cette distinction en pénétration ou en arrachement qui, on le conçoit bien, n'avance pas beaucoup la construction du polygone commun aux deux pyramides.

II. — PONCTUATION.

157. — 1. Système des deux pyramides solides et de même substance.

158. — Règle I. — *Un côté du polygone d'intersection est vu, lorsqu'il est donné par deux faces vues, en considérant les deux polyèdres séparément.*

Supposons, par exemple, que S*ab*, S*bc*, S_1*de*, S_1*df* (fig. 71, pl. 7) soient les faces vues dans la projection que nous avons dessinée, *mt* provenant de S_1*ef* sera cachée, *to* provenant de S*ab* et S_1*fd* est vue, de même *or*, *rp* et *pn* sont vues. Les autres côtés sont tous cachés.

159. — Règle II. — *Les portions d'arêtes de l'une des pyramides contenues dans l'autre n'existent plus ;* donc les portions *mn, op, qr, st* sont marquées en traits mixtes.

160. — Règle III. — *Toute arête primitivement vue, et arrivant à un point vu du polygone d'intersection, est vue jusqu'à ce point. Si au contraire elle aboutit à un point caché, elle est cachée avant d'arriver à ce point.*

Ainsi l'arête S*a* partant du point S aboutit au point *n* qui est vu ; donc S*n* est vue, elle sort ensuite de la pyramide S_1 par le point *m* qui est caché ; donc elle reste cachée à partir du point

m jusqu'au moment où elle sort du contour apparent de la pyramide S_1. C'est seulement à partir de ce point qu'elle redevient vue.

L'arête S*b* coupe la pyramide S_1 en deux points vus *o* et *p*; donc les régions S*p* et *ob* sont vues.

Quant à l'arête S*c*, elle ne coupe pas la pyramide S_1, mais le plan auxiliaire mené par cette arête est en avant du plan limite $\sigma\delta\sigma_1$; donc l'arête S*c* est vue tout entière.

On opère de la même manière pour les arêtes S_1d et S_1f. Enfin l'arête S_1e se trouve dans un plan auxiliaire au delà du plan limite $\sigma\alpha\sigma_1$; donc cette arête peut être cachée par la pyramide S_1 et c'est ce qui a lieu ici dans l'intérieur du contour apparent de la pyramide S.

161. — 2. Système des surfaces opaques des deux pyramides.

La seule différence qui existe entre cet exemple et le précédent, c'est que les portions d'arêtes *mn, op, qr, st* (fig. 72, pl. 7) qui étaient enlevées, sont maintenant conservées, mais cachées.

162. — 3. Système des deux pyramides solides et de substances différentes, *la pyramide* S *étant plus dense que la pyramide* S_1 (fig. 73, pl. 7).

En vertu de l'impénétrabilité de la matière, il est impossible de représenter le système des deux pyramides solides et de substances différentes, à moins, comme nous l'avons fait, d'indiquer quelle est la pyramide la moins dense. Cette pyramide sera entamée pour laisser passer l'autre pyramide.

La pyramide S_1 étant entamée, les portions d'arêtes *qr, st* seront enlevées; d'ailleurs, la pyramide S restant entière, les portions d'arêtes *mn, op* sont conservées, mais cachées. Quant au reste, la ponctuation est la même que dans les deux exemples précédents.

163. — 4. Partie solide de la pyramide S_1 extérieure à la pyramide S (fig. 74, pl. 7).

164. — Règle I. — *Commençons par établir la ponctuation*

du polygone sur la pyramide S, *supposée seule et conservée tout entière*. La région *torpnqs* est donc vue.

165. — RÈGLE II. — *Enlevons des arêtes de la pyramide* S_1, *ce qui est contenu dans la pyramide* S ; ainsi *qr* et *st* sont enlevées.

166.— RÈGLE III. — *Conservons des arêtes de la pyramide* S, *la région contenue dans la pyramide* S_1. Ici, par exemple, les portions *mn* et *op* sont conservées mais cachées.

167. — RÈGLE IV. — *Une partie* Sk *du polygone d'intersection redevient vue comme contour apparent.* Dans la région *ksqnprok*, on voit une partie de la face S*ac* qui est conservée à l'intérieur de S_1.

Pour l'indiquer, on remplit quelquefois cette région avec des hachures, parallèles par exemple à *ab*.

168. — 5. Partie solide de la pyramide S extérieure à la pyramide S_1. Ce solide a été représenté fig. 75, pl. 7.

169.—6. Solide commun aux deux pyramides (fig. 76, pl. 7).

170. — RÈGLE I. — *Établissons la ponctuation du polygone comme dans le système des deux corps solides et de même substance, ou sur l'une des pyramides supposée solide seule et conservée tout entière.*

171. — RÈGLE II. — *Conservons avec sa ponctuation primitive la portion d'arête de chaque pyramide contenue dans l'autre pyramide.*

Ainsi *mn, op, qr, st* sont conservées et vues.

172. — RÈGLE III. — *Les côtés* tm, nq, qs *du polygone d'intersection redeviennent vus comme contours apparents.*

173. — 7. Surface de la pyramide S_1 extérieure à la pyramide S (fig. 77, pl. 7).

174. — RÈGLE I. — *On établit la ponctuation du polygone sur la pyramide* S_1 *supposée opaque seule et conservée tout entière.*

175.—RÈGLE II. — *On enlève les portions d'arêtes de la pyramide* S_1 *contenues dans la pyramide* S.

176. — RÈGLE III. — *Les arêtes de la pyramide* S *sont enlevées complétement.*

Dans la région *ksqnprok*, on voit la face S_1ef de la pyramide S_1, et on l'indique en remplissant cette région avec des hachures parallèles à *ef*.

177.—8. **Surface opaque de la pyramide S extérieure à la pyramide S_1.**

Cette surface est représentée figure 78, planche 7.

178. — 9. **Surface opaque de la pyramide S_1 contenue dans la pyramide S** (fig. 79, pl. 7).

179. — Règle I. — *On établit la ponctuation du polygone sur la pyramide* S_1 *supposée réduite à sa surface opaque seule et conservée tout entière.*

180. — Règle II. — *On conserve seulement des arêtes de la pyramide* S_1 *et avec leur ponctuation primitive, les régions contenues dans la pyramide* S.

181. — Règle III. — *Les arêtes de la pyramide* S *sont enlevées complétement.*

182. — Règle IV. — *La partie* tmkt *du polygone d'intersection redevient vue comme contour apparent.*

Dans la région *tmkt*, on voit la face S_1ef à l'intérieur, et on l'indique en remplissant cette région avec des hachures parallèles à *ef*.

183.—10. **Surface opaque de la pyramide S contenue dans la pyramide S_1.**

On a représenté cette surface figure 80, planche 7.

184. — **Pyramide et prisme.** — Si au lieu de deux pyramides, on avait un prisme et une pyramide, on prendrait comme plans auxiliaires, des plans parallèles aux arêtes du prisme, et passant par le sommet de la pyramide. La ligne des sommets serait donc remplacée par une parallèle aux arêtes du prisme menée par le sommet de la pyramide.

Deux prismes. — Enfin dans le cas de deux prismes, on emploie comme plans auxiliaires des plans parallèles aux arêtes des deux prismes. Pour cela, par un point de l'espace, on mène des parallèles aux arêtes des deux prismes; elles déterminent un plan dont on cherche les traces sur les deux plans de base; *p*π,

$p_1\pi$ sont alors les directions des traces des plans auxiliaires sur les deux plans de base.

On peut dire que les points $\sigma\sigma_1$ sont à l'infini dans les directions πp πp_1.

Toutes les autres constructions sont alors les mêmes que dans le premier cas.

185. — Remarque I. — Nous avons jusqu'à présent supposé les deux plans de base différents, mais la méthode reste la même en supposant ces deux plans identiques ; seulement les constructions se simplifient, puisqu'on n'a plus besoin que des traces du plan auxiliaire sur le plan de base commun. Les deux points $\sigma\sigma_1$ sont donc confondus, et la droite XX_1 ne joue plus aucun rôle.

186. — Remarque II. — Nous n'avons effectué les constructions que dans une projection, la projection horizontale par exemple. Dans une épure, on pourrait les répéter en projection verticale et vérifier ensuite que les projections des sommets se correspondent par des lignes de rappel. Ou bien on peut se servir directement des lignes de rappel pour trouver les projections verticales, seulement on n'aurait plus de vérification.

III. — EXEMPLE.

187. — *Intersection de deux prismes ayant pour base dans le plan horizontal un même hexagone* abcdef, *les arêtes des deux prismes étant parallèles aux droites* $a\alpha a'\alpha'$, $a\alpha_1 a'\alpha'_1$ (fig. 81, pl. 8).

Représenter la partie du solide commun au-dessus du plan horizontal.

Commençons par construire un plan parallèle aux arêtes des deux prismes. Ce plan est déterminé par $a\alpha a'\alpha'$, $a\alpha_1 a'\alpha'_1$.

Cherchons la trace des plans auxiliaires sur le plan de base ou sur un plan parallèle, soit par exemple $\alpha\alpha_1$, $\alpha'\alpha'_1$.

Menons ensuite les plans auxiliaires par toutes les arêtes.

Par exemple, le plan passant par le sommet b a pour trace horizontale bb_1 qui rencontre les deux bases aux points bb_1. Faisons passer par ces deux points des parallèles aux arêtes des

deux prismes, et nous aurons quatre points d'intersection mbp_1b_1.

Les deux points bb_1 appartiennent à la base commune qui fait évidemment partie de l'intersection. Si ensuite nous projetons verticalement les points p_1 et m sur les arêtes correspondantes, nous reconnaissons que le point p_1 est au-dessous du plan horizontal; donc le point mm' convient seul pour le problème que nous nous sommes proposé.

En faisant la même remarque pour les autres plans auxiliaires, nous obtiendrons finalement comme sommets utiles a, m, o, d, p, n correspondant aux plans auxiliaires menés par a, b, c, d, e, f.

Pour joindre les points, partons de la position limite a où nous mettons le numéro (1) trois fois (deux fois pour les bases, une fois pour l'intersection).

Faisons marcher le premier mobile sur la base du premier prisme dans le sens ab, celui du second prisme dans le sens af. Nous arrivons en b pour le premier prisme et en b_1 pour le second, ce qui nous donne le sommet m.

Puis nous arrivons en f_1 pour le premier prisme, et en f pour le second, ce qui nous donne le point n.

Les positions suivantes des trois mobiles sont alors cc_1o, puis ee_1p, et enfin le point d.

En continuant à la manière ordinaire, on aurait trouvé la région du polygone au-dessous du plan horizontal, et on serait revenu au point de départ.

188. — Ponctuation. — En projection horizontale, le côté am étant donné par les deux faces vues af du premier prisme et ab du second prisme est vu; il en est de même pour mn, no, op, ab; nous nous réserverons pour pd, bc, cd, de, ef, fa.

Les portions d'arêtes fn, ep du premier prisme sont conservées et vues; il en est de même des portions d'arêtes mb, co du deuxième prisme.

Enfin les côtés pd, bc, cd, de, ef, fa redeviennent vus comme contours apparents.

En projection verticale, les côtés dp, po sont vus comme provenant de faces vues primitivement, de, ef du premier prisme et cd du deuxième prisme.

Les arêtes fn, ep du premier prisme sont vues, et il en est de

même de l'arête *co* du deuxième prisme. Quant à l'arête *bm* du deuxième prisme, elle reste cachée dans sa partie conservée.

Enfin le côté *on* redevient vu comme contour apparent.

IV. — SECTION PLANE D'UN PRISME OU D'UNE PYRAMIDE.

La méthode que nous avons indiquée pour trouver l'intersection de deux pyramides peut s'employer aussi pour la détermination des sections planes d'un prisme ou d'une pyramide.

189. — *Soit,* par exemple, *à déterminer une section plane de la pyramide* Sabc (fig. 82, pl. 8).

Nous mènerons d'abord par le sommet une droite quelconque dont nous déterminerons les points de rencontre $\sigma\sigma_1$ avec le plan de base et avec le plan sécant. Soit de plus XX_1 l'intersection du plan de base et du plan sécant.

Nous emploierons comme plans auxiliaires des plans passant par la droite $S\sigma\sigma_1$ et successivement par toutes les arêtes de la pyramide.

Ainsi le plan auxiliaire mené par Sa a pour trace sur le plan de base $\sigma a \alpha$ et coupe le plan sécant suivant $\sigma_1\alpha$, ce qui nous donne en a_1 un sommet du polygone d'intersection.

La même construction, répétée pour les autres arêtes, nous donne successivement les sommets b_1 et c_1.

Enfin le polygone s'obtiendra en joignant les sommets trouvés dans le même ordre que les sommets correspondants de la base.

190.—**Remarque I.**—Comme droite fixe $S\sigma\sigma_1$, on peut choisir, par exemple, l'une des projetantes du sommet, ce qui revient à employer comme plans auxiliaires les plans projetants des arêtes de la pyramide.

191. — **Remarque II.** — Si l'un des points $\alpha\beta\gamma$ sortait des limites de l'épure, on pourrait remplacer la droite $S\sigma\sigma_1$ par une autre droite mieux choisie. En se donnant en Σ le point de rencontre de cette nouvelle droite fixe avec le plan de base, la construction précédente permettrait de trouver en Σ_1 son point de rencontre avec le plan sécant.

Si, par exemple, on choisit Sb, on en déduit que les droites

ba, b_1a_1 doivent rencontrer XX_1 au même point, de même pour *bc* et b_1c_1.

Il résulte de cette remarque, que l'on peut, connaissant un sommet du polygone, en déduire tous les autres, sans construire aucune ligne supplémentaire.

192. — Exemple. — *Intersection de la pyramide* Sabc, S'a'b'c' *par le plan* $D\delta D_1$ (fig. 83, pl. 8).

Considérons la perpendiculaire au plan vertical S'; elle coupe le plan $D\delta D_1$ au point $\sigma_1\sigma'_1$ et le plan de base à l'infini dans la direction *aa'*. L'intersection du plan de base avec le plan sécant est $D\delta$.

Le plan auxiliaire mené par S*a*, S'*a'* coupe le plan de base en projection horizontale suivant $a\alpha$, et le plan sécant suivant $\sigma_1\alpha$, ce qui donne le sommet $a_1a'_1$.

Nous obtenons de même les sommets $b_1b'_1$, $c_1c'_1$.

Comme vérification, $a_1b_1a'_1b'_1$, *aba'b'* coupent la trace horizontale du plan au même point; il en est de même pour *aca'c'*, $a_1c_1a'_1c'_1$.

193. — Ponctuation. — Proposons-nous de représenter la surface opaque de la pyramide comprise entre le plan horizontal et le plan sécant.

Le polygone $a_1b_1c_1$, $a'_1b'_1c'_1$ est vu tout entier dans les deux projections.

Les portions d'arêtes $aa_1a'a'_1$, $bb_1b'b'_1$, $cc_1c'c'_1$ sont conservées avec leur ponctuation en supposant le tronc de pyramide solide, mais en représentant la surface, la portion de ces arêtes à l'intérieur du polygone en projection redevient vue.

CHAPITRE V

FIGURES CONVEXES.

194. — Définition. — *On dit qu'un polygone plan est convexe, lorsque ce polygone est tout entier d'un même côté par rapport à un côté quelconque du polygone, cette droite étant prolongée dans les deux sens.*

Il résulte de cette définition que tout polygone convexe n'est coupé qu'en deux points par une ligne droite. En effet, si la droite A coupait le contour polygonal aux trois points *mnp*, le point intermédiaire *n* appartiendrait à un côté *ab* du polygone; donc ce polygone ayant deux points de son contour de part et d'autre de *ab*, ne serait pas tout entier du même côté par rapport à *ab*.

Inversement, *tout polygone plan coupé en deux points seulement par une ligne droite quelconque, la région comprise entre les deux points appartenant à la surface du polygone, est convexe.*

En effet, si le polygone n'était pas convexe, il existerait des droites, en particulier des côtés du polygone coupant en plus de deux points le contour polygonal.

D'une manière analogue, un polyèdre est convexe, lorsqu'il est tout entier d'un même côté par rapport à une face quelconque prolongée indéfiniment. On en déduit qu'un polyèdre convexe est coupé en deux points seulement par une ligne droite, et inversement que si un polyèdre est coupé par une droite quelconque en deux points seulement, la région solide traversée étant comprise entre les deux points, le polyèdre est convexe.

195.— THÉORÈME I.—*Toute section plane d'un polyèdre convexe est un polygone convexe.*

En effet, ce polygone ne peut être coupé qu'en deux points

par une ligne droite, la région de la droite comprise entre les deux points appartenant à la surface de la section, puisqu'elle traverse la partie solide du polyèdre.

196. — THÉORÈME II. — *Toutes les faces du solide commun à deux polyèdres convexes sont des polygones convexes.*

Soit en effet, a (fig. 84, pl. 8) une face du premier polyèdre, le plan de cette face coupe le deuxième polyèdre suivant la section π.

La région commune aux surfaces des deux polygones a et π constitue une face du solide commun.

Or une droite quelconque coupe le polygone a en deux points mn et le polygone π aux deux points $\mu\nu$, les régions contenues dans les surfaces polygonales étant comprises entre mn ou $\mu\nu$. Donc le contour polygonal qui constitue la face du solide commun est coupé seulement en deux points μn par une droite quelconque, la région contenue dans la face du solide commun étant comprise entre les deux points μ et n.

La face considérée du solide commun est donc bien convexe.

197. — THÉORÈME III. — *Le solide commun à deux polyèdres convexes est lui-même un polyèdre convexe.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du précédent, en appelant mn, $\mu\nu$ les points de rencontre d'une droite quelconque avec les deux polyèdres donnés.

198. — THÉORÈME IV. — *Le contour apparent d'un polyèdre convexe est un polygone convexe.*

En effet, si ce contour apparent n'est pas convexe, on peut le couper par une droite en quatre points au moins $\alpha\beta\gamma\delta$, et par suite deux régions différentes de la droite traversent ce contour apparent (fig. 85, pl. 8).

Prenons dans chacune de ces deux régions un point, a dans la première, b dans la seconde. Ces deux points peuvent être considérés comme les projections de deux points A, B à l'intérieur du polyèdre.

Or la droite AB, en partant du point à l'intérieur du polyèdre, coupe nécessairement le polyèdre en un point au moins pour arriver en P hors du polyèdre; de même, elle coupe le polyèdre au moins en un point entre a et M.

Enfin la même droite AB coupe nécessairement le polyèdre en deux points au moins projetés entre γ et δ; donc le polyèdre n'est pas convexe, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Comme application de ce théorème, nous pouvons dire que *le contour apparent du solide commun à deux polyèdres convexes est un polygone convexe.*

Les théorèmes que nous venons de démontrer sont vrais en employant des projections obliques ou orthogonales; ils s'appliquent en même temps à l'ombre au soleil, mais ils ne s'appliquent pas toujours aux projections coniques ou à l'ombre au flambeau.

Il sera bon de tenir compte de ces différents théorèmes lorsqu'on aura trouvé l'intersection de deux polyèdres, et l'on pourra ainsi corriger des erreurs graphiques qui sont quelquefois inévitables, et qui sans ces remarques passeraient inaperçues.

CHAPITRE VI

I. — DÉTERMINATION DES OMBRES.

Étant donné un objet, on peut éclairer cet objet, soit à l'aide d'une source lumineuse à distance finie, c'est le cas de l'ombre au flambeau ; soit à l'aide d'une source lumineuse placée à l'infini, et c'est alors le cas de l'ombre au soleil.

Le problème se décompose en deux parties ; premièrement, ombres propres, c'est-à-dire ombres sur le corps ; deuxièmement, ombres portées par le corps sur les corps environnants.

199. — Ombre d'un point. — Si nous traçons le rayon lumineux qui joint le point donné à la source lumineuse, tous les points de cette droite au delà du point considéré, par rapport à la source lumineuse, sont dans l'ombre. En effet, les rayons qui joignent ces différents points au point lumineux sont interceptés par le point considéré M avant d'arriver jusqu'à eux.

Il en résulte que l'ombre portée par le point M sur un objet quelconque sera le premier point de rencontre du rayon SM avec cet objet. Par exemple (fig. 86, pl. 8), l'ombre portée par le point M sur le plan P, c'est le point de rencontre *m* du plan P avec le rayon lumineux SM. Ceci nous montre que, trouver l'ombre d'un point n'est autre chose que trouver la projection conique du même point dans le cas de l'ombre au flambeau, ou la projection oblique dans le cas de l'ombre au soleil.

200. — Ombre d'une ligne. — L'ombre portée par une ligne est le lieu des ombres portées par les différents points de la ligne.

201. — THÉORÈME. — *L'ombre portée par une ligne droite sur un plan est une ligne droite ; excepté, lorsque la*

droite passe par le point lumineux, auquel cas l'ombre de la droite se réduit à un point.

Ce théorème est la reproduction de celui que nous avons énoncé pour la projection d'une droite; il est donc inutile d'en renouveler la démonstration.

Il résulte de ce théorème que pour trouver l'ombre portée par une droite sur un plan, il suffit de joindre par une ligne droite les ombres portées de deux points de la droite.

202. — Ombre portée par une droite sur une droite. — Pour trouver l'ombre portée par une droite A sur une droite B, on mène par A et la source lumineuse S un plan (fig. 87, pl. 8) dont on cherche l'intersection avec la droite B; on a ainsi le point demandé. Cette construction se simplifie lorsqu'on a les ombres portées des deux droites sur une même surface, et en particulier sur un plan.

Soit, par exemple, *a*,*b* les ombres portées par les deux droites A,B sur le plan P. Le rayon lumineux S*m* qui passe par le point de rencontre de *a* et *b* s'appuie simultanément sur les deux droites A,B en M et M_1.

Le problème est ainsi résolu; SMM_1 étant par exemple l'ordre des points sur le rayon lumineux commun, on en déduit que le point M de A projette en M_1 une ombre sur B.

203. — Ombre portée par un polyèdre sur le plan horizontal. — Étant donné un polyèdre quelconque, déterminons successivement les ombres portées par tous les sommets sur le plan horizontal, et joignons tous ces points dans le même ordre que les points correspondants du polyèdre; autrement dit, cherchons les ombres de toutes les arêtes sur le plan horizontal. On reconnait alors qu'une partie de ces droites forme un polygone à l'intérieur duquel se trouvent toutes les autres. C'est ce polygone qui constitue le contour de l'ombre portée par le polyèdre sur le plan horizontal.

Pour continuer de montrer l'analogie entre les ombres et les projections, nous dirons que le contour de l'ombre portée est la même chose que le contour apparent en projection conique du polyèdre.

Les arêtes du polyèdre dont les ombres ont donné le contour de l'ombre portée forment sur le polyèdre un polygone qui constitue le contour de l'ombre propre.

Le contour de l'ombre propre partage la surface du polyèdre en deux régions; l'une d'elles, dirigée du côté de la source lumineuse, est éclairée; l'autre, opposée à la source lumineuse, est dans l'ombre.

II. — OMBRE D'UN TÉTRAÈDRE.

204. — Problème. — *Soit à trouver l'ombre propre et l'ombre portée sur le plan horizontal, par le tétraèdre* Sabc, S'a'b'c' *éclairé par des rayons lumineux parallèles à* AA' (fig. 88, pl. 8).

Les ombres des sommets sont $\alpha\beta\gamma\sigma$, et par suite celles des arêtes $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\sigma\alpha$, $\sigma\beta$, $\sigma\gamma$.

Le contour de l'ombre portée est $\alpha\beta\sigma\gamma\alpha$, donc toute la région du plan horizontal contenue dans ce polygone est dans l'ombre; on la remplit dans sa partie vue avec des hachures parallèles, ou bien avec une teinte plate.

Le contour de l'ombre propre sera *absca*, *a'b's'c'a'*; il partage la surface du tétraèdre en deux régions, premièrement *asb*, *asc*, deuxièmement *abc*, *sbc*.

Il reste à distinguer laquelle de ces deux régions est éclairée.

Pour cela, nous construirons un rayon lumineux quelconque, dont nous chercherons les deux points de rencontre avec le tétraèdre; celui de ces deux points qui sera le plus rapproché de la source lumineuse appartiendra à une face éclairée, l'autre point sera dans l'ombre.

Considérons, par exemple, le rayon lumineux déterminé par le point de rencontre de $\beta\gamma$ et de $\sigma\alpha$; il coupe *bc* en *m* et S*a* en *p*. Donc le point *p* est éclairé, tandis que le point *m* est dans l'ombre.

Il résulte de là que les deux faces S*ac*, S*ab* sont éclairées et que les deux autres faces S*bc*, *abc* sont dans l'ombre.

On remplit les faces dans l'ombre avec des hachures ou avec une teinte plate, lorsque ces faces sont vues.

III. — RELÈVEMENT DE L'OMBRE SUR LE PLAN VERTICAL.

205. — Jusqu'à présent, nous n'avons parlé que de l'ombre portée sur le plan horizontal. Or il peut arriver qu'une partie de

cette ombre se trouve dans la région postérieure du plan horizontal. Dans ce cas, un certain nombre de rayons lumineux *rasants* sont arrêtés par le plan vertical avant d'atteindre le plan horizontal. Il convient donc de chercher l'ombre portée sur le plan vertical. On l'obtiendra de la même manière que l'ombre portée sur le plan horizontal; c'est-à-dire en cherchant les traces verticales des rayons lumineux passant par les sommets du polyèdre.

206. — Remarque I. — En supposant connue complétement l'ombre portée sur le plan horizontal, il suffit de prendre les traces verticales des rayons lumineux passant par les sommets du contour de l'ombre propre.

207. — Remarque II. — Le contour de l'ombre portée sur le plan horizontal, et le contour de l'ombre portée sur le plan vertical coupent la ligne de terre au même point.

IV. — OMBRE D'UN TRONC DE PRISME.

208. — *Soit à trouver les ombres propres et portées sur les deux plans de projection par le tronc de prisme* $abca_1b_1c_1$, $a'b'c'a'_1b'_1c'_1$ (fig. 89, pl. 8).

Les sommets abc ont pour ombres sur le plan horizontal les points $\alpha\beta\gamma$; donc $a\alpha\beta\gamma ca$ est le contour de l'ombre portée sur le plan horizontal.

La région $m\beta n$ étant derrière le plan vertical, il faut la relever sur le plan vertical, et pour cela, il suffit de chercher la trace verticale du rayon lumineux $b\beta b'\beta'$, soit $\beta_1\beta_1'$; $m'\beta'_1n'$ sera donc dans sa partie utile l'ombre portée sur le plan vertical.

V. — OMBRE D'UN POLYÈDRE SUR UN AUTRE POLYÈDRE.

209. — *Soit à déterminer toutes les ombres produites par un système composé du prisme* $abcda_1b_1c_1d_1$, $a'b'c'd'a'_1b'_1c'_1d'_1$ *et de la pyramide* Sefg, Se'f'g', *ces deux corps étant éclairés par des rayons lumineux parallèles à* DD' (fig. 90, pl. 8).

Nous déterminerons d'abord les ombres portées par les deux polyèdres sur le plan horizontal. Soit $b\beta\gamma\delta d$ le contour de l'ombre portée par le prisme, et $f\sigma e$ le contour de l'ombre portée

par la pyramide. La région $\mu\gamma\delta\pi$ étant à l'intérieur de l'ombre portée par la pyramide, c'est que la région correspondante du prisme donne une ombre sur la partie éclairée de la pyramide.

Considérons, par exemple, le rayon lumineux passant par le point μ; il rencontre les arêtes S*f* et *bc* aux deux points *n* et *m*; donc le point *m* de l'arête *bc* projette en *n* une ombre sur l'arête *sf*.

Le point *n* est un premier point de l'ombre portée par l'arête *bc* sur la face éclairée S*ef*. Pour en trouver un deuxième, nous allons déterminer le point de l'ombre portée par *bc* sur une droite quelconque de la face S*ef*, soit *ef*.

Le point λ est précisément l'ombre portée par *bc* sur *ef*, donc λn est l'ombre de *bc* sur la face S*ef*. Enfin la partie utile de cette droite est $n\gamma_1$, le point γ_1 étant sur le rayon lumineux du point C.

Il faut ensuite trouver l'ombre portée par *cd* sur la face S*ef*. Nous en avons un premier point en γ_1, le deuxième s'obtient de la même manière que λ, c'est-à-dire en cherchant l'ombre portée par *cd* sur *ef*, soit ω ce point. L'ombre cherchée est donc $\gamma_1\omega$, sa partie utile se réduit à $\gamma_1\delta_1$. Enfin l'ombre portée par la verticale *d* se réduit $\pi\delta_1$.

En résumé, la région $fn\gamma_1\delta_1\pi f$ de la face S*ef* est maintenant dans l'ombre. On a déterminé la projection verticale de ce nouveau contour, en projetant les sommets $\gamma_1\delta_1$ sur les rayons lumineux correspondants, et les points $\lambda\omega\pi$ sur la ligne de terre.

Enfin on a redressé l'ombre de la pyramide sur le plan vertical suivant $e'\sigma'\rho'$.

LIVRE IV

DROITES ET PLANS RECTANGULAIRES

CHAPITRE PREMIER

I. — DROITES RECTANGULAIRES.

210. — THÉORÈME. — *Un angle droit se projette sur un plan parallèle à l'un des côtés suivant un angle droit.*

Soit, par exemple, l'angle droit ABC (fig. 91, pl. 8) que nous projetons sur le plan P parallèle au côté *ab*.

Premièrement, AB étant parallèle au plan P, cette droite est aussi parallèle à sa projection AB.

Deuxièmement, en employant des projections orthogonales, les deux droites AB et B*b* sont rectangulaires; donc la droite AB est perpendiculaire sur le plan projetant BC*bc*, à cause de l'angle droit ABC.

La parallèle *ab* à AB sera aussi perpendiculaire sur le même plan et en particulier sur *bc* qui passe par son pied dans ce plan.

211. — Remarque. — Ce théorème, comme nous l'avons déjà dit, suppose l'emploi des projections orthogonales; il suppose de plus que la droite BC se projette suivant une ligne droite. Ainsi le théorème est en défaut lorsque BC est perpendiculaire au plan P, auquel cas l'angle se projette uniquement suivant la droite *ab*.

212. — Réciproque I. — *Un angle se projetant sur un plan*

parallèle à l'un de ses côtés suivant un angle droit est lui-même un angle droit.

Soit, par exemple, l'angle ABC (fig. 91, pl. 8) dont la projection orthogonale sur le plan P parallèle à AB est un angle droit *abc*.

Comme précédemment, les droites AB et *ab* sont parallèles entre elles.

La droite *ab* est perpendiculaire sur le plan projetant *bc*BC, à cause des deux angles droits *abc*, *ab*B. Il en est donc de même pour la parallèle AB, et par suite AB est perpendiculaire sur BC qui passe par son pied dans le plan *bc*BC.

213. — Réciproque II. — *Un angle droit se projetant suivant un angle droit a au moins l'un de ses côtés parallèle au plan de projection.*

Soit l'angle droit ABC se projetant orthogonalement sur le plan P suivant l'angle droit *abc* (fig. 91, pl. 8).

Supposons que BC ne soit pas parallèle au plan P.

Premièrement, la droite AB étant perpendiculaire sur BC, elle est contenue dans un plan perpendiculaire à BC, et par suite, perpendiculaire sur le plan projetant BC*bc*.

Deuxièmement, la droite *ab* étant perpendiculaire sur *bc*, la droite AB est contenue dans le deuxième plan *ab*AB perpendiculaire aussi sur le plan BC*bc*. Donc AB est perpendiculaire sur le plan BC*bc* comme intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième. Or BC*bc* est un plan projetant, donc AB est parallèle au plan de projection.

Cette démonstration suppose que les deux plans dont AB est l'intersection ne sont pas confondus. S'il en était ainsi, c'est que la droite BC qui leur est perpendiculaire serait parallèle au plan de projection. Cette hypothèse est donc contraire à la première, ou bien elle suppose le théorème démontré.

II. — DROITES ET PLANS RECTANGULAIRES.

214. — THÉORÈME. — *Toute droite perpendiculaire sur un plan a ses projections perpendiculaires sur les traces de même nom du plan.*

Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse d'une projection

horizontale. Considérons alors l'horizontale du plan passant par le pied de la perpendiculaire sur le plan. Cette horizontale forme avec la droite un angle droit dont l'un des côtés est parallèle au plan horizontal, et qui par suite se projette horizontalement suivant un angle droit. Ainsi la projection horizontale de la droite est perpendiculaire sur une horizontale déterminée du plan; elle est donc perpendiculaire sur toutes les horizontales du plan, et en particulier sur la trace horizontale.

Cette démonstration est en défaut dans le cas où la droite est verticale, puisqu'alors l'angle droit qu'elle forme avec l'horizontale ne se projette plus que suivant une droite. Dans ce cas, le plan donné est horizontal.

215. — Réciproque. — *Toute droite ayant ses projections dans deux systèmes différents perpendiculaires sur les traces de même nom d'un plan est perpendiculaire sur ce plan.*

Pour fixer les idées, supposons que le premier plan de projection soit le plan horizontal.

Considérons alors l'horizontale du plan qui passe par le point de rencontre de la droite avec le plan; elle forme avec la droite un angle qui se projette sur le plan horizontal suivant un angle droit. La droite donnée est donc perpendiculaire sur une horizontale du plan.

De même le deuxième plan de projection étant le plan vertical, la droite dans l'espace est perpendiculaire sur une ligne de front du plan, et par suite finalement la droite est perpendiculaire au plan.

Cette démonstration est en défaut lorsque l'horizontale et la ligne de front du plan sont parallèles à la ligne de terre, c'est-à-dire lorsque le plan est parallèle à la ligne de terre, ou, ce qui revient au même, lorsque la droite est dans un plan de profil.

III. — PLANS RECTANGULAIRES.

215a. — Les deux théorèmes précédents et leurs réciproques conduisent au théorème suivant, en substituant aux deux côtés d'un angle droit, deux plans qui leur sont respectivement rectangulaires.

Théorème. — *Étant donné deux plans étant rectangu-*

laires, si l'un d'eux est perpendiculaire sur le plan de projection, leurs traces sont rectangulaires.

1° **Réciproque.** — *Étant donné deux plans dont les traces sont rectangulaires, si l'un deux est perpendiculaire sur le plan de projection, dans l'espace ils sont rectangulaires.*

2° **Réciproque.** — *Étant donné deux plans rectangulaires dont les traces sur un même plan de projection sont rectangulaires, l'un deux, au moins, est perpendiculaire sur le plan de projection.*

CHAPITRE II

I. — PERPENDICULAIRE SUR UN PLAN.

216. — Problème. — *Abaisser d'un point une perpendiculaire sur un plan, et trouver le pied de cette perpendiculaire sur le plan.*

Nous commencerons par déterminer une horizontale et une ligne de front du plan. Soit, par exemple, HH'FF' (fig. 92, pl. 8) ces deux droites, puis nous abaisserons des deux points a,a' des perpendiculaires sur H et F'. La droite ainsi obtenue AA' est la perpendiculaire demandée.

Pour trouver le pied de la perpendiculaire, abaissée du point aa' sur le plan HFH'F', il suffit de déterminer l'intersection de la droite AA' avec ce plan. Soit mm' ce point. En mesurant la distance des deux points aa',mm', on aurait la distance du point au plan.

Dans la figure 93, planche 9, on a résolu le même problème, mais en supposant le plan donné par ses traces.

II. — PLAN PERPENDICULAIRE SUR UNE DROITE.

217. — Problème. — *Mener par un point un plan perpenlaire diculaire sur une droite.*

Soit le point aa' et la droite AA' (fig. 94, pl. 9). L'horizontale du plan inconnu menée par le point aa' aura sa projection verticale parallèle à la ligne de terre et sa projection horizontale perpendiculaire sur A. De même, la ligne de front du plan inconnu menée par aa' aura sa projection verticale perpendiculaire sur A', et sa projection horizontale parallèle à la ligne de terre. Nous avons ainsi suivant HH' et FF' deux droites pour déterminer le plan.

Cette construction n'est pas applicable dans le cas où la droite est dans un plan de profil, puisqu'alors les deux droites HH' et FF' sont confondues. Nous indiquerons une solution de ce cas particulier en parlant des changements de plan.

Ayant ainsi déterminé deux droites du plan, on peut en déduire toutes les droites que l'on veut, et en particulier les traces.

Proposons-nous de déterminer uniquement l'une des traces du plan, par exemple, la trace horizontale.

On commencera par tracer la ligne de front FF′ dont on cherchera la trace horizontale *ff′* (fig. 95, pl. 9) ; puis par ce point, on mènera Px perpendiculaire sur A, et l'on aura ainsi la trace horizontale demandée.

De même, si l'on avait voulu trouver uniquement la trace verticale du plan, on aurait commencé par dessiner l'horizontale HH′ sans tracer la ligne de front FF′.

III. — PERPENDICULAIRE SUR UNE DROITE.

218. — Problème. — *Abaisser d'un point une perpendiculaire sur une droite.*

Soit le point *aa′* et la droite AA′ (fig. 94, pl. 9) ; nous mènerons par le point *aa′* un plan perpendiculaire sur AA′. Ce plan est ici déterminé par l'horizontale HH′ et la ligne de front FF′. Puis nous déterminerons l'intersection de AA′ avec ce plan FHF′H′. Enfin en joignant le point ainsi obtenu *mm′* au point donné *aa′*, nous aurons la perpendiculaire demandée.

Lorsque nous saurons trouver la distance de deux points, en mesurant la longueur *ama′m′*, nous aurons la distance du point *aa′* à la droite AA′.

218_a. — Comme nous l'avons dit plus haut, les constructions précédentes sont en défaut, lorsque le plan est parallèle à la ligne de terre, ou lorsque la droite est de profil. Nous avons indiqué de plus la méthode des changements de plans de projection pour la résolution de ces problèmes, dans le cas particulier qui nous occupe. On peut cependant se proposer de les résoudre directement, sans employer des changements de plan ou des rotations.

218_b. — Problème I. — *Abaisser d'un point une perpendiculaire sur un plan parallèle à la ligne de terre.*

Soit le plan parallèle à la ligne de terre PP_1 (fig. 191, pl. 18), et le point *aa′*. Nous commencerons par dessiner dans le plan PP_1, une droite quelconque *bc*, *b′c′*, puis, par le point *aa′*, nous mènerons un plan RR_1 perpendiculaire sur cette

droite *bc*, *b'c'*. La perpendiculaire inconnue est l'intersection de tous les plans analogues à RR_1. En particulier, c'est l'intersection du plan RR_1 avec le plan de profil *aa'*. On a donc déterminé la trace horizontale R du plan RR_1 (217), elle coupe la trace horizontale du plan de profil *a* en *hh'*, qui est la trace horizontale de la perpendiculaire demandée. En résumé, la perpendiculaire abaissée du point *aa'* sur le plan PP_1 est déterminée par les deux points *aa'*, *hh'*.

218c. — Problème II. — *Mener par un point un plan perpendiculaire sur une droite de profil.*

Soit le point *aa'*, et la droite de profil *bc*, *b'c'* déterminée par les deux points *bb'*, *cc'* (fig. 192, pl. 18). L'application directe du théorème sur les droites et plans rectangulaires (214) donne, comme horizontale et comme ligne de front du plan inconnu, une seule droite, qui est la parallèle à la ligne de terre menée par *aa'*. Pour trouver une autre droite quelconque, il suffit de mener, par *bc*, *b'c'*, un plan arbitraire, et d'abaisser de *aa'* une perpendiculaire sur ce plan.

Pour simplifier les constructions, on a défini le plan arbitraire mené par *bc*, *b'c'*, à l'aide d'une horizontale $b\beta$, $b'\beta'$ menée arbitrairement par *bb'*, et on en a déduit, suivant $c\beta c'\beta'$, une ligne de front du même plan.

Il suffit donc d'abaisser de *a* une perpendiculaire sur $b\beta$, et de *a'* une perpendiculaire sur $c'\beta'$.

On a ainsi, suivant *ad*, *a'd'*, une droite du plan inconnu. Le plan demandé sera donc déterminé par la droite *ad*, *a'd'*, et par la parallèle à la ligne de terre *aea'e'*.

IV. — PERPENDICULAIRE COMMUNE A DEUX DROITES.

Nous décomposerons ce problème en deux parties; dans la première, nous chercherons la direction de la perpendiculaire commune, et dans la deuxième, la position de la perpendiculaire commune.

219. — 1° Direction de la perpendiculaire commune. Pour obtenir cette direction, on peut dire que la perpendiculaire commune est perpendiculaire sur un plan parallèle aux deux droites, ou bien qu'elle est parallèle à l'intersection de

deux plans perpendiculaires respectivement aux deux droites.

Si nous voulons appliquer le premier procédé, par un point de l'espace, par exemple *oo'* (fig. 97, pl. 9), menons des parallèles aux deux droites, soit AA' et $B_1B'_1$, puis déterminons une horizontale *hh'* et une ligne de front *ff'* du plan $AB_1A'B'_1$. La perpendiculaire commune a alors sa projection horizontale perpendiculaire sur *h*, et sa projection verticale perpendiculaire sur *f'*.

Pour appliquer le deuxième procédé, nous mènerons les deux plans $P\alpha P_1$, $R\beta R_1$ perpendiculaires respectivement sur AA' et BB'. L'intersection *mnm'n'* de ces deux plans donne la direction demandée (fig. 96, pl. 9).

220. — 2° Position de la perpendiculaire commune.

Il ne nous reste plus qu'à construire une parallèle à la direction trouvée *mnm'n'* s'appuyant sur les deux droites données AA'BB'. Pour cela, par le point *oo'* de AA', menons une parallèle à la direction connue, elle détermine avec AA' un plan AΔA'Δ' dont nous cherchons l'intersection avec BB'. Soit *bb* ce point. Enfin, en menant par *bb'* une parallèle à ΔΔ', on aura la perpendiculaire commune demandée.

Quand nous saurons trouver la distance de deux points, en mesurant la longueur *aba'b'*, nous aurons la plus courte distance entre les deux droites.

V. — CAS PARTICULIERS DE LA PERPENDICULAIRE COMMUNE A DEUX DROITES.

221. — 1° *L'une des droites est perpendiculaire sur l'un des plans de projection.*

Soit, par exemple, la verticale AA' (fig. 98, pl. 9) et la droite quelconque BB'.

La perpendiculaire commune devant être perpendiculaire sur une verticale, elle est parallèle au plan horizontal. Cette perpendiculaire commune forme donc avec BB' un angle droit qui se projette horizontalement suivant un angle droit.

Il résulte de ce raisonnement que la projection horizontale de la perpendiculaire commune s'obtient en abaissant du point A une perpendiculaire sur B ; soit *ab*. Quant à la projection verticale *a'b'*, elle s'obtient en projetant verticalement *b* en *b'*

sur B', et en menant par ce point une parallèle à la ligne de terre.

222. — Remarque. — La plus courte distance entre les deux droites est mesurée ici par *ab*, puisque la perpendiculaire commune est parallèle au plan horizontal.

223. — 2° *Les deux droites sont parallèles à l'un des plans de projection.*

Soit, les deux droites AA', BB' (fig. 99, pl. 9) parallèles toutes deux au plan horizontal.

La perpendiculaire commune est alors verticale, et par suite elle se projette horizontalement au point de rencontre *ab* des projections horizontales des deux droites; d'ailleurs sa projection verticale n'est autre chose que la ligne de rappel du point *ab*.

224. — Remarque. — La perpendiculaire commune étant parallèle au plan vertical, la plus courte distance entre les deux droites est mesurée par *a'b'*.

225. — 3° *Les deux droites ont deux projections de même nom parallèles entre elles.*

Soit, par exemple, les deux droites AA', BB' (fig. 100, pl. 9) dont les projections verticales sont parallèles entre elles. Nous connaissons immédiatement un plan parallèle aux deux droites, c'est le plan projetant verticalement A' ou B'. La perpendiculaire commune est donc perpendiculaire sur ce plan, et par suite sa projection horizontale est parallèle à la ligne de terre, tandis que sa projection verticale est perpendiculaire sur A'.

Il ne reste donc plus qu'à construire une parallèle à une direction donnée s'appuyant sur deux droites données. On obtient ainsi suivant *aba'b'* la perpendiculaire commune demandée.

226. — Remarque. — Comme dans les cas précédents, on a en même temps la longueur de la plus courte distance entre les deux droites; elle est mesurée par *a'b'*, ou plus simplement par la distance entre A' et B'.

227. — 4° *L'une des deux droites est horizontale, et l'autre de front.*

Ici encore, nous connaissons la direction de la perpendiculaire commune; en projection horizontale, elle est perpendiculaire

sur H (fig. 101, pl. 9), et en projection verticale, elle est perpendiculaire sur F'. Il ne reste donc plus qu'à appliquer à la manière ordinaire la deuxième partie de la construction

Remarque. — Dans ce cas particulier, on trouve assez simplement la perpendiculaire commune aux deux droites, mais on n'a pas la plus courte distance entre ces deux droites, parce que la perpendiculaire commune n'est pas parallèle à l'un des plans de projection.

3° *L'une des deux droites est la ligne de terre.*

Proposons-nous, dans ce cas particulier (fig. 102, pl. 9), de trouver directement la perpendiculaire commune sans le secours des changements de plans ou des rotations, ce qui, soit dit en passant, donnerait lieu à des constructions plus simples, et en même temps plus naturelles.

Cherchons d'abord la direction de la perpendiculaire commune, en prenant l'intersection des deux plans PxP_1, $S\alpha S_1$ perpendiculaires respectivement aux deux droites. Soit $xma'm'$ cette intersection.

Par la ligne de terre, menons un plan parallèle à cette direction; il est déterminé par la ligne de terre et le point mm', ou bien par la ligne de terre et CC'. Enfin, cherchons l'intersection de ce plan avec AA', soit aa'. Finalement, $aba'b'$ est la perpendiculaire commune demandée.

On suivrait une marche analogue pour trouver, sans changement de plans ni rotations, la perpendiculaire commune à deux droites, lorsque ces deux droites étant quelconques, la perpendiculaire commune est de profil.

La première méthode indiquée (219) pour trouver la direction de la perpendiculaire commune, est ici en défaut, parce que le théorème sur lequel on s'appuie est lui-même (215) en défaut. Il n'en est plus de même lorsqu'on utilise le deuxième procédé (219), parce qu'il définit la direction de la perpendiculaire commune comme l'intersection de deux plans, et que l'on peut toujours trouver autant de points que l'on veut de l'intersection de deux plans.

On mènera donc deux plans perpendiculaires respectivement aux deux droites AA', BB', et leur intersection $mn\,m'n'$ sera la

direction demandée. Pour trouver ensuite la direction de la perpendiculaire commune, on mène, par AA′, un plan parallèle à la direction connue de la perpendiculaire commune *mn*, *m′n′*. Ici, nous retrouvons une difficulté analogue aux précédentes, toujours parce que *mn*, *m′n′* est de profil. Pour éviter cette difficulté, marquons sur AA′ un point arbitraire *aa′*, et menons la ligne de rappel *aa′*, sur laquelle nous prendrons un point *bb′* tel que $ba = nm$, $b'a' = n'm'$, les segments *ab*, *a′b′* étant de même sens que les segments égaux *mn*, *m′n′*. Il reste à trouver l'intersection du plan A*ab*, A′*a′b′* avec la droite BB′. Mais encore une fois, comme nous ne pouvons pas utiliser la droite de profil *ab*, *a′b′*, nous la remplacerons par une autre droite du plan, par exemple, une parallèle à AA′ menée par *bb′*.

6° *Les deux droites sont parallèles à un plan bissecteur.*

La perpendiculaire commune est de profil, et se projette suivant une ligne de rappel équidistante des points de rencontre des projections de même nom des deux droites.

Soit AA′, BB′ (fig. 193, pl. 18), deux parallèles au deuxième plan bissecteur. Le plan de profil *ab*, *a′b′*, équidistant des points *p* et *q*, coupe les deux droites en *aa′*, *bb′*, tels que les segments *ab*, *a′b′* sont égaux et de sens contraires. La droite *aba′b′* est donc bien une perpendiculaire sur le deuxième plan bissecteur, s'appuyant sur les deux droites; et, par suite, c'est la perpendiculaire commune cherchée.

La construction est la même, lorsque les droites AA′, BB′ (fig. 194, pl. 18) sont parallèles au premier plan bissecteur. Les segments *ab*, *a′b′* sont encore égaux, mais dirigés dans le même sens. Donc cette fois, la droite *ab*, *a′b′* est perpendiculaire sur le premier plan bissecteur, et s'appuie sur les deux droites AA′, BB′.

L'égalité des segments *ab*, *a′b′*, résulte de l'égalité des triangles *abp*, *a′b′q′*, qui sont égaux comme étant semblables avec des hauteurs homologues égales.

EXERCICES.

1. Abaisser d'un point une perpendiculaire sur un plan parallèle à la ligne de terre (sans changement de plan ni rotation).

2. Trouver les relations entre les projections des arêtes et les traces des faces d'un trièdre trirectangle.

3. Construire un trièdre trirectangle, connaissant les traces horizontales des trois arêtes en supposant l'une des arêtes parallèle au plan vertical.

4. Même question, les arêtes ayant des positions arbitraires.

5. Construire un trièdre trirectangle, connaissant les projections du sommet SS′ et les projections horizontales des trois arêtes S*a*, S*b*, S*c*. Relations entre ces trois rayons S*a*, S*b*, S*c*, pour que le problème soit possible.

6. Étant donné un sommet d'un parallélipipède rectangle, et une projection de ce solide, trouver l'autre.

LIVRE V

CHANGEMENTS DE PLANS. — ROTATIONS. — RABATTEMENTS

CHAPITRE PREMIER

228. — Le but des changements de plans est le suivant : ***Étant donné une figure déterminée par ses projections dans un système de deux plans de projection rectangulaires, trouver les nouvelles projections de la même figure dans un nouveau système de deux plans de projection rectangulaires quelconques.***

I. — CHANGEMENT DE PLAN POUR UN POINT.

229. — Changement de plan vertical. — Commençons par changer un seul des deux plans de projection, par exemple le plan vertical.

Nous nous proposons donc ici de remplacer le système des deux plans de projection primitifs par un autre système composé, premièrement, du plan horizontal ancien, et deuxièmement, d'un nouveau plan vertical déterminé par sa trace horizontale x_1y_1.

La trace horizontale x_1y_1 du nouveau plan vertical étant l'intersection des deux plans de projection qui constituent le nouveau système, elle sera précisément la nouvelle ligne de terre.

Voyons alors quelles sont les nouvelles projections d'un point défini par ses deux projections aa' dans le système primitif (fig. 103, pl. 9).

1° La projection horizontale a ne change pas, puisque le plan horizontal est commun aux deux systèmes ;

2° La nouvelle projection verticale se trouve sur une nouvelle

ligne de rappel perpendiculaire à x_1y_1 et menée par la projection horizontale a commune aux deux systèmes;

3° La nouvelle projection verticale a'_1 est à une distance de la nouvelle ligne de terre x_1y_1, égale à la distance de l'ancienne projection verticale à l'ancienne ligne de terre xy. En effet, de part et d'autre, cette distance représente la distance du point de l'espace au plan horizontal commun aux deux systèmes;

4° Enfin cette longueur doit être portée dans notre exemple au-dessus de x_1y_1 en lisant x_1y_1 de gauche à droite, puisque dans le système primitif, le point donné était au-dessus du plan horizontal, et qu'il doit y rester. Autrement dit la cote conserve son signe.

Ce que nous venons de dire pour un point quelconque peut évidemment s'appliquer à tous les points d'une figure quelconque; donc le problème du changement de plan vertical est complétement résolu.

230. — Changement de plan horizontal. — Proposons-nous maintenant d'effectuer un changement de plan horizontal, c'est-à-dire de remplacer le système des deux plans de projections primitifs par un autre système composé: 1° du plan vertical; 2° d'un nouveau plan horizontal perpendiculaire par conséquent au plan vertical, et déterminé d'ailleurs par sa trace verticale x_1y_1.

Comme précédemment, x_1y_1 (fig. 104, pl. 9) sera la nouvelle ligne de terre.

Pour trouver les nouvelles projections d'un point aa', nous dirons :

1° La projection verticale a' ne change pas, puisque le plan vertical est commun aux deux systèmes ;

2° La nouvelle projection horizontale se trouve sur une nouvelle ligne de rappel perpendiculaire à x_1y_1 et menée par la projection verticale a' commune aux deux systèmes;

3° La nouvelle projection horizontale est à une distance de la nouvelle ligne de terre, égale à la distance de l'ancienne projection horizontale, à l'ancienne ligne de terre; car l'éloignement est le même dans les deux systèmes;

4° Enfin, dans l'exemple actuel, l'éloignement $a_1\alpha_1$ doit être compté au-dessous de la ligne de terre, parce que dans le système précédent, le point était en avant du plan vertical, et qu'il doit y rester dans le second système.

231. — **Remarque.** — Le sens suivant lequel on doit porter la côte ou l'éloignement d'un point est parfaitement déterminé lorsqu'on a effectué le changement de plan pour un point, de telle sorte qu'on peut alors continuer les opérations du changement de plan sans écrire les lettres x_1y_1.

Par exemple, étant donné deux points dans le premier système ayant leurs projections verticales du même côté de xy, en faisant un changement de plan vertical, les deux nouvelles projections verticales doivent se trouver du même côté par rapport à la nouvelle ligne de terre.

II. — CHANGEMENT DE PLAN POUR UNE DROITE.

232. — *Pour trouver la nouvelle projection d'une droite, il suffit d'effectuer le changement de plan pour deux points de cette droite.*

Parmi les points de cette droite, il est avantageux de choisir la trace qui ne change pas, c'est-à-dire la trace sur le plan commun aux deux systèmes.

Soit à effectuer le changement de plan vertical x_1y_1 pour la droite AA′ (fig. 105, pl. 9).

Nous choisirons comme premier point la trace horizontale aa'.

L'avantage qu'il y a à choisir ce point, c'est que sa nouvelle projection verticale se trouve sur la ligne de terre ; on n'a donc pas de côte à transporter.

Il est bien entendu que si ce choix particulier ne pouvait pas réussir, on n'aurait qu'à prendre un autre point quelconque, bb' par exemple, qui a pour nouvelle projection verticale b'_1.

Ainsi donc $a'_1b'_1$ est la nouvelle projection verticale de la droite.

233. — **Problème.** — *Trouver directement dans l'exemple précédent la nouvelle trace verticale de la droite* AA′ (fig. 105, pl. 9).

La nouvelle trace verticale de AA′ doit se projeter horizontalement dans le nouveau système sur la nouvelle ligne de terre x_1y_1. Il suffit donc d'effectuer le changement de plan pour le point cc' qui se projette horizontalement sur x_1y_1, et qui a pour nouvelle projection verticale c'_1.

Ainsi cc'_1 est la nouvelle trace verticale de la droite.

On reconnait par là que pour trouver la nouvelle trace verticale de la droite, il n'était pas nécessaire de connaître la nouvelle projection verticale A'_1 de la droite.

Ce que nous venons de faire pour un changement de plan vertical s'appliquerait bien entendu à un changement de plan horizontal.

III. — CHANGEMENT DE PLAN POUR UN PLAN.

234. — Si l'on veut déterminer un plan dans un nouveau système, *il suffit d'effectuer le changement de plan pour trois points du plan, ou, ce qui revient au même, pour une droite et un point, ou enfin pour deux droites.*

235. — **Exemple I.** — *Soit à effectuer le changement de plan vertical* x_1y_1 pour le plan ABA'B' (fig. 106, pl. 9).

Nous marquerons sur chacune des deux droites un point; *aa'*, *bb'*, ces deux points avec le point de rencontre *oo'* détermineront le plan ; puis nous effectuerons le changement de plan indiqué pour ces trois points. Soit $a'_1b'_1o'_1$ leurs nouvelles projections verticales. Le plan est donc maintenant déterminé par les trois points aa'_1, bb'_1, oo'_1, ou par les deux droites $oa, o'_1a'_1, obo'_1b'_1$.

236. — Problème. — *Trouver directement dans l'exemple précédent la nouvelle trace verticale du plan.*

Pour résoudre cette question, il suffit de joindre par une ligne droite les traces verticales nouvelles des deux droites qui déterminent le plan donné.

Ainsi $\alpha\beta\alpha'_1\beta'_1$ est la nouvelle trace verticale demandée.

237. — Remarque. — Si la construction ne pouvait pas réussir, on n'aurait qu'à remplacer les deux droites qui déterminent le plan donné par d'autres droites mieux choisies dans le plan pour résoudre le problème.

238. — **Exemple II.** — Dans ce nouvel exemple, nous allons nous proposer de *trouver les nouvelles traces d'un plan, en supposant le plan déterminé primitivement par ses traces.* La marche à suivre est la même que précédemment, et pour s'en

rendre compte, il suffit d'employer les mêmes notations, en appelant, par exemple, la trace horizontale AA'; et la trace verticale BB'.

Soit donc à effectuer le changement de plan vertical x_1y_1 pour le plan $P\alpha P_1$ (fig. 107, pl. 9).

Nous dirons : 1° la trace horizontale $P\alpha$ ne change pas, puisque le plan horizontal est commun aux deux systèmes ; 2° cherchons la nouvelle trace verticale, et pour cela déterminons les traces verticales nouvelles aa'_1, bb'_1 des deux droites qui déterminent le plan donné.

Finalement, $a'_1b'_1$ est la nouvelle trace verticale demandée.

Voici comment on peut encore énoncer cette construction : 1° la trace horizontale $P\alpha$ ne change pas ; 2° son point de rencontre aa' avec la nouvelle ligne de terre appartient à la nouvelle trace verticale ; 3° effectuons le changement de plan pour le point bb' du plan qui se projette horizontalement au point de rencontre des deux lignes de terre. Le point ainsi obtenu bb'_1 ayant son éloignement nul appartiendra aussi à la trace verticale nouvelle. Donc $a'_1b'_1$ est cette trace verticale nouvelle demandée.

Cette explication présente un inconvénient que n'a pas la première, c'est qu'on ne se rend pas compte du moyen de transformer la construction lorsqu'elle ne réussit pas ; tandis qu'avec la première explication, on comprend bien que si la construction ne réussit pas avec certaines droites particulières du plan, on a toujours le droit d'en choisir d'autres dans le même plan.

IV. — PRENDRE UN PLAN QUELCONQUE COMME PLAN DE PROJECTION.

239. — Étant donné un plan quelconque $P\alpha P_1$ (fig. 108, pl. 10), il est impossible, d'après ce que nous avons vu précédemment, de le prendre directement comme plan horizontal de projection, à moins que le plan donné soit perpendiculaire au plan vertical.

Il est donc indispensable de commencer par rendre le plan donné perpendiculaire au plan vertical. Pour cela, il faudra nécessairement effectuer un changement de plan vertical.

Le nouveau plan vertical doit être perpendiculaire sur le plan horizontal dans le système primitif, et sur le nouveau plan horizontal $P\alpha P_1$ dans le nouveau système. Autrement dit, le nouveau plan vertical est perpendiculaire sur $P\alpha$.

En résumé, pour prendre le plan $P\alpha P_1$ comme plan horizontal, commençons premièrement par effectuer un changement de plan vertical, en prenant comme ligne de terre x_1y_1 une perpendiculaire sur la trace horizontale $P\alpha$ du plan donné. Ce changement de plan a pour but de rendre le plan donné perpendiculaire au plan vertical. Soit, par exemple, $\alpha_1P'_1$ la nouvelle trace verticale du plan donné.

Maintenant que le plan est perpendiculaire au plan vertical, on a le droit de le prendre comme plan horizontal. La deuxième opération est donc un changement de plan horizontal, en prenant $P'_1\alpha_1$ comme ligne de terre.

V. — RENDRE UNE DROITE VERTICALE.

240. — Ce problème est identique au précédent; en effet, si l'on rend une droite AA′ (fig. 109, pl. 10) verticale, c'est qu'on a pris un plan $P\alpha P_1$ perpendiculaire à la droite comme plan horizontal de projection.

1re OPÉRATION. — Changement de plan vertical, ayant pour but de rendre le plan $P\alpha P_1$ perpendiculaire au plan vertical, ou, ce qui revient au même, ayant pour but de rendre la droite AA′ parallèle au plan vertical. Il faut donc choisir comme ligne de terre x_1y_1 une parallèle à A. Soit A'_1 la nouvelle projection verticale de AA′.

2e OPÉRATION. — Changement de plan horizontal ayant pour but de rendre AA′ verticale ou bien de rendre le plan $P\alpha P'_1$ horizontal. Il faut donc choisir cette fois la ligne de terre x_2y_2 perpendiculaire sur A'_1.

Après ces deux opérations, la droite se projette verticalement suivant A'_1 et horizontalement suivant le point A_2.

Lorsqu'on a l'occasion d'effectuer, comme nous venons de le faire, plusieurs changements de plans successifs, on n'a pas à tenir compte des relations que les différentes figures obtenues pourraient avoir entre elles. Nous voulons dire par là qu'il faut appliquer mécaniquement les règles du changement de plan pour chaque point, sans chercher à se rendre compte si ces points se déplacent, car il n'y a ici aucun déplacement.

Aussi en lisant une épure de changement de plan, il ne faut voir dans chaque système que les projections concernant ce système, en faisant abstraction de toutes les autres.

Ainsi dans le premier système, il ne faut s'occuper que des points aa', bb', cc', etc.; dans le deuxième système, il ne faudra voir que les points aa'_1, bb'_1, cc'_1, etc., et de même pour tous les changements de plans successifs.

VI. — REMPLACER LE SYSTÈME DES DEUX PLANS DE PROJECTION PAR UN AUTRE SYSTÈME DE DEUX PLANS RECTANGULAIRES QUELCONQUES.

241. — Nous arrivons enfin au problème général des changements de plans, dans lequel on se propose de changer simultanément les deux plans de projection.

Soit, par exemple, $P\alpha P_1$ (fig. 110, pl. 10) le plan qui doit être pris comme plan horizontal de projection, et $ltl't'$ l'intersection de ce plan avec celui qui doit servir plus tard de plan vertical.

Nous ne pouvons rien nous donner en plus du nouveau plan vertical, car il est complétement déterminé par une droite, puisqu'il doit être perpendiculaire sur le plan $P\alpha P_1$.

A l'aide de deux opérations, nous prendrons le plan $P\alpha P_1$ comme plan horizontal, et ensuite nous choisirons le deuxième plan comme plan vertical de projection.

Voici donc la série d'opérations à effectuer :

1[re] OPÉRATION. — Changement de plan vertical x_1y_1 ayant pour but de rendre le plan $P\alpha P_1$ perpendiculaire au nouveau plan vertical.

Appliquons ce changement de plan à tous les éléments de la figure et remarquons que dans ce système x_1y_1, tous les points du plan $P\alpha P_1$ se projettent verticalement sur sa trace verticale.

2[e] OPÉRATION. — Changement de plan horizontal x_2y_2 en prenant comme ligne de terre la trace verticale nouvelle du plan $P\alpha P_1$. Actuellement, le plan $P\alpha P_1$ est pris comme plan horizontal de projection; quant à l'autre plan, il est maintenant vertical et a pour trace horizontale l_2t_2.

3[e] OPÉRATION. — Changement de plan vertical l_2t_2. Après ces trois opérations, le problème général que nous nous étions proposé est enfin résolu.

Comme exercice, on fera bien de reprendre les raisonnements précédents, de manière à choisir le plan $P\alpha P_1$ comme plan vertical, et le deuxième plan donné comme plan horizontal.

CHAPITRE II

I. — ROTATION D'UN POINT. — RELATION ENTRE LES ROTATIONS ET LES CHANGEMENTS DE PLANS.

242. — Le but général des rotations est le suivant : ***Étant donné deux plans rectangulaires, amener ces deux plans à coïncider avec les deux plans de projection à l'aide de mouvements de rotation autour d'axes convenablement choisis.***

En tournant autour d'une droite fixe, un point quelconque décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation, et dont le centre est sur l'axe. De plus, le rayon aboutissant à la nouvelle position du point fait avec le rayon aboutissant à l'ancienne position du point un angle égal à l'angle de rotation, et compté dans le sens de la rotation.

Pour qu'il soit possible de représenter l'arc de cercle décrit par chaque point dans ce mouvement, il est nécessaire que le plan de ce cercle soit parallèle à l'un des plans de projection. Nous supposerons donc toujours l'axe de rotation perpendiculaire sur l'un des plans de projection.

243. — Rotation d'un point autour d'un axe vertical. — Proposons-nous, par exemple, de *faire tourner le point* aa' (fig. 111, pl. 10) *autour de la verticale* o *d'un angle* α *dans le sens de la flèche* F.

1° L'axe de rotation étant vertical, la circonférence décrite par le point se projette horizontalement suivant une circonférence décrite du point o comme centre, avec oa pour rayon, et verticalement suivant une parallèle à la ligne de terre menée par a'.

2° Le nouveau rayon oa_1 fait avec l'ancien oa en projection horizontale un angle égal à l'angle de rotation α.

3° Cet angle aoa_1 est compté dans le sens de la rotation indiquée par la flèche F.

244. — Remarque. — Le résultat trouvé après une rotatior peut s'obtenir également par un changement de plan. Autremen dit, une rotation et un changement de plan sont choses équivalentes.

Dans l'exemple précédent (fig. 111, pl. 10), faisons tourner la ligne de terre xy d'un angle égal à l'angle de rotation, mais en sens contraire du sens indiqué ; soit x_2y_2 la nouvelle position de xy.

Effectuons ensuite le changement de plan vertical x_2y_2 pour tous les éléments de la figure primitive.

Nous allons vérifier que la figure obtenue après la rotation dans le système primitif xy est identique avec la figure obtenue après le changement de plan vertical x_2y_2.

En effet, faisons tourner la figure obtenue après le changement de plan autour du point o, d'un angle α dans le sens de la rotation.

La droite $o\omega_2$ prend la position $o\omega$, oa vient coïncider avec oa_1 ; x_2y_2, qui est perpendiculaire à $o\omega_2$, prend la position xy perpendiculaire sur $o\omega$.

Puis la droite $a\alpha_2$, qui est perpendiculaire sur x_2y_2, coïncide avec $a_1\alpha_1$ perpendiculaire sur xy. Enfin, le point a'_2 vient en a'_1, parce que les deux cotes $a'_2\alpha_2$, $a'_1\alpha_1$ sont égales ; donc les résultats sont bien identiques.

Jusqu'à présent, nous avons fait tourner simplement un point autour d'un axe vertical, mais si au lieu d'un point on avait une figure quelconque, on n'aurait qu'à faire tourner successivement tous les points de la figure.

Enfin la marche à suivre est la même, lorsqu'au lieu d'un axe vertical, on a un axe perpendiculaire au plan vertical.

II. — ROTATION D'UNE DROITE.

245. — *Pour faire tourner une droite autour d'un axe, il suffit d'en faire tourner deux points.* Parmi les différents points de cette droite, il est assez utile de choisir le pied de la perpendiculaire commune entre la droite et l'axe.

Soit à faire tourner la droite AA' autour de la verticale o (fig. 112, pl. 10).

Choisissons comme premier point le pied aa' de la perpendiculaire commune entre la droite et l'axe, il vient en $a_1a'_1$. Il

résulte de là que la nouvelle projection A_1 de la droite A est une perpendiculaire sur oa_1 menée par a_1.

Tel est le principal avantage qu'il y a à choisir comme premier point le point aa'.

Faisons ensuite tourner un deuxième point de la droite, soit la trace horizontale hh'. Comme vérification, le point h_1 doit se trouver sur A_1. En choisissant ce deuxième point, on fait une économie d'une parallèle à la ligne de terre qui ici est remplacée par la ligne de terre elle-même. Ainsi donc a_1h_1, $a'_1h'_1$ sont les nouvelles projections de la droite.

III. — ROTATION D'UN PLAN.

246. — *Pour faire tourner un plan autour d'une droite, il suffit d'en faire tourner trois points, ou bien une droite et un point, ou enfin deux droites.*

Il est utile de choisir comme premier point, le point de rencontre du plan avec l'axe, parce que ce point reste fixe.

Soit à faire tourner le plan $P\alpha P_1$ (fig. 113, pl. 10) autour de la verticale o.

Commençons par déterminer le point fixe oo' à l'aide de la ligne de front du plan $ofo'f'$ qui rencontre l'axe, puis faisons tourner une droite quelconque du plan, par exemple la trace horizontale.

Soit $R\beta$ la nouvelle trace horizontale du plan ; le nouveau plan sera déterminé par sa trace horizontale $R\beta$ et le point oo'. On a suivant $o\varphi o'\varphi'$ une ligne de front du plan dans sa nouvelle position, il en résulte que la nouvelle trace verticale $R_1\beta$ s'obtient en menant par β une parallèle à $o'\varphi'$.

IV. — RENDRE UN PLAN HORIZONTAL.

247. — En faisant tourner un plan quelconque autour d'un axe vertical, l'angle de ce plan avec le plan horizontal ne change pas ; donc il ne peut pas devenir nul.

De même, en faisant tourner un plan autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical, l'angle du plan avec le plan vertical ne change pas ; donc il ne peut pas devenir un angle droit.

Il est donc impossible, à l'aide d'une seule rotation, d'amener

un plan à être horizontal, à moins cependant que le plan soit déjà perpendiculaire au plan vertical.

En effet, soit $P\alpha P_1$ (fig. 114, pl. 10) un plan perpendiculaire au plan vertical, en le faisant tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical, le plan reste constamment perpendiculaire au plan vertical, tandis que l'angle du plan avec le plan horizontal prend toutes les grandeurs possibles, et en particulier peut devenir nul. Il suffit, pour arriver à ce résultat, d'amener la trace verticale $P_1\alpha$ à être parallèle à la ligne de terre. L'angle de rotation est donc mesuré par $a'o'a'_1$, qui indique en même temps le sens de la rotation. Ainsi après cette rotation, le plan donné est devenu le plan horizontal H_1.

Revenons maintenant à la question primitive, rendre un plan horizontal. Il est entendu que ce problème ne peut se résoudre à l'aide d'une seule rotation, que si le plan est déjà perpendiculaire au plan vertical. Donc, le plan donné étant quelconque, il faut commencer par le rendre perpendiculaire au plan vertical.

Cette nouvelle opération ne peut se faire que par une rotation autour d'un axe vertical, qui ne change pas l'angle du plan avec le plan horizontal, mais permet à l'angle avec le plan vertical de devenir droit. Il suffit en effet, d'amener la trace horizontale, à être perpendiculaire à la ligne de terre.

Voici donc, en résumé, la série d'opérations à effectuer pour rendre un plan horizontal (fig. 115, pl. 10).

1re OPÉRATION. — Rotation autour de l'axe vertical o, ayant pour but d'amener le plan $P\alpha P_1$ à être perpendiculaire au plan vertical. Cette rotation est mesurée par l'angle aoa_1, elle donne au plan la position $R\beta R_1$.

2e OPÉRATION. — Rotation autour de la perpendiculaire au plan vertical ω', ayant pour but d'amener le plan $R\beta R_1$ à être parallèle au plan horizontal. Cette nouvelle rotation est mesurée par l'angle $b'\omega'b'_1$.

Finalement, le plan donné est devenu le plan horizontal H_1.

V. — RENDRE UNE DROITE VERTICALE.

Comme nous l'avons vu à propos des changements de plan, ce problème est identique au précédent ; aussi nous contenterons-nous d'indiquer les opérations successives qui permettent de le résoudre.

Soit à rendre la droite AA′ verticale (fig. 116, pl. 10).

1re OPÉRATION.—Rotation autour de la verticale *o*, ayant pour but de rendre la droite parallèle au plan vertical. Cette rotation est mesurée par l'angle aoa_1, et la droite AA′ prend la position $A_1A'_1$.

2e OPÉRATION. — Rotation autour de la perpendiculaire au plan vertical ω′, permettant de rendre la droite verticale. Cette nouvelle rotation est mesurée par l'angle $b'_1\omega'b'_2$; et la droite $A_1A'_1$ devient la verticale A_2.

248. — Problème. — *Amener deux plans rectangulaires à être parallèles au plan de projection.*

Pour résoudre ce dernier problème général des rotations, il faudra, comme cela s'est présenté pour les changements de plan, trois opérations successives. Les deux premières opérations rendent le premier plan horizontal, et la troisième rend le second plan parallèle au plan vertical.

CHAPITRE III

RABATTEMENTS.

Parmi les différents problèmes que nous venons de résoudre, le plus souvent employé est celui dans lequel on rend un plan parallèle à l'un des plans de projection.

Nous savons résoudre ce problème, soit avec deux changements de plan successifs, soit à l'aide de deux rotations successives.

D'ailleurs, nous savons qu'un changement de plan et une rotation sont choses équivalentes ; donc au lieu de deux opérations successives de même nature, on peut faire successivement un changement de plan puis une rotation.

L'ensemble de ces deux opérations dans l'ordre indiqué constitue ce qu'on appelle un *rabattement.*

Voici une autre manière d'envisager cette question. Pour rendre un plan horizontal, la marche naturelle consiste à le faire tourner autour de l'une de ses horizontales, d'un angle égal à l'angle du plan donné avec le plan horizontal. Or, pour ramener cette rotation aux rotations ordinaires, il est nécessaire de rendre l'axe, ou la charnière, perpendiculaire à l'un des plans de projection ; de là le changement de plan primitif suivi enfin d'une rotation. On pourrait aussi commencer par la rotation pour finir par le changement de plan, mais cette façon de procéder ne s'emploie pas généralement.

249. — Problème. — *Soit, par exemple, à rabattre le plan* aHa'H' *sur le plan horizontal* H' (fig. 117, pl. 10).

1^re^ OPÉRATION. — Changement de plan vertical x_1y_1, ayant pour but de rendre la charnière HH' perpendiculaire au plan vertical.

L'axe a pour nouvelle projection verticale le point H'_1, et le point aa' vient se projeter verticalement en a'_1. Il résulte de là que le plan a pour trace verticale $a'_1H'_1$.

2^e^ OPÉRATION. — Rotation autour de la perpendiculaire au plan

vertical H'_1 ayant pour but de rendre le plan donné horizontal. Cette rotation est mesurée par l'angle $a'_1H'_1a'_2$, qui indique en même temps le sens du rabattement. Enfin le point aa'_1 a pour rabattement $a_2a'_2$.

I. — RABATTEMENT D'UN POINT QUELCONQUE.

Proposons-nous d'appliquer au point mm', les opérations que nous venons d'indiquer. La première opération nous donne en m'_1 la nouvelle projection verticale du point.

Pour effectuer simplement la deuxième, abaissons du point mm' une perpendiculaire $m\mu m'_1\mu'_1$ sur le plan, et au lieu de faire tourner le point lui-même, faisons tourner le point $\mu\mu'_1$ qui vient en $\mu_2\mu'_2$. Quant au point mm'_1, il vient en $m_2m'_2$, la longueur $\mu'_2m'_2$ étant égale à $\mu'_1m'_1$.

En employant cette manière de procéder, on n'a pas à construire l'angle $m'_1H'_1m'_2$ égal à l'angle de rotation. De plus, en demandant le rabattement du point, c'est le point m_2 qu'il faut trouver, donc il est en général inutile de marquer le point m'_2.

II. — RABATTEMENT D'UN POINT DU PLAN. — SIMPLIFICATIONS.

Les constructions précédentes se simplifient, lorsque le point que l'on veut rabattre est contenu dans le plan qu'on rabat.

Soit par exemple (fig. 118, pl. 10) m la projection horizontale d'un point du plan $aHa'H'$. Dans le système x_1y_1, ce point se projettera verticalement en m'_1 sur la trace verticale du plan donné ; la rotation l'amène en $m_2m'_2$.

250. — Règle du triangle rectangle. — Nous pouvons donc dire que *le rabattement* m_2 *d'un point quelconque du plan se trouve sur une perpendiculaire à la projection horizontale de la charnière menée par la projection horizontale du point, et à une distance de la projection horizontale de la charnière qui est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, ayant pour côtés de l'angle droit, les distances des deux projections du point aux deux projections de même nom de la charnière.*

Cette règle, comme nous l'avons dit en commençant, ne s'applique qu'aux points contenus dans le plan. Nous engageons le

lecteur à ne l'employer que dans le cas où on n'a qu'un petit nombre de points à rabattre, parce que les différents triangles rectangles construits pour chaque point gênent la lecture de l'épure, tandis qu'il n'en est pas de même en faisant le changement de plan une seule fois.

Voici encore une autre simplification du même problème en supposant connu le rabattement d'un premier point du plan.

Soit par exemple H la projection horizontale de la charnière (fig. 119, pl.10), *a* la projection horizontale d'un point du plan, et a_2 le rabattement de ce point.

Soit enfin *m*, la projection horizontale d'un point quelconque du plan. Joignons *am*; cette droite rencontre H en un point fixe μ, donc elle se rabat suivant $a_2\mu$, et par suite le point *m* se rabat en m_2 sur $a_2\mu$.

On peut encore se servir du rabattement d'une droite du plan, pour en déduire le rabattement d'un point quelconque *p* du plan.

Menons en effet l'horizontale $p\pi$ (fig. 119, pl. 10), elle se rabat suivant une parallèle à H menée par π_2 rabattement de π; donc le point *p* se rabat en p_2. Par ce dernier procédé, on n'a pas à craindre que le point μ sorte des limites de l'épure.

On pourra choisir, par exemple, comme droite $a\mu$, la trace verticale du plan.

On peut encore trouver le rabattement des différents points contenus dans le plan que l'on rabat, sans décomposer cette opération en changement de plan et rotation, mais encore une fois, la construction particulière que nous avons en vue, ne s'applique, comme les précédentes, qu'à des points contenus dans le plans que l'on rabat.

Soit un plan déterminé par le point *mm'* et l'horizontale HH' (fig. 195, pl. 18); nous nous proposons de rabattre ce plan sur le plan horizontal H' autour de l'horizontale HH'.

Considérons la ligne de front *mf m'f'* du plan passant par le point donné, elle coupe la charnière au point *ff'*, qui restera fixe dans le rabattement. Quant au point *mm'*, il se rabat sur une perpendiculaire à la projection horizontale de la charnière H, menée par la projection horizontale *m* du point. Enfin, il se trouve à une distance du point *f*, égale à la longueur de la ligne de front *mf m'f'*. Or, cette longueur est connue, elle est mesurée en projection verticale par *m'f'*.

Il suffit donc de dessiner une circonférence de *f* comme

centre avec $m'f'$ comme rayon, elle donne en m_2 le rabattement demandé.

Cette façon particulière de procéder revient à remplacer les deux opérations du rabattement par une rotation autour du point ff', seulement la construction à laquelle nous sommes conduits est en défaut, lorsque la charnière est parallèle à la ligne de terre.

Insistons encore une fois sur ce fait que les constructions particulières du rabattement caractérisées par l'emploi du triangle rectangle, ou bien par le rabattement d'un premier point ou d'une droite (ce qui revient à considérer la deuxième figure comme une transformation homographique de la première), ou encore par la ligne de front; toutes ces constructions, disons-nous, ne s'appliquent qu'au rabattement et au relèvement des points contenus dans le plan.

Aussitôt qu'on a à rabattre ou à relever des points en dehors du plan, il est indispensable de décomposer le rabattement en changement de plan et rotation.

III. — EMPLOI DES CHANGEMENTS DE PLANS. — ROTATIONS. — RABATTEMENTS.

251. — Jusqu'à présent, nous avons exposé les méthodes des changements de plans, rotations et rabattements sans en montrer les applications. Avant d'aborder ce chapitre, il faut indiquer comment ces méthodes peuvent être employées dans la résolution des problèmes.

Étant donné un problème de géométrie descriptive à résoudre, il faut d'abord s'occuper de la partie purement géométrique du problème, ensuite on examinera les positions particulières que l'on peut faire prendre aux données, pour qu'il soit facile d'exécuter les constructions indiquées dans la solution géométrique. On est donc conduit à effectuer des changements de plan, rotations ou rabattements ayant pour but d'amener les données dans des conditions particulières par rapport aux plans de projection.

Comme exemple simple, citons la construction d'un cube. Il résulte des propriétés géométriques du cube, qu'il est excessivement facile de construire ce solide, lorsqu'il a une face dans le plan horizontal. Si donc avec les éléments connus du cube, on

peut mettre en évidence le plan d'une face, il sera bon de choisir ce plan particulier comme plan de projection, à l'aide de deux changements de plans successifs, ou de deux rotations successives, ou enfin à l'aide d'un rabattement.

Quant au choix de l'une ou l'autre de ces méthodes, il appartient tout entier à celui qui fait l'épure, puisque nous avons démontré l'équivalence des trois procédés.

En général, on pourrait cependant préférer les changements de plans comme gênant moins l'épure. En effet, après un changement de plan, on n'a que trois projections du système à dessiner, tandis qu'après une rotation, on a en tout quatre projections du même système à dessiner. Cependant, il n'en serait pas de même si le système était de révolution, et qu'on pût choisir comme axe de rotation l'axe du système.

On fera donc bien d'examiner si d'après la disposition des données, telle méthode ne donnerait pas lieu accidentellement à des constructions plus simples que telle autre méthode.

Enfin on n'oubliera pas que des notations bien choisies, en soulageant la mémoire, facilitent toujours le travail.

CHAPITRE IV

I. — DISTANCE DE DEUX POINTS.

Pour résoudre cette question, nous nous appuierons sur ce fait, *que toute figure plane se projette sur un plan parallèle au plan de la figure, suivant une ligne égale.*

Il suffit donc, pour trouver la distance de deux points, d'amener la droite qui joint ces deux points à être parallèle à l'un des plans de projection.

On arrive d'ailleurs à ce résultat à l'aide d'un changement de plan ou d'une rotation.

252. — Problème. — *Soit,* par exemple, *à trouver la distance de deux points* $aa'bb'$ (fig. 120, pl. 10).

Effectuons un changement de plan vertical ayant pour but de rendre $aba'b'$, parallèle au plan vertical. Nous choisirons alors comme ligne de terre x_1y_1 une parallèle à ab, par exemple ab elle-même. Les nouvelles projections verticales des deux points sont a'_1,b'_1; donc $a'_1b'_1$ mesure la distance des deux points.

253. — Élévation du plan horizontal. — Étant donnée une figure quelconque, si on diminue les cotes des différents points d'une même quantité, on obtient une figure égale à la première. Dans l'exemple précédent, diminuons les cotes des deux points aa',bb' de la quantité $a'\alpha$, nous aurons ainsi en $a'_1b'_1$ (fig. 121, pl. 11) la nouvelle projection verticale de la droite.

Ainsi donc, au lieu de compter les cotes jusqu'au plan horizontal primitif, nous les comptons seulement jusqu'au plan horizontal a'. On dit qu'on a élevé le plan horizontal jusqu'en a'.

Pour mieux rattacher cette construction aux constructions ordinaires, sans pour cela introduire de nouvelles conventions, il suffit de dire qu'on a choisi comme ligne de terre L_1T_1, la longueur $a'_1\alpha_1$ étant égale à $a'\alpha$.

Au lieu d'un changement de plan vertical, on serait arrivé au

même résultat, avec un changement de plan horizontal, en prenant la ligne de terre parallèle à $a'b'$.

La figure **122**, planche **10**, nous donne encore la distance des deux points aa', bb' à l'aide cette fois d'une rotation. Nous avons choisi comme axe la verticale a. En faisant tourner la droite de l'angle bab_1, elle devient la ligne de front $ab_1a'b'_1$, de sorte que finalement $a'b'_1$ mesure la distance des deux points.

Enfin on aurait pu effectuer une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical, de manière à rendre la droite parallèle au plan horizontal.

Nous savons donc maintenant trouver la distance d'un point à un plan, d'un point à une droite et la plus courte distance de deux droites. Nous allons quand même, comme exercice, résoudre directement ces différents problèmes.

II. — DISTANCE D'UN POINT A UN PLAN.

254. — Pour résoudre ce problème, nous le ramènerons au cas particulier où le plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection.

Soit donc à trouver (fig. 123, pl. 10) la distance du point AA′ au plan $P\alpha P_1$. Effectuons le changement de plan vertical x_1y_1 ayant pour but de rendre le plan $P\alpha P_1$ perpendiculaire au plan vertical.

Soit, par exemple, $\alpha_1P'_1$ la nouvelle trace verticale du plan, et A'_1 la nouvelle projection verticale du point.

Dans le système actuel, la perpendiculaire au plan a pour projection $AmA'_1m'_1$, et de plus $A'_1m'_1$ mesure la distance du point au plan.

Si nous revenons au système primitif, nous aurons en $A'm'$ la projection verticale de la perpendiculaire, et en même temps en mm' le pied de la perpendiculaire. Comme vérification, $A'm'$ est perpendiculaire sur $P\alpha$.

III. — DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE.

255. — On peut résoudre ce problème, en rendant la droite perpendiculaire à l'un des plans de projection, ou bien en ren-

dant le plan déterminé par le point et la droite parallèle à l'un des plans de projection.

Seulement, ces solutions nécessitant deux changements de plans ou deux rotations ou un rabattement, nous choisirons de préférence la première méthode qui consiste à mener la perpendiculaire et ensuite à en chercher la longueur. On n'appliquera donc les autres constructions énoncées précédemment que comme exercices.

IV. — PLUS COURTE DISTANCE ENTRE DEUX DROITES.

256. — Pour résoudre ce problème, il suffit d'amener les droites dans les positions particulières où nous avons reconnu qu'il était facile de construire la perpendiculaire commune.

Par exemple, on peut amener l'une des droites à être perpendiculaire sur l'un des plans de projection, ou bien les deux droites à être parallèles à l'un des plans de projection, ce qui nécessitera deux opérations.

On peut encore rendre deux projections de même nom des deux droites parallèles entre elles,à l'aide d'une seule opération, changement de plan ou rotation. Cette manière de procéder sera l'une des meilleures, lorsqu'on voudra trouver uniquement la plus courte distance, sans chercher la perpendiculaire commune.

Quant au dernier cas particulier d'une horizontale et d'une ligne de front, il ne nécessite réellement que deux opérations, mais on n'en déduit pas assez rapidement la perpendiculaire commune, ni la plus courte distance, pour qu'on puisse s'en servir avantageusement.

Comme exercices, nous allons appliquer les trois méthodes à trois exemples de perpendiculaires communes.

257. — Exemple I. — *Trouver la perpendiculaire commune aux deux droites* AA', BB' *et leur plus courte distance* (fig. 124, pl. 11), à l'aide de changements de plans ayant pour but de rendre AA' verticale.

1re OPÉRATION. — Changement de plan vertical x_1y_1 ayant pour but de rendre AA' parallèle au plan vertical; A_1',B_1' sont les projections verticales nouvelles des deux droites.

2e OPÉRATION. — Changement de plan horizontal x_2y_2 rendant

la droite AA'_1 verticale. La droite A a pour nouvelle projection horizontale le point A_2, et la droite B se projette horizontalement suivant B_2.

Actuellement, a_2b_2 mesure la plus courte distance entre les deux droites; d'ailleurs, dans le système x_2y_2, la perpendiculaire commune est horizontale, et elle a pour projections $a_2b_2a'_1b'_1$.

Dans le système x_1y_1, les deux pieds de la perpendiculaire commune se projettent horizontalement en a et b sur A et B, et enfin dans le système xy, ils se projettent verticalement en a' et b' sur A' et B'.

Ainsi finalement $aba'b'$ est la perpendiculaire commune; en même temps a_2b_2 mesure la plus courte distance entre les deux droites.

258. — Exemple II. — *Trouver la perpendiculaire commune et la plus courte distance entre les deux droites* AA'BB' (fig. 125, pl. 11), *à l'aide de rotations ayant pour but de rendre les deux droites parallèles au plan horizontal.*

Commençons par construire un plan parallèle aux deux droites, et pour cela menons par un point de l'espace des parallèles aux deux droites.

Nous avons choisi comme point de l'espace, le point oo' de AA' et projeté horizontalement sur B. pour n'avoir à mener que la parallèle à B'.

1re OPÉRATION. — Rotation autour de la verticale o ayant pour but de rendre le plan $A\beta A'\beta'$ perpendiculaire au plan vertical.

Nous choisissons autant que possible comme axe la verticale o qui rencontre les deux droites données, dans le but d'introduire des points fixes.

Effectuons d'abord la rotation pour A et β, puis nous en déduirons $B_1B'_1$ qui doit être parallèle à $\beta_1\beta'_1$ et menée par le point fixe de BB'.

Après cette rotation, on a la plus courte distance entre les deux droites, elle est mesurée par la distance entre les projections verticales A'_1 et B'_1.

2e OPÉRATION. — Rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical, par exemple la perpendiculaire au plan vertical ω'. Cette rotation mesurée par l'angle $o'\omega'o'_2$ amène A_1 et β_1 en $A_2A'_2$ et $\beta_2\beta'_2$. Il reste à faire tourner un point quelconque de $B_1B'_1$ soit $q_1q'_1$ qui vient en $q_2q'_2$. Nous menons ensuite par ce point $q_2q'_2$ une parallèle à $\beta_2\beta'_2$.

La perpendiculaire commune est alors la verticale $a_2b_2a'_2b'_2$. Effectuons enfin sur cette droite des opérations inverses des précédentes, ce qui donne $a_1b_1a'_1b'_1$ avant la deuxième rotation et $aba'b'$ avant la première.

259. — Exemple III. — *Trouver la plus courte distance et la perpendiculaire commune aux deux droites* AA'BB' (fig. 126, pl. 11), *à l'aide d'un rabattement ayant pour but de rendre les deux droites parallèles au plan horizontal.*

1re OPÉRATION. — Changement de plan vertical x_1y_1 ayant pour but de rendre le plan Aβ, qui est parallèle aux deux droites, perpendiculaire au plan vertical. Les deux droites A et β ont pour nouvelles projections verticales A'_1 et β'_1, qui coïncident avec la trace verticale actuelle du plan Aβ. Quant à la projection verticale B'_1, étant parallèle à β'_1, elle sera déterminée par un point.

La DEUXIÈME OPÉRATION est la même que dans l'exemple précédent.

Après ces deux opérations, la perpendiculaire commune est la verticale a_2b_2, $a'_2b'_2$. Une opération inverse de la rotation nous donne $aba'_1b'_1$, et enfin, dans le système primitif $aba'b'$ est la perpendiculaire commune cherchée. D'ailleurs, la plus courte distance était mesurée après le premier changement de plan par la distance entre A'_1 et B'_1.

V. — ANGLE DE DEUX DROITES.

260. — Définition. — *On appelle angle de deux droites, l'angle de deux parallèles à ces deux droites menées par un même point de l'espace.*

Nous pouvons donc, d'après cela, supposer que les deux droites données se rencontrent. On aura alors l'angle des deux droites, en amenant le plan de ces deux droites à être parallèle à l'un des plans de projection, à l'aide de deux changements de plan, ou bien de deux rotations, ou enfin d'un rabattement.

La construction la plus simple étant donnée par un rabattement, nous avons employé cette méthode (fig. 127, pl. 11) pour trouver l'angle des deux droites $oao'a'$, $obo'b'$. Il suffit, en effet, d'appliquer la règle du triangle rectangle au point oo', les deux points de rencontre des deux droites avec la charnière $aba'b'$ étant fixes. Ainsi ao_1b est l'angle demandé.

VI. — ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN.

261. — *Cet angle est le complément de l'angle de la droite avec une perpendiculaire au plan.*

On mènera donc par un point de la droite une perpendiculaire sur le plan, puis on déterminera, comme dans l'exemple précédent, l'angle de ces deux droites; son complément sera l'angle cherché.

262. — **Cas particulier.** — *Le plan donné est l'un des plans de projection, par exemple le plan horizontal.*

L'angle demandé s'obtiendra à l'aide d'un changement de plan vertical ayant pour but de rendre la droite parallèle au plan vertical. Ainsi (fig. 128, pl. 11) après le changement de plan vertical x_1y_1, l'angle de la droite avec le plan horizontal est mesuré par l'angle de la nouvelle projection verticale A'_1 avec la nouvelle ligne de terre x_1y_1.

De même (fig. 129, pl. 11) l'angle de la droite donnée avec le plan vertical est mesuré par l'angle de A_1 avec x_1y_1, après avoir fait un changement de plan horizontal x_1y_1, qui rend la droite parallèle au plan horizontal.

VII. — ANGLE DE DEUX PLANS.

263. — **Définition.** — *L'angle de deux plans est mesuré par l'angle de deux perpendiculaires à ces deux plans menées par un même point de l'espace.*

On peut encore couper les deux plans par un troisième perpendiculaire à leur intersection et chercher l'angle des deux droites ainsi obtenues.

Enfin en amenant l'intersection des deux plans à être verticale, à l'aide de deux changements de plans, deux rotations ou un rabattement, l'angle demandé est mesuré par l'angle des traces horizontales des deux plans.

264. — **Problème.** — *Soit,* par exemple, *à trouver l'angle des deux plans* $P\alpha P_1R\beta R_1$ (fig. 130, pl. 12), *à l'aide d'un rabattement ayant pour but de rendre l'intersection verticale.*

Commençons par déterminer l'intersection des deux plans $hvh'v'$.

1re OPÉRATION. — Changement de plan vertical en prenant

comme ligne de terre une parallèle à hv. Ce changement de plan a pour but de rendre $hvh'v'$ parallèle au plan vertical.

2° OPÉRATION. — Rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical dans le système x_1y_1 permettant de rendre $hvh'_1v'_1$ verticale.

Pour simplifier cette construction, choisissons l'axe de manière à mettre en évidence les points fixes. Par exemple, choisissons l'axe dans le plan horizontal et rencontrant les traces horizontales des deux plans dans les limites de l'épure.

Nous avons pris ici comme axe la perpendiculaire au plan vertical o'_1 qui rencontre les deux plans aux deux points fixes $\mu\mu'_1\nu\nu'_1$.

Après cette rotation, la droite $hvh'_1v'_1$ est devenue la verticale $h_2v_2h'_2v'_2$. Les deux plans donnés sont donc maintenant verticaux et déterminés, le premier par $\mu\mu'_1$, $h_2v_2h'_2v'_2$, le deuxième par $\nu\nu'_1$, $h_2v_2h'_2v'_2$. Ils ont donc pour traces horizontales $h_2\mu h_2\nu$, et par suite $\mu h_2\nu$ mesure l'angle des deux plans.

265. — Cas particulier. — *Angles d'un plan avec les deux plans de projection.*

L'angle avec le plan horizontal (fig. 131, pl. 12) s'obtient par un changement de plan vertical x_1y_1, ayant pour but de rendre le plan donné perpendiculaire au plan vertical. Cet angle est mesuré par l'angle de la nouvelle trace verticale avec la nouvelle ligne de terre. L'angle avec le plan vertical (fig. 132, pl. 12) a été obtenu après le changement de plan horizontal x_1y_1 qui rend le plan donné vertical. L'angle demandé est mesuré par l'angle de la nouvelle trace horizontale du plan avec la nouvelle ligne de terre.

VIII. — SECTIONS PLANES DES POLYÈDRES.

266. — Nous avons déjà dit, en nous occupant des sections planes des polyèdres, qu'on pouvait résoudre cette question en amenant le plan sécant à être perpendiculaire à l'un des plans de projection. Il suffit pour cela d'un changement de plan ou d'une rotation.

Proposons-nous d'appliquer cette méthode avec un changement de plan.

267. — Problème. — *Soit*, par exemple (fig. 133, pl. 12), *un solide composé du tétraèdre* dabcd'a'b'c' *et de trois prismes*

construits sur les trois faces latérales et dont les arêtes sont respectivement parallèles à celles du tétraèdre.

Cherchons la section de ce solide par le plan $P\pi P_1$.

On a effectué le changement du plan vertical L_1T_1 ayant pour but de rendre le plan sécant perpendiculaire au plan vertical.

L'intersection se projette verticalement dans le système L_1T_1 suivant la trace verticale actuelle du plan $\pi'_1\rho'_1$.

La face $ab\beta\alpha$ est coupée suivant $mnm'_1n'_1$. En marchant dans le sens mn, nous reconnaissons qu'il faut passer dans la face $\alpha\gamma da$ qui nous donne no, et ainsi de suite jusqu'au point de départ.

On trouve ainsi le polygone *mnopqrstuvxm*.

Puis on a projeté successivement tous ces sommets verticalement dans le système xy, en vérifiant autant que possible les cotes données dans le système L_1T_1.

On a représenté la partie du solide au-dessous du plan sécant.

Les arêtes du solide au-dessus du plan sécant sont enlevées, et on les reconnait facilement dans le système L_1T_1. Quant aux arêtes conservées, elles conservent aussi leur ponctuation, sauf pour les régions de ces arêtes qui redeviennent vues comme contour apparent.

Si, pour compléter la question que nous venons de traiter, on demandait la grandeur de la section, il faudrait faire une deuxième opération sur cette section, ayant pour but de rendre le plan sécant horizontal.

IX. — DÉTERMINER UNE FIGURE DANS UN PLAN DE PROFIL.

268. — Nous savons que tous les points d'un plan de profil se projettent horizontalement et verticalement sur les deux traces du plan, et qu'il est impossible de déterminer une figure de ce plan connaissant seulement une projection de cette figure.

On obviera à cet inconvénient, en prenant le plan de profil comme plan de projection.

269. — **Exemple**. — *Trouver la distance d'un point* mm' (fig. 134, pl. 12), *à un plan parallèle à la ligne de terre et déterminé par ses traces* RR_1.

Il suffit pour cela d'effectuer le changement de plan vertical x_1y_1 et de continuer les opérations à la manière ordinaire. La

distance cherchée est mesurée par $m_1p'_1$; d'un autre côté, $mpm'p'$ est la perpendiculaire demandée, pp' étant le pied de la perpendiculaire.

Citons encore, comme application des méthodes précédentes, la mesure des éléments d'un polyèdre, soit la grandeur des faces, des arêtes et des dièdres du polyèdre. La connaissance de ces différents éléments permet de construire matériellement le polyèdre.

A ce propos, nous engageons beaucoup les commençants, après avoir fait l'épure de l'intersection de deux polyèdres, à construire en papier une combinaison des surfaces des deux polyèdres, ce qui leur permettra de vérifier la ponctuation sur l'objet lui-même.

CHAPITRE V

I. — PORTER SUR UNE DROITE UNE LONGUEUR DONNÉE.

270. — Nous commencerons par rendre la droite AA′ (fig. 135, pl. 12) parallèle à l'un des plans de projection, puis dans cette position nous porterons la longueur donnée, et nous effectuerons enfin sur le point ainsi obtenu une opération inverse de la première.

Nous avons employé ici une rotation autour de la verticale du point origine *oo′*. Cette rotation donne la droite $A_1A'_1$. Portons ensuite la longueur $o'm'_1$ égale à la longueur donnée et dans le sens donné, puis faisons tourner le point $m_1m'_1$ en sens contraire de la rotation précédente, ce qui donne le point *mm′*.

271. — **Application.** — *Mener un plan parallèle à un plan donné à une distance donnée du premier.*

Soit, par exemple le plan $P\alpha P_1$ (fig. 136, pl. 12). Effectuons le changement de plan vertical x_1y_1 qui rend le plan $P\alpha P_1$ perpendiculaire au plan vertical. Dans le système actuel, le plan inconnu a sa trace verticale parallèle à la trace verticale du plan donné, et à une distance égale à la distance donnée. Soit c'_1 cette trace verticale; on en déduit la trace horizontale $R\beta$ du plan inconnu parallèle à $P\alpha$, et par suite la trace verticale $R_1\beta$ du même plan inconnu parallèle à $P_1\alpha$ dans le système primitif.

Ce problème présente comme le précédent deux solutions.

II. — MENER DANS UN PLAN, PAR UN POINT DU PLAN, UNE DROITE FAISANT UN ANGLE DONNÉ AVEC UNE DROITE DU PLAN.

272. — Soit *oo′* (fig. 137, pl. 12) le point donné et *oao′a′* la droite du plan. Rendons le plan horizontal, puis traçons la droite

inconnue, et faisons-lui subir des opérations inverses des précédentes.

Le plan donné étant $P\alpha P_1$, on l'a rabattu sur le plan horizontal. La droite oa prend la position o_2a. Le rabattement de la droite cherchée est alors o_2b que nous avons relevée à l'aide de son point de rencontre avec la charnière suivant $obo'b'$.

III. — MENER PAR UNE DROITE D'UN PLAN, UN PLAN FAISANT AVEC LE PREMIER UN ANGLE DONNÉ.

273. — Soit $P\alpha P_1$ (fig. 138, pl. 12) le premier plan donné, $aba'b'$ la droite de ce plan.

Effectuons d'abord un rabattement ayant pour but de rendre $aba'b'$ verticale. Soit a_2 la projection horizontale de la droite après le rabattement, μa_2 est alors la nouvelle trace horizontale du premier plan. La trace horizontale nouvelle du deuxième plan passera par le point a_2 et fera avec $a_2\mu$ l'angle donné; soit par exemple νa_2.

Le plan inconnu est alors déterminé par $aba'b'$ et le point ν du plan horizontal; on en déduit sa trace horizontale $a\nu\beta$, et par suite sa trace verticale $\beta b'$

IV. — MENER PAR UN POINT, UNE DROITE FAISANT AVEC LES DEUX PLANS DE PROJECTION DES ANGLES DONNÉS.

274. — Supposons le problème résolu, et soit $oao'a'$ la droite demandée (fig. 139, pl. 12). En faisant tourner cette droite autour de la verticale o, de manière à la rendre parallèle au plan vertical, $o'a'_1\omega'$ sera l'angle α de la droite avec le plan horizontal.

Si maintenant nous faisons tourner la droite autour de la perpendiculaire au plan vertical o', de manière à la rendre parallèle au plan horizontal, a_2oa_1 sera l'angle β de la droite avec le plan vertical. Mais en même temps nous avons oa_2 égale à $o'a'_1$ comme représentant la distance des deux points oo', aa'; cette remarque va nous permettre de reconstruire la figure.

Menons d'abord (fig. 140, pl. 12) $o'a'_1$ faisant avec la ligne de terre l'angle α, puis traçons oa_2 égale à $o'a'_1$ et faisant avec la

ligne de terre l'angle β. La trace horizontale a de la droite est alors le point de rencontre de la parallèle à la ligne de terre menée par a_2 avec la circonférence décrite de o comme centre, et ayant pour rayon oa_1.

Ce problème présente en tout quatre solutions, la droite a_2a en donne déjà deux, les deux autres proviennent des points symétriques de a_2 par rapport au point o; $oao'a'$, $obo'b'$, $oco'c'$, $odo'd'$ sont ces quatre solutions.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que la parallèle à la ligne de terre a_2 rencontre la circonférence décrite par le point a_1; on doit donc avoir $a_2\mu < oa_1$.

Or on a $a_2\mu = oa_2 \sin\beta$ et $oa_1 = a'_1\omega = o'a'_1 \cos\alpha = oa_2 \cos\alpha$. Il faut donc que l'on ait $\sin\beta < \cos\alpha$ ou $\sin\beta < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, ce qui donne $\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$, puisque les angles dont nous nous occupons sont aigus. En résumé, la somme des angles $\alpha + \beta$ doit être plus petite qu'un angle droit.

Dans le cas particulier où les deux angles α, β sont complémentaires, la droite a_2a est tangente à la circonférence o, et le problème ne présente plus que deux solutions dans le plan de profil o.

On peut encore trouver la condition $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ par le raisonnement suivant. L'angle de la droite cherchée avec une verticale est $\frac{\pi}{2} - \alpha$, or l'angle β de la droite inconnue avec le plan vertical doit être plus petit que l'angle de cette droite inconnue avec une droite quelconque du plan vertical, et en particulier avec une verticale. On doit donc avoir $\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$ ou $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

Lorsqu'on a $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, c'est que la projection verticale de la droite inconnue est verticale, donc alors la droite est dans un plan de profil.

V. — MENER PAR UN POINT, UN PLAN FAISANT AVEC LES DEUX PLANS DE PROJECTION DES ANGLES DONNÉS.

275. — Une perpendiculaire au plan ferait avec les deux plans de projection des angles complémentaires des angles donnés α, β; nous pouvons donc construire cette droite, et il ne reste plus qu'à lui mener un plan perpendiculaire par le point oo'.

Pour que le problème soit possible, il faut avoir

$$\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)<\frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire

$$\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}.$$

Dans le cas particulier où $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, la perpendiculaire au plan est dans un plan de profil, donc le plan est alors parallèle à la ligne de terre.

VI. — MENER PAR UN POINT, DANS UN PLAN, UNE DROITE FAISANT AVEC UN PLAN DONNÉ UN ANGLE DONNÉ.

276. — Examinons d'abord le cas particulier où le deuxième plan R est l'un des plans de projection, le plan horizontal par exemple. Supposons d'ailleurs le premier plan donné déterminé par sa trace horizontale $P\alpha$ et le point oo' par lequel doit passer la droite (fig. 141, pl. 12).

Faisons tourner la droite inconnue autour de la verticale o, de manière à la rendre parallèle au plan vertical, elle prendra la position $oa_1o'a'_1$, l'angle $o'a'_1\omega$ étant égal à l'angle donné.

En tournant en sens contraire de la rotation précédente, le point a_1 doit venir se placer sur la trace horizontale du plan, en aa' par exemple, donc $oao'a'$ est la droite demandée.

Ce problème présente deux solutions. Pour que le problème soit possible, il faut que l'angle donné soit plus petit que l'angle du plan P avec le plan horizontal $o'c'_1\omega$. La ligne $oco'c'$ est donc la droite du plan P faisant avec le plan horizontal le plus grand angle aigu.

C'est pour cette raison qu'on appelle *oco'c' la ligne de plus grande pente du plan.* Nous reconnaissons en même temps que la ligne de plus grande pente du plan est perpendiculaire sur les horizontales du plan, elle définit donc le plan.

Passons maintenant au cas général où le deuxième plan R est quelconque ; on ramènera ce cas au précédent, en prenant le plan R comme plan horizontal de projection.

277. — Remarque. — Au lieu de se donner l'angle de la droite avec le plan R, on pouvait se donner l'angle de la droite inconnue avec une droite quelconque AA'. Il faudrait alors rendre cette droite AA' verticale.

VII. — MENER PAR UNE DROITE, UN PLAN FAISANT UN ANGLE DONNÉ AVEC UN PLAN DONNÉ.

278. — Examinons, comme précédemment, le cas particulier où le plan donné est l'un des plans de projection, par exemple le plan horizontal (fig. 142, pl. 13).

Faisons tourner le plan autour d'une verticale *o* rencontrant la droite donnée,de manière à le rendre perpendiculaire au plan vertical, il prendra la position $Q\beta Q_1$, $o'\beta\omega$ étant l'angle donné.

Si maintenant nous faisons tourner le plan en sens contraire de la rotation précédente, la trace horizontale reste tangente à la circonférence décrite de *o* comme centre, avec *oc* pour rayon. Nous aurons donc la trace horizontale P du plan inconnu, en menant par *a* une tangente à cette circonférence. Le plan inconnu est alors déterminé par sa trace horizontale P et par *oao'a'*.

Le problème présente deux solutions, et pour qu'il soit possible, il faut que l'angle donné soit plus grand que l'angle de la droite avec le plan horizontal.

Lorsque le plan donné sera quelconque, on ramènera le problème au précédent, en rendant ce plan horizontal.

279. — Remarque. — Au lieu de se donner l'angle du plan inconnu avec un plan, on peut se donner l'angle du plan avec une droite, il faut alors rendre cette droite verticale.

VIII. — EXERCICES.

1. — Trouver la distance d'un point à une horizontale, une ligne de front, une parallèle à la ligne de terre, une parallèle au deuxième plan bissecteur.

2. — Trouver la perpendiculaire commune et la plus courte distance entre une droite quelconque et une horizontale ou une ligne de front.

3. — Mener par un point *mm'* une droite faisant avec le plan horizontal un angle donné, connaissant la projection horizontale de la droite.

4. — Trouver les plans bissecteurs d'un angle.

5. — Trouver le lieu des points à des distances égales de deux droites qui se coupent.

6. — Angle de deux droites, l'une d'elles étant parallèle à l'un des plans de projection.

7. — Angle d'une droite avec la ligne de terre.

8. — Construire les plans bissecteurs d'un dièdre.

9. — Mener par un point dans un plan n rayons faisant entre eux des angles égaux à $\frac{2\pi}{n}$.

10. — Angle d'un plan avec un plan perpendiculaire sur l'un des plans de projection.

11. — Intersection de deux plans déterminés chacun par sa ligne de plus grande pente. Angle de ces deux plans.

12. — Intersection d'une droite et d'un plan déterminé par sa ligne de plus grande pente.

13. — Construire une pyramide régulière ou un prisme régulier, connaissant le plan de base, le centre de la base, un sommet de la base et la hauteur.

14. — Section droite d'un prisme oblique.

15. — Développer sur un plan la surface latérale d'un prisme ou d'une pyramide.

16. — Plus court chemin d'un point à un autre sur la surface d'un polyèdre, en passant sur des arêtes déterminées à l'avance, ou forme d'un fil tendu entre deux points sur la surface d'un polyèdre.

17. — Même problème le polyèdre étant un prisme ou une pyramide, le fil pouvant tourner une, deux, trois fois, etc. autour de la pyramide.

18. — Mener par une arête d'un polyèdre, un plan faisant avec une face ou une autre arête du polyèdre un angle donné. Trouver la section faite par ce plan.

19. — Construire un trièdre trirectangle, connaissant les traces des trois arêtes sur un même plan. Conditions de possibilité.

20. — Construire un cube, connaissant trois points appartenant à trois arêtes qui aboutissent à un même sommet. On connaît de plus la longueur de l'arête du cube.

21. — Mener par un point de l'espace une droite ou un plan faisant avec deux plans rectangulaires des angles donnés.

22. — Amener un tétraèdre ayant un sommet *aa'* dans le plan horizontal, à être dans une position d'équilibre par des rotations autour d'un axe, ou de deux axes convenablement choisis et passant par le point *aa'*.

23. — Faire tourner une figure d'un angle donné et dans un sens donné autour d'un axe placé d'une manière arbitraire dans l'espace.

24. — Faire tourner un tétraèdre autour d'une arête, de manière à l'amener dans une position d'équilibre.

25. — Reprendre les problèmes 22 et 24 pour un parallélipipède.

26. — Mener par un point mm' une droite BB′ faisant avec une droite donnée AA′ un angle donné, la plus courte distance entre les deux droites AA′, BB′ ayant une grandeur donnée.

LIVRE VI

RÉSOLUTION DES TRIÈDRES

280. — Les éléments d'un trièdre sont au nombre de six, les trois faces *abc* et les trois dièdres ABC. Trois de ces éléments suffisent pour déterminer le trièdre; nous aurons donc à examiner les six cas suivants dans lesquels on connait :

1° Les trois faces FFF.
2° Deux faces et le dièdre compris FDF.
3° Deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles FFD.
4° Une face et les deux dièdres adjacents DFD.
5° Une face, un dièdre adjacent et le dièdre opposé DDF.
6° Les trois dièdres DDD.

La résolution de ces six cas peut se ramener à celle de trois d'entre eux, en employant le trièdre supplémentaire.

En effet, soit à construire un trièdre connaissant deux faces a, b et le dièdre compris C. Les suppléments de ces angles $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - C$ seront deux dièdres et la face adjacente du trièdre supplémentaire. Donc, si l'on sait résoudre le quatrième cas, on pourra construire le trièdre supplémentaire, puis en cherchant les suppléments de ses nouveaux éléments, on aura les éléments inconnus du trièdre primitif.

En résumé, on peut résoudre arbitrairement le premier cas et le sixième, puis le deuxième et le quatrième, et enfin le troisième ou le cinquième.

Nous traiterons en particulier les trois premiers cas, en nous réservant d'étudier les trois autres plus tard.

I. — DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS D'UN TRIÈDRE, CONNAISSANT LES PROJECTIONS COTÉES DES ARÊTES SUR LE PLAN D'UNE FACE.

281. — Prenons comme plan horizontal, le plan de la face connue ASB (fig. 143, pl. 13). Soit de plus S*c* la projection horizontale de la troisième arête, et donnons-nous en même temps la cote du point *c* de cette troisième arête.

Les éléments inconnus du trièdre sont les deux faces ASC, BSC et les trois trièdres.

Pour trouver le dièdre A, choisissons comme plan vertical de projection le plan vertical xy perpendiculaire sur l'arête A. Dans le système xy, le point *c* se projette verticalement en c' à une distance au-dessus de la ligne de terre égale à la cote connue, et il résulte de là que $c'\alpha c$ mesure le dièdre A.

Nous pouvons nous servir de cette opération pour en déduire la face ASC; en effet, il suffit de faire tourner ce plan autour de sa trace horizontale, de manière à le faire coïncider avec le plan horizontal. Cette rotation amène le point cc' dans le plan horizontal en C, donc ASC mesure la face *b*.

Deux opérations analogues aux précédentes nous donneront, suivant $c'_1\beta c$ le dièdre B, et suivant BSC_1 la face *a*. Comme vérification, les deux longueurs SC, SC_1 sont égales, puisqu'elles représentent toutes deux la distance du point S au point *c* de l'espace.

Il ne reste plus maintenant qu'à trouver le dièdre C.

1[re] CONSTRUCTION. — Choisissons comme ligne de terre S*c*, puis effectuons une rotation autour de la perpendiculaire au plan vertical o'_2, de manière à rendre $ScS'_2c'_2$ verticale. Les traces horizontales actuelles des deux plans ASC, BSC sont C_2A, C_2B; donc AC_2B mesure le dièdre C.

Comme nouvelle vérification, $S'_2c'_2$ est égale à SC.

2[e] CONSTRUCTION. — Coupons les deux plans ASC, BSC par un troisième perpendiculaire à leur intersection et mené par le point *c* de l'espace. Ce nouveau plan coupera les deux premiers, suivant deux perpendiculaires à l'arête S*c* menées par le point *c* de l'espace. D'ailleurs ces deux droites se rabattent successivement sur le plan horizontal autour de AS et BS, suivant des perpendiculaires à SC, SC_1 menées par C et C_1. Soit CA, C_1B ces deux droites.

Le plan auxiliaire coupe donc le trièdre suivant un triangle dont nous connaissons les trois côtés AB, CA, C_1B. On a construit ce triangle en AC_2B, donc AC_2B est l'angle dièdre cherché.

Comme vérification, les points A_1,B trouvés par cette deuxième construction coïncident avec les points A,B donnés par la première.

En n'employant que la deuxième construction, AB doit être perpendiculaire sur S*c*, et enfin le point C_2 doit se trouver sur S*c*.

II. — 1er CAS DES TRIÈDRES.

282. — Problème. — *Construire un trièdre connaissant les trois faces* (fig. 144, pl. 13).

Prenons comme plan horizontal de projection le plan de l'une des faces, par exemple le plan de la plus grande face ASB. Représentons ensuite les rabattements des deux autres faces sur le plan horizontal, successivement autour de AS et BS. Soit ASC, BSC_1.

Si nous prenons les deux longueurs SC, SC_1 égales entre elles, nous pourrons alors considérer les deux points C,C_1 comme les deux rabattements autour de SA et SB, d'un même point de l'arête S*c*. Or en relevant la face ASC autour de AS, le point C décrit en projection horizontale la droite $C\alpha$ perpendiculaire sur AS, de même en relevant le point C_1 autour de SB, il décrit en projection horizontale la droite $C_1\beta$ perpendiculaire sur SB. Nous avons donc finalement en *c* la projection horizontale d'un point de la troisième arête.

Donc S*c* est la projection horizontale de la troisième arête.

Il reste à déterminer la cote du point *c*, dont nous connaissons la projection horizontale *c*, et le rabattement C autour de AS.

La cote inconnue est le côté cc' du triangle rectangle $c'\alpha c$, dans lequel nous connaissons le deuxième côté $c\alpha$ et l'hypoténuse $c'\alpha = C\alpha$.

Nous pouvons considérer maintenant le problème comme résolu, puisque avec les éléments que nous venons de trouver, nous avons déterminé dans le problème précédent tous les éléments inconnus.

Pour que le problème soit possible, il faut que le point *c* se

trouve à l'intérieur de la circonférence décrite du point S comme centre, avec SC pour rayon ; il faut donc que l'on ait $c < a + b$, c'est-à-dire la plus grande face plus petite que la somme des deux autres.

Si nous supposons de plus les trois angles donnés obtus, l'angle c étant toujours le plus grand, la condition précédente devient, en remplaçant les angles actuels par les angles adjacents, pour retrouver des angles aigus comme dans l'exemple primitif

$$(\pi - a) + (\pi - b) > c \quad \text{ou} \quad a + b + c < 2\pi.$$

Les conditions de possibilité du trièdre sont donc en résumé :

1° *La plus grande face plus petite que la somme des deux autres ;*

2° *La somme des trois faces plus petite que quatre droits.*

Ces conditions étant remplies, le problème de la construction du trièdre présente deux solutions, car on peut prendre le point c que nous avons trouvé au-dessus ou au-dessous du plan SAB.

Si l'on demandait simplement de construire la droite Sc faisant avec les deux droites Sa, Sb les angles a, b, sans tenir compte des directions Sa, Sb ; le problème pourrait alors présenter quatre solutions.

Remplaçons en effet l'angle c par son supplément, et appliquons à cet angle la condition trouvée précédemment. Nous trouvons alors comme condition de possibilité :

$$\pi - c < a + b \quad \text{ou} \quad a + b + c > \pi.$$

Nous pouvons donc résumer cette discussion dans le tableau suivant :

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c < 2\pi \\ a + b + c > \pi \\ c < a + b \end{array}\right\} \text{quatre solutions.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c < \pi \\ c < a + b \end{array}\right\} \text{deux solutions.}$$

III. — 2e CAS DES TRIÈDRES.

283. — Problème. — *Construire un trièdre, connaissant deux faces et le dièdre compris.*

Prenons comme plan de projection le plan de l'une des faces

connues ASB (fig. 145, pl. 13), et comme plan vertical, un plan perpendiculaire sur l'arête SA du dièdre connu.

Dans ce système, le plan ASC a pour trace verticale $P_1\alpha$ qui fait avec la ligne de terre l'angle A. D'ailleurs, connaissant la face b, nous pouvons représenter son rabattement ASC sur le plan horizontal autour de AS.

Il reste alors à relever l'arête SC dans le plan $P_1\alpha S$, ce qui amène le point C en cc'. Donc Sc est la projection de la troisième arête, et cc' la cote du point c ; le problème est ainsi résolu, puisqu'il est ramené au problème primitif.

Ce problème présente deux solutions, celle qui est indiquée dans l'épure. et le trièdre symétrique par rapport au plan horizontal.

IV. — 3e CAS DES TRIÈDRES.

284. — Problème. — *Construire un trièdre, connaissant deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles* (fig. 146, pl. 13).

Prenons comme plan horizontal le plan de la face connue adjacente au dièdre donné. Soit ASB cette face, B étant le dièdre donné.

Dans le système x_1y_1, le plan BSC aura pour trace verticale $p'_1\beta$ qui fait avec x_1y_1 l'angle donné B. D'ailleurs, la face b étant connue, nous pouvons la représenter par son rabattement ASC sur le plan horizontal autour de AS.

Il reste donc à relever l'arête SC autour de AS, de manière à l'amener dans le plan BSC. Il nous suffit pour cela d'effectuer ce relèvement pour un point quelconque C de SC. Or dans le système xy, le point C décrit dans le plan vertical une circonférence ayant pour centre α et pour rayon αC ; nous reconnaîtrons qu'il a été amené dans le plan BSC, lorsqu'il sera sur la trace verticale de ce plan dans le système xy. Soit $\gamma p'$ cette nouvelle trace verticale.

Le point C est donc relevé en cc', et par suite Sc est la projection horizontale de la troisième arête, en même temps cc' est la cote du point c.

Le problème est donc résolu, puisqu'on est ramené encore une fois au problème primitif.

Pour que le problème soit possible, il faut que la trace verticale $p'\gamma$ du plan BSC coupe la circonférence décrite par le point

C, ou bien que la distance du point α au plan BSC soit plus petite que la distance du même point α à l'arête SC.

$$\alpha'_1\omega'_1 < \alpha\pi.$$

Cherchons les valeurs de ces deux quantités en fonction des données.

Le triangle rectangle $\alpha S\beta_1$ donne

$$\alpha\beta_1 = S\alpha \sin c = \alpha'_1\beta.$$

Or, dans le triangle rectangle $\alpha'_1\beta\omega'_1$, on a

$$\alpha'_1\omega'_1 = \alpha'_1\beta \sin B,$$

donc

$$\alpha'_1\omega'_1 = S\alpha \sin c \sin B.$$

D'un autre côté, on a dans le triangle $S\alpha\pi$

$$\alpha\pi = S\alpha \sin b.$$

La condition de possibilité est donc

$$\sin b > \sin c \sin B.$$

Cette condition n'est pas suffisante pour la construction du trièdre demandé, car il faut en outre que le point c' soit au-dessus du plan horizontal.

Or si l'on a $\alpha C > \alpha\gamma$, c'est-à-dire $\sin b > \sin c$, l'une des solutions ne convient pas parce que le trièdre formé n'a plus le dièdre B mais son supplément.

Nous avons ici supposé l'angle B aigu.

Si enfin l'angle B est obtus, une seule des solutions convient lorsque $\alpha C > \gamma\alpha$, autrement le problème ne présente pas de solution.

En résumé :

Avec $$B < \frac{\pi}{2}$$

et $$\sin c > \sin b > \sin c \sin B,$$

on a deux solutions.

Avec $$B < \frac{\pi}{2}$$

et $$\sin c < \sin b > \sin c \sin B,$$

on a une solution.

Avec $$B > \frac{\pi}{2}$$
et $$\sin c > \sin b > \sin c \sin B,$$
on n'a aucune solution.

Enfin, avec $$B > \frac{\pi}{2}$$
et $$\sin c < \sin b$$
on a une seule solution réelle, car la deuxième condition $\sin b > \sin c \sin B$ est assurément remplie.

V. — EXERCICES.

1. — Mener par le point de rencontre de deux droites *oao'a'*, *obo'b'* une troisième droite faisant avec les deux premières des angles donnés.

2. — Mener par un point un plan faisant avec deux plans donnés des angles donnés.

3. - Mener par un point une droite ou un plan faisant avec deux deux droites, ou avec deux plans, ou enfin avec une droite et avec un plan des angles donnés.

4. — Construire une droite s'appuyant sur deux droites données et faisant avec ces droites des angles donnés.

5. — Trouver la grandeur de la projection horizontale d'un angle, connaissant l'angle de l'espace et les angles des deux côtés avec la verticale (réduction de l'angle à l'horizon).

LIVRE VII

CONSTRUCTIONS DES POLYÈDRES RÉGULIERS

Les polyèdres réguliers convexes sont au nombre de cinq :

1° *Le tétraèdre ;*
2° *L'hexaèdre ou cube ;*
3° *L'octaèdre ;*
4° *Le dodécaèdre ;*
5° *L'icosaèdre.*

I. — TÉTRAÈDRE.

Les quatre faces d'un tétraèdre régulier sont des triangles équilatéraux égaux.

285. — Problème. — Proposons-nous, en partant de cette définition, *de construire un tétraèdre régulier, en choisissant comme plan de projection le plan d'une face.*

Soit *abc*, $a'b'c'$ (fig. 147, pl. 13) la face connue dans le plan horizontal. En appelant ss' le quatrième sommet inconnu, la face $sabs'a'b'$ se rabat sur le plan horizontal autour de $aba'b'$ suivant *abc*. Donc, en projection horizontale, le sommet *s* se trouve sur la perpendiculaire abaissée du point *a* sur *bc*. Autrement dit, après avoir répété le même raisonnement pour les autres faces, le point *s* est le centre du triangle *abc*.

Il reste à déterminer la cote du point *s*. Pour cela, choisissons comme plan vertical de projection, le plan vertical *as*. Dans ce système, en relevant le plan S*bc* autour de *bc*, le point a'_1 décrit en projection verticale une circonférence ayant pour centre b'_1, et vient se placer en s'_1 sur la ligne de rappel du point *s*.

La cote demandée est donc ss'_1.

On peut encore remarquer, pour déterminer s'_1, que dans le système x_1y_1, l'arête *as* est parallèle au plan vertical, et par suite on doit avoir $a'_1s'_1 = ac$.

Remarque I. — Les arêtes *as*, *bc* sont rectangulaires en projection horizontale, et de plus l'arête *bc* est elle-même horizontale. Donc deux arêtes opposées d'un tétraèdre régulier sont rectangulaires.

Remarque II. — Déterminons dans le système x_1y_1 la perpendiculaire commune aux deux arêtes opposées $asa'_1s'_1$, $bcb'_1c'_1$; ce sera la droite $\alpha\beta\alpha'_1\beta'_1$. Donc les pieds de la perpendiculaire commune à deux arêtes opposées sont les milieux de ces arêtes.

Remarque III. — La perpendiculaire commune à deux arêtes opposées passe par le centre oo'_1 du tétraèdre, et elle est partagée par ce centre en deux parties égales. En effet, dans le triangle $a'_1b'_1s'_1$, le point o'_1 est le point de rencontre des trois hauteurs et de plus $o\alpha = \frac{oa}{2}$.

Ces remarques vont nous permettre de trouver directement un tétraèdre régulier, en prenant comme plan de projection, un plan parallèle à deux arêtes opposées.

Soit AA′, BB′ (fig. 148, pl. 13) deux arêtes opposées d'un tétraèdre régulier, nous supposons ces deux droites horizontales.

Dans cette hypothèse, les deux droites A et B doivent être rectangulaires.

Construisons la perpendiculaire commune à ces deux arêtes ; c'est ici la verticale $\alpha\beta\alpha'\beta'$.

Les points $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ devant être les milieux des arêtes AA′, BB′, il en résulte que la projection horizontale du tétraèdre est un carré *abcd*.

Considérons deux côtés opposés de ce carré, soit *ab* et *cd*; ces deux côtés étant parallèles entre eux, la plus courte distance entre les deux droites $aba'b'$, $cdc'd'$ sera mesurée par *bc*. D'ailleurs, cette plus courte distance est connue, puisqu'elle est égale à $\alpha'\beta'$; donc on doit avoir $ab = \alpha'\beta'$.

Il ne reste plus, après avoir construit le carré *abcd*, qu'à projeter les deux points *a*, *c* en *a′*, *c′* sur A′, et les deux points *b*, *d* en *b′*, *d′* sur B′.

II. — CUBE.

286. — 1° Projection d'un cube sur le plan d'une face.

Soit *abcd*, *a'b'c'd'* (fig. 149, pl. 13) la face donnée dans le plan horizontal. Les quatre arêtes inconnues aboutissant aux sommets *abcd* sont verticales, et leur longueur est égale à *ab*.

On en déduit donc les quatre sommets inconnus $a_1a'_1$, $b_1b'_1$, $c_1c'_1$, $d_1d'_1$ dans un même plan horizontal dont la cote est *ab*.

287. — 2° Projection d'un cube sur un plan perpendiculaire a une diagonale.

Conservons la disposition des lettres de l'exemple précédent, et supposons la diagonale $ac_1a'c'_1$ verticale.

Les arêtes *ad*, *ab*, aa_1 aboutissant au sommet *a* sont égales et également inclinées sur la diagonale ac_1 ; en effet, les trois triangles adc_1, abc_1, aa_1c_1 sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Il résulte de là que les trois arêtes considérées se projettent horizontalement suivant trois rayons égaux (fig. 150, pl. 13).

Les trois arêtes c_1b_1, c_1d_1, c_1c sont égales et parallèles aux premières, mais dirigées en sens contraire ; donc elles se projettent horizontalement suivant trois rayons égaux et parallèles aux premiers, mais dirigés en sens contraire, de manière à former les trois diamètres dab_1, bad_1, a_1ac.

Enfin, les six arêtes qui restent sont encore parallèles et égales aux premières, donc elles se projettent suivant des droites égales et parallèles à *ad*, *ab*, aa_1, de telle sorte qu'en résumé la projection horizontale du cube se compose d'un hexagone régulier avec ses trois diamètres.

Passons maintenant à la projection verticale, en supposant la ligne de terre parallèle à bb_1.

Les deux diagonales *ac*, *bd* de la face *abcd* sont rectangulaires dans l'espace, et se projettent horizontalement suivant deux droites rectangulaires, donc la diagonale *bd* est horizontale. Mais la diagonale *ac* ayant été choisie de front, on a $a'c' = bd$.

Cette remarque permet de déterminer le point *c'* en se donnant arbitrairement le sommet *aa'*.

Les sommets *b*, *d* se projettent verticalement en *b'*, *d'* sur *a'c'* qui est la trace verticale du plan *abcda'b'c'd'*.

Enfin les arêtes aa_1, bb_1, cc_1, dd_1 sont perpendiculaires sur la face *abcd*, et par suite leurs projections verticales sont perpendiculaires sur $a'c'$.

III. — OCTAÈDRE.

Les huit faces d'un octaèdre régulier sont des triangles équilatéraux égaux. Chaque sommet appartient à quatre faces S*ab*, S*bc*, S*cd*, S*da* formant une pyramide régulière à base carrée.

Les quatre autres faces forment également une pyramide, symétrique de la première par rapport au plan diagonal *abcd*.

288. — 1° Projection sur un plan diagonal.

Soit $abcda'b'c'd'$ (fig. 151, pl. 13) la section de l'octaèdre par un plan diagonal que nous supposons horizontal. Les deux autres sommets s,s_1 se projettent horizontalement au centre du carré *abcd* ; d'ailleurs, ils sont à une distance du centre oo' de l'octaèdre, égale à la demi-diagonale *oa*. Il suffit donc pour les obtenir en projection verticale, de prendre $o's' = o's'_1 = oa$.

289. — 2° Projection sur le plan d'une face.

Soit $abca'b'c'$ (fig. 152, pl. 13) une face de l'octaèdre, cette face étant dans un plan horizontal.

Le centre étant équidistant des sommets, il se projette horizontalement en *o* au centre du triangle *abc*.

Les trois autres sommets *def* sont symétriques des premiers par rapport au centre. Enfin le contour apparent horizontal de l'octaèdre est l'hexagone régulier *afbdce*.

Pour trouver la projection verticale, remarquons que la face *bcd* se rabat sur le plan horizontal autour de *bc* suivant *abc*. Nous connaissons donc du sommet *d*, sa projection horizontale *d*, et son rabattement *a*; ce qui nous permet d'en trouver la projection verticale d'.

Menons ensuite le plan horizontal d', nous aurons ainsi le plan de la face *def*, et projetons verticalement les sommets *d*,*c*,*f* en d',e',f'.

IV. — DODÉCAÈDRE.

Les douze faces d'un dodécaèdre régulier sont des pentagones réguliers égaux, et chaque sommet du polyèdre appartient à trois faces.

290. — 1° PROJECTION SUR LE PLAN D'UNE FACE.

Soit $abcdea'b'c'd'e'$ (fig. 153, pl. 14) la face connue dans le plan horizontal. Appelons $c\gamma$ la troisième arête aboutissant au sommet c. La face $dc\gamma$, etc. se rabat sur le plan horizontal autour de cd suivant $abcde$; donc le sommet γ se rabat en b, et par suite sa projection horizontale se trouve sur une perpendiculaire à cd menée par le point b.

De même la face $bc\gamma$, etc. se rabat sur le plan horizontal autour de bc suivant $abcde$; donc le sommet γ se rabat en d, et par suite sa projection horizontale se trouve sur une perpendiculaire à bc menée par le point d.

Les sommets analogues à γ, soit $\alpha\beta\delta\varepsilon$, se trouveront sur la circonférence décrite du point o comme centre avec $o\gamma$ pour rayon, et sur les rayons oa, ob, oc, oe.

Les dix sommets qu'il reste à trouver sont symétriques des premiers par rapport au centre o du dodécaèdre. Enfin, le contour apparent horizontal du solide est le décagone régulier $\alpha\delta_1\beta\varepsilon_1\gamma\alpha_1\delta\beta_1\varepsilon\gamma_1$.

Connaissant la projection horizontale de la face $dc\gamma\alpha_1\delta$ et son rabattement $abcde$, on en déduit les cotes des sommets γ, α_1, δ. Les autres sommets $\alpha\beta\varepsilon$, $\beta_1\gamma_1\beta_1\varepsilon_1$ sont dans l'un ou l'autre des deux plans horizontaux $\gamma'\alpha'_1$.

Le centre du dodécaèdre est équidistant des plans horizontaux $\alpha'\alpha'_1$. Enfin, la face supérieure $a_1b_1c_1d_1e_1$ est symétrique de la face inférieure par rapport au centre oo'.

291. — 2° PROJECTION SUR UN PLAN PERPENDICULAIRE A UNE DIAGONALE.

Conservons la même disposition de lettres que dans l'exemple précédent, et soit aa_1 (fig. 154, pl. 14) la diagonale verticale.

Les trois arêtes ab, ae, ax aboutissant au sommet inférieur a se projettent horizontalement suivant trois rayons égaux et également inclinés les uns sur les autres.

La diagonale be du pentagone $abcde$ étant connue en grandeur, puisqu'elle est horizontale, nous pouvons construire le rabattement de la face $abcde$ sur le plan horizontal b', autour de cette diagonale $beb'e'$. Soit AbCDe ce rabattement.

Nous connaissons alors du sommet a, sa projection et son rabattement, ce qui permet d'en déduire sa projection verticale a'. En même temps, nous relevons les sommets C, D en cc', dd' dans le plan $abcdea'b'c'd'e'$.

Les sommets $\beta\delta_1\gamma_1\epsilon$ sont alors sur la circonférence décrite du point o comme centre avec oc comme rayon, et à des distances $b\beta = a\delta_1 = a\gamma_1 = e\epsilon = ed = be$. Ces sommets sont en même temps dans le plan horizontal c'.

Les dix sommets qu'il reste à déterminer sont symétriques des premiers par rapport au centre, ce centre étant d'ailleurs l'intersection oo' de la verticale a avec le plan perpendiculaire au milieu de l'arête $a\alpha a'\alpha'$.

On a enfin à dessiner les arêtes $c\gamma$, $\epsilon_1\beta$, $\delta_1 d_1$, $c_1\gamma_1$, $\epsilon\beta_1$, δd, qui complètent le contour apparent horizontal.

V. — ICOSAÈDRE.

Les vingt faces d'un icosaèdre régulier sont des triangles équilatéraux égaux. Chaque sommet du polyèdre est commun à cinq faces formant une pyramide pentagonale régulière.

292. — 1° Projection sur un plan perpendiculaire a une diagonale.

Les cinq arêtes aboutissant au sommet inférieur f se projettent horizontalement suivant cinq rayons égaux et également inclinés les uns sur les autres, fa, fb, fc, fd, fe.

Il existe en outre six sommets qui sont symétriques des premiers par rapport au centre de l'icosaèdre, f_1, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1.

Enfin le contour apparent horizontal est le décagone régulier $ad_1be_1ca_1db_1ec_1$ (fig. 155, pl. 14).

Pour trouver la projection verticale de l'icosaèdre, donnons-nous arbitrairement le plan horizontal $abcdea'b'c'd'e'$, et considérons ensuite le pentagone $cdb_1f_1e_1$ correspondant à la pyramide de sommet $a_1a'_1$.

Ce pentagone se rabat sur le plan horizontal $a'b'c'd'e'$ autour de cd suivant le pentagone $abcde$. Nous connaissons donc des sommets f_1, e_1, b_1, leurs projections horizontales et leurs rabattements, ce qui permet de trouver leurs projections verticales f'_1, e'_1, b'_1.

Les sommets a_1, c_1, d_1 sont dans le plan horizontal b'_1; enfin, nous obtenons le sommet f', en prenant le symétrique de f'_1 par rapport au centre oo' de l'icosaèdre.

293. — 2° Projection sur le plan d'une face.

Soit $cdfc'd'f'$ (fig. 156, pl. 14) l'une des faces connues dans le plan horizontal.

L'arête inconnue *de* appartient à un pentagone ayant *cd* pour côté, et dont nous pouvons construire le rabattement AB*cd*E sur le plan horizontal. Le sommet *e* se trouve donc sur la perpendiculaire abaissée du point E sur *cd*. De même, l'arête *de* appartient au triangle *def* qui se rabat sur le plan horizontal suivant *dcf*. Le point *e* se trouve donc sur la perpendiculaire abaissée du point *c* sur *df*.

Les sommets *b* et a_1 seront alors sur la circonférence décrite de *o* comme centre avec *oe* pour rayon, et respectivement sur les rayons *fo*, *do*.

Les six sommets $c_1, d_1, f_1, e_1, b_1, a$ sont symétriques des premiers par rapport au centre. Enfin le contour apparent horizontal est l'hexagone régulier $abe_1a_1b_1e$. Il ne faut pas oublier avec cela les arêtes db_1, c_1e, fa, d_1b, ce_1, f_1a_1.

Pour trouver la projection verticale, remarquons que nous connaissons du pentagone *abcde*, sa projection horizontale et son rabattement, ce qui nous donne les points a', b', e'. Le sommet a'_1 est alors dans le plan horizontal $b'e'$, et les sommets e'_1, b'_1 se trouvent dans le plan horizontal a'.

Il reste finalement les sommets c'_1, d'_1, f'_1 qui sont symétriques de c', d', f' par rapport au centre o'.

LIVRE VIII

MÉTHODE DES PROJECTIONS COTÉES

294. — Dans l'étude des surfaces topographiques, il est impossible d'employer deux plans de projections rectangulaires, parce que les différences de cotes entre les points de la surface à représenter sont trop petites par rapport aux distances horizontales des mêmes points. Il est donc utile d'éviter l'emploi des projections verticales, et de remplacer toutes les constructions que nous avons l'habitude de faire dans les deux projections, par des constructions sur le plan horizontal seulement, en s'aidant au besoin de calculs simples.

Un point quelconque sera défini par sa projection horizontale, et sa cote, que nous écrirons parallèlement au bord de la feuille, près de la projection horizontale du point.

295. — Pour montrer quelle relation il existe entre ces cotes numériques et le dessin lui-même, il est toujours nécessaire d'accompagner le dessin d'une échelle, ayant pour but d'indiquer l'unité de longueur employée.

Supposons, par exemple, que le dessin soit fait à l'échelle de $\frac{1}{5}$ ou $\frac{2}{10}$, cela veut dire qu'une longueur de un mètre de l'objet sera représentée par deux décimètres. Alors pour former l'échelle, on portera sur une ligne droite une longueur AB égale à deux décimètres, elle représentera un mètre de l'objet. En partageant AB en dix parties égales, chaque fraction représentera un décimètre. En divisant également l'une de ces divisions en dix parties égales, chaque subdivision représentera un centimètre, etc.

296. — Dans la résolution d'un certain nombre de problèmes,

il n'est pas toujours nécessaire de mesurer les cotes et les projections avec la même échelle. Ainsi étant donnés deux polyèdres, si l'on multiplie les cotes des sommets par un même nombre, on forme deux nouveaux polyèdres, dont l'intersection a la même projection horizontale que l'intersection des deux premiers.

Autrement dit, lorsqu'il s'agit d'intersection, on peut impunément mesurer les cotes à une échelle quelconque autre que celle du dessin, mais on n'a pas ce droit lorsqu'on veut tenir compte des angles.

CHAPITRE PREMIER

I. — REPRÉSENTATION D'UNE DROITE. — DROITES PARTICULIÈRES. — DROITES PARALLÈLES. — INTERVALLE. — PENTE. — MODULE. — DISTANCE DE DEUX POINTS.

Pour déterminer une droite, on s'en donne deux points *a*(4,5) *b*(2,25); *ab* est la projection horizontale de la droite.

297. — PROBLÈME I. — *Déterminer la cote d'un point d'une droite, connaissant la projection horizontale de ce point* (fig. 157, pl. 15).

1re Méthode. — Prenons comme plan vertical le plan projetant *ab*. Le point *a* se projette verticalement en *a'* à une distance au-dessus de *xy* égale à la cote 4,5 mesurée à l'échelle. De même, le point *b* se projette verticalement en *b'*. Il en résulte que le point *m* se projette verticalement en *m'*, et la cote de ce point s'obtient en mesurant *mm'* à l'échelle, soit 3,09.

REMARQUE. — Dans cet exemple, on trouvera toujours le même résultat quelle que soit l'échelle avec laquelle on mesure les cotes.

2e Méthode. — Les triangles semblables $b'm'\mu$, $b'a'\alpha$ donnent

$$\frac{m'\mu}{a'\alpha} = \frac{b'\mu}{b'\alpha},$$

d'où

$$m'\mu = \frac{a'\alpha}{b'\alpha} \times b'\mu,$$

et par suite

$$mm' = bb' + \frac{a'\alpha}{b'\alpha} \cdot b'\mu,$$

ou

$$mm' = bb' + \frac{a'\alpha}{b'\alpha} \cdot mb = 2,25 + \frac{2,25}{6,50} \cdot 2,45 = 3,09.$$

298. — PROBLÈME II. — *Trouver sur une droite un point dont la cote est donnée, 4 par exemple* (fig. 157, pl. 15).

La relation précédente nous donnera

$$bp = \frac{ab(pp' - bb')}{a'\alpha} = \frac{6,50 \times 1,75}{2,25} = 5,05.$$

299. — Le premier problème permet de reconnaître si deux droites se rencontrent. Pour cela, on cherche les cotes des points des deux droites projetés au point de rencontre des deux projections horizontales (fig. 158, pl. 15). Ces deux points m doivent avoir la même cote.

On peut encore, pour faire cette vérification, reconnaître si deux horizontales s'appuyant sur les deux droites sont parallèles entre elles.

300. — Le deuxième problème permet aussi de déterminer les points à *cote ronde*, c'est-à-dire les points dont la cote est mesurée par un nombre entier. Le point p (fig. 157, pl. 15) est un point à cote ronde.

L'ensemble des points à cote ronde constitue l'échelle de pente de la droite, et cette échelle permet de trouver approximativement un point de cote donné, cette cote n'étant pas mesurée par un nombre entier.

Dans l'exemple actuel, la différence de cote entre les deux points a et p étant 0,50, on aura le point ayant pour cote 3 en portant la longueur ap à partir de p deux fois dans le sens pb.

301. — Définition. — *La distance entre les deux points cotés* 3 *et* 4, *c'est-à-dire dont les cotes diffèrent d'une unité se nomme* INTERVALLE.

Ainsi l'*intervalle* est la distance décrite par la projection horizontale d'un point, lorsque ce point s'élève d'une quantité égale à l'unité de l'échelle.

302. — Droites particulières. — Nous n'avons ici comme

droites remarquables, qu'à citer les parallèles au plan horizontal et les verticales.

HORIZONTALE. — Tous les points d'une telle droite ont la même cote; il suffit donc d'écrire la cote d'un seul point, et pour éviter toute erreur, on l'écrit parallèlement à la droite.

VERTICALE. — Une verticale se projette horizontalement suivant un point sans cote.

303. — Distance de deux points. — Dans la figure **157**, pl. **15**, la distance des deux points $a(4,5)$, $b(2,25)$ est mesurée par $a'b'$, si l'on veut employer un plan vertical.

Il suffit donc de mesurer $a'b'$ à l'échelle.

Numériquement, la distance cherchée est donnée par la relation

$$\Delta = \sqrt{\overline{ab}^2 + \overline{a'\alpha}^2},$$

qui donne

$$\Delta = \sqrt{(6,5)^2 + (2,25)^2} = 6,87.$$

Une opération inverse de la précédente permet de porter sur une droite une longueur donnée.

304. — Droites parallèles. — Deux droites parallèles ont leurs projections parallèles entre elles, et les intervalles égaux dirigés dans le même sens.

Ainsi (fig. **159**, pl. **15**) les deux droites A et B sont parallèles entre elles.

305. — Pente. Module. — *On appelle pente d'une droite, le rapport entre la distance verticale* z *et la distance horizontale* i *de deux de ses points, soit* $\frac{z}{i}$. Autrement dit, c'est la tangente de l'angle de la droite avec le plan horizontal.

Le module est l'inverse de la pente, $\text{mod} = \frac{i}{z}$.

Si dans cette expression nous faisons $z = 1$, nous aurons $mod = i$, ce qui veut dire que le module d'une droite est égal à l'intervalle.

Il résulte de cette définition, que la distance de deux points est donnée par l'expression

$$\delta = d\sqrt{1 + \left(\frac{1}{p}\right)^2},$$

d étant la différence de cotes des deux points et p la pente de la droite.

II. — DÉTERMINATION DU PLAN. — ÉCHELLE DE PENTE. PLANS PARALLÈLES.

Un plan est déterminé par trois points.

Soit les trois points a(12,50), b(9,3), c(6,4) (fig. 160, pl. 15).

Proposons-nous de construire une horizontale de ce plan, par exemple celle qui passe par le point b. Il suffit pour cela de joindre le point b, au point m de la droite ac qui a pour cote 9,3.

306. — Échelle de pente. — *On appelle ligne de plus grande pente d'un plan, une perpendiculaire aux horizontales du plan.* Ainsi αm perpendiculaire sur bm est la projection horizontale d'une ligne de plus grande pente du plan.

Les points α, m et γ ayant pour cotes (12,5,) (9,3) et (6,4,) cette ligne de plus grande pente est complétement déterminée, et nous pouvons former son échelle de pente. On a ainsi l'échelle de pente du plan.

307. — PROBLÈME. — *Étant donnée l'échelle de pente d'un plan, déterminer la cote d'un point quelconque du plan, connaissant la projection horizontale de ce point.*

Soit p (fig. 160, pl. 15) la projection horizontale du point.

Traçons l'horizontale passant par ce point, elle est perpendiculaire à l'échelle de pente $\alpha m\gamma$ et rencontre cette échelle de pente au point π dont la cote sur l'échelle est précisément la cote cherchée.

308. — Plans parallèles. — *Deux plans parallèles ont leurs échelles de pente parallèles entre elles, de même intervalle et dirigées dans le même sens.*

CHAPITRE II

I. — INTERSECTION DE DEUX PLANS.

Pour trouver un point de l'intersection de deux plans, on les coupe tous deux par un plan auxiliaire, en choisissant de préférence un plan horizontal, parce qu'on a immédiatement les horizontales d'intersection de ce plan auxiliaire avec les plans donnés, en supposant connues les échelles de pente des deux plans.

Ainsi ab, a_1b_1 (fig. 161, pl. 15) étant les échelles de pente des deux plans, nous les couperons successivement par les deux plans 9 et 15, ce qui nous donnera les deux points $m(9)$, $n(15)$ de l'intersection.

Cette construction est en défaut, lorsque les échelles de pente des deux plans ont leurs projections horizontales parallèles entre elles, parce que dans ce cas, les deux plans ont leurs horizontales parallèles entre elles.

L'intersection est alors parallèle aux horizontales, et pour la trouver (fig. 162, pl. 15), on en a déterminé un point en coupant les deux plans aba_1b_1 par un plan quelconque cd.

Le plan auxiliaire coupe les deux plans donnés suivant les deux droites $e(0)f(7)$, $e_1(0)f_1(7)$ qui se rencontrent en m. Il ne reste plus qu'à mener par m une horizontale des deux plans.

309. — Remarque. — Cette horizontale rencontre les deux échelles de pente aba_1b_1 en deux points $\mu\mu_1$ ayant la même cote.

On emploierait une méthode analogue à la précédente, si les deux échelles de pente étaient sensiblement parallèles entre elles; seulement, il serait nécessaire d'employer un deuxième plan auxiliaire.

II. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN.

310. — Pour résoudre cette question, on emploie comme plan auxiliaire le plan ayant la droite donnée pour ligne de plus grande

pente. Ce plan auxiliaire coupe le plan donné suivant une droite qui rencontre la droite donnée au point demandé.

Ainsi (fig. 163, pl. 15) le plan mené par la droite a_1b_1 coupe le plan *ab* suivant *cd* qui rencontre a_1b_1 au point cherché *m*(2,35).

311. — PROBLÈME. — *Mener dans un plan, par un point du plan, une droite de pente donnée.*

Soit *o* le point du plan *ab* (fig. 164, pl. 15). Construisons l'horizontale H du plan dont la distance au point *o* est égale à un intervalle.

L'extrémité du module de la droite inconnue compté à partir de *o* doit se trouver sur cette horizontale.

Dans l'exemple, on se propose de trouver la droite de pente $\frac{1}{3,5}$. Son module est alors 3,5. Nous avons donc décrit du point *o* comme centre, une circonférence avec un rayon égal à 3,5 mesuré sur l'échelle.

Cette circonférence rencontre l'horizontale H en un point *m* ; *om* est alors la droite demandée.

Le problème présente une deuxième solution om_1.

312. — PROBLÈME. — *Mener par une droite un plan de pente donnée.*

Prenons sur la droite *ab* (fig. 165, pl. 15) un point quelconque *o*(9), et proposons-nous de construire l'horizontale (8) du point *σ*(8) de la droite *ab*.

L'extrémité du module du plan inconnu compté à partir de *o* se trouve sur une circonférence ayant pour centre le point *o*, et pour rayon le module du plan 1,1 par exemple.

Donc l'horizontale du plan inconnu s'obtient en menant par *σ* une tangente *σh* à cette circonférence ; *o*(9) *h*(8) est l'échelle de pente du plan.

Le problème présente une deuxième solution *o*(9) h_1(8).

CHAPITRE III

I. — DROITES ET PLANS RECTANGULAIRES.

313. — 1° *Une perpendiculaire sur un plan a sa projection perpendiculaire sur la trace de même nom du plan; elle est parallèle à l'échelle de pente du plan.*

314. — 2° Les angles d'un plan et d'une perpendiculaire au plan avec le plan horizontal étant complémentaires, *le module de la droite est égal à la pente du plan,* et inversement, *la pente de la droite est égale au module du plan.* On peut dire encore que *le module de la droite est l'inverse de celui du plan.*

315. — Enfin *les deux échelles du plan et de sa perpendiculaire sont comptées en sens inverse l'une de l'autre.*

II. — DISTANCE D'UN POINT A UN PLAN.

316. — Soit le plan *ab* (fig. 166, pl. 15) et le point *m*(3,25). Nous avons mené par *m* une parallèle à l'échelle *ab*, puis nous avons coté cette droite en sens inverse de *ab*, en prenant comme module l'inverse du module de *ab*. Or le module de *ab* compté à l'échelle est $\frac{1}{2}$, donc le module de la perpendiculaire est 2.

Ensuite, pour trouver l'intersection de la droite et du plan, nous avons considéré le plan ayant pour ligne de plus grande pente la perpendiculaire elle-même, puis on a cherché l'intersection de ces deux plans en remarquant que toutes les horizontales s'appuyant sur *ab* et *mp* passent toutes en projection horizontale par un point fixe (page 34). On a donc dessiné les deux horizontales 3 et 4, qui se rencontrent au point fixe π. Par ce point, on a mené une horizontale qui rencontre la perpendiculaire au point demandé *p*(3,70).

Enfin la distance du point au plan est donnée par la relation

$$\delta = d\sqrt{1+i^2}, \quad \text{d'où} \quad \delta = 0{,}45\sqrt{1+\frac{1}{4}} = 0{,}50.$$

III. — DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE.

317. — Soit la droite *ab* (fig. 167, pl. 15) et le point *m*(4). En menant par *m* une parallèle à *ab*, on a la projection de la ligne de plus grande pente du plan perpendiculaire à la droite mené par le point donné. On a coté ce plan, en prenant comme module l'inverse du module de *ab*. Or le module de *ab* est 1, donc celui du plan perpendiculaire est aussi égal à 1. Puis on a cherché l'intersection de la droite et du plan, en employant la même construction que dans l'exemple précédent. Soit *p*(4,35) le pied demandé.

Enfin, la longueur *mp* mesurée à l'échelle étant égale à 1, la distance du point à la droite est donnée par la formule

$$\delta = \sqrt{(0{,}35)^2 + 1} = 1{,}05.$$

IV. — PLUS COURTE DISTANCE ENTRE DEUX DROITES.

318. — Par le point *b*(5) (fig. 168, pl. 15) de l'une des droites, on mène une parallèle *bm* à l'autre droite, on forme ainsi le plan *abm* parallèle aux deux droites. Le module de ce plan mesuré à l'échelle est $bn = 0{,}73$. En prenant son inverse, on aura le module de la perpendiculaire commune, dont la projection horizontale est perpendiculaire sur l'horizontale *am* du plan.

Puis on a mené par chacune des deux droites un plan parallèle à la direction connue de la perpendiculaire commune, on a ainsi formé les deux plans *aob*, *dcp*. Enfin, on a cherché l'intersection de ces deux plans, en les coupant par le plan horizontal 4, ce qui donne le point *q*(4). En menant par ce point *q* une parallèle à *bo*, on a suivant *qrs* la perpendiculaire commune cherchée.

Dans l'épure, on a coupé les deux plans une deuxième fois par le plan horizontal 5, de manière à indiquer suivant *qt* le module de la perpendiculaire commune.

CHAPITRE IV

I. — RABATTEMENT D'UN PLAN SUR LE PLAN HORIZONTAL.

319. — *Le rabattement d'un point quelconque du plan se fait sur une perpendiculaire à la projection horizontale de la charnière, menée par la projection horizontale du point, et à une distance de la charnière, égale à la distance du point de l'espace à cette même charnière.*

Connaissant le rabattement d'un point quelconque du plan, nous savons en déduire les rabattements de tous les autres points.

II. — ANGLE DE DEUX DROITES.

320. — Nous pouvons supposer que les deux droites se rencontrent, et nous avons même le droit de prendre comme point d'intersection, un point de cote ronde.

Soit donc *oa*, *ob* (fig. 169, pl. 15) les deux droites, et *ab* une horizontale du plan de ces deux droites.

Le rabattement du point *o* se trouve sur la perpendiculaire $o\omega$ à *ab*, à une distance de ω donnée par la relation

$$\delta = \sqrt{1 + (1,85)^2} = 2,17.$$

Donc ao_1b est l'angle demandé.

321. — **PROBLÈME.** — *Angle d'une droite et d'un plan.*

D'un point de la droite, on abaisse une perpendiculaire sur le plan, puis on cherche l'angle de cette droite avec la droite donnée, on a ainsi le complément de l'angle demandé.

III. — ANGLE DE DEUX PLANS.

322. — On coupe les deux plans par un troisième perpendiculaire à leur intersection. et on cherche l'angle des deux droites ainsi obtenues.

Soit AB (fig. 170, pl. 15) les échelles de pente des deux plans, soit de plus cd leur intersection. Menons par le point $c(5)$ un plan perpendiculaire sur cd, son module est l'inverse du module de cd, nous avons donc suivant $\alpha\beta$ l'horizontale (4) de ce plan, à une distance de c égale à $\frac{1}{0,82} = 1,21$.

Cette horizontale rencontre les horizontales (4) des deux plans donnés, aux deux points α, β. Il reste enfin à rabattre le plan $c\alpha\beta$ autour de $\alpha\beta$. Le point c vient en c_1 à une distance δ de la charnière, égale à $\sqrt{1 + (1,21)^2} = 1,56$.

On a donc suivant $\alpha c_1 \beta$ l'angle demandé.

CHAPITRE V

I. — TAS DE SABLE.

323. — *Représenter un tas de sable* (fig. **171**, pl. 15) *ayant pour face supérieure le rectangle* ABCD(5), *les faces latérales ont pour pente* **2**. *Ce tas de sable est formé sur un plan incliné dont l'échelle de pente est* P.

Les deux faces adjacentes ABA_1B_1, BCB_1C_1 étant également inclinées sur le plan horizontal, leur intersection BB_1 est la bissectrice de l'angle des deux horizontales AB et BC. Il en est de même pour les autres arêtes latérales du tas de sable.

Nous n'avons plus qu'à chercher les intersections des faces latérales avec le plan P.

On a d'abord coté les quatre faces latérales, en remarquant que leur module est $\frac{1}{2}$, et en partant des horizontales AB(5), BC(5), CD(5), AD(5).

Pour trouver par exemple l'intersection des deux plans P et BB_1CC_1, on les a coupés par les plans horizontaux (5) et (4), ce qui donne la droite *mn* dont la partie utile est B_1C_1.

Connaissant les deux sommets B_1, C_1, il suffit de trouver un point de chacune des intersections du plan P avec les faces ABB_1A_1, CDD_1C_1.

Soit les deux points *o* et *p* obtenus à l'aide du plan (5).

On a donc joint pB_1 et oC_1 qui donnent comme partie utile A_1B_1 et C_1D_1. Enfin, il reste à joindre A_1D_1.

II. — SAILLANT DE FORTIFICATION.

324. — On appelle ainsi un angle de la ligne de défense, ayant son sommet vers l'extérieur de l'ouvrage.

Soit ABCD (fig. **172**, pl. **15**) la crête intérieure ou ligne de feu.

L'arête BC est supposée horizontale, et a pour cote 10,5, les points A et D ont pour cote 10. (Dans la pratique, les trois droites AB, BC, CD sont dans un même plan qu'on appelle le plan des crêtes.)

Les plongées s'obtiennent en menant par les trois lignes de eu, des plans inclinés en dehors, et ayant pour pente $\frac{1}{6}$.

L'horizontale du plan ABA_1B_1 menée par A(10) est donc tangente à une circonférence décrite de B(10,5) comme centre, avec un rayon égal à la moitié du module, c'est-à-dire 3.

On a effectué les mêmes opérations pour les deux autres plongées, et on en a déduit les intersections BB_1, CC_1 de ces plans deux à deux. Les deux plongées latérales sont alors limitées à deux plans verticaux parallèles aux crêtes, et à 8 mètres des crêtes. Nous définissons ainsi les arêtes A_1B_1, C_1D_1 et par suite B_1C_1 qui, on le remarquera, n'est pas horizontale. Le polygone $A_1B_1C_1D_1$ s'appelle la crête extérieure.

On a ensuite soutenu les arêtes A_1B_1, C_1D_1 par des talus à $\frac{1}{1}$. Par exemple, on a l'horizontale 9 du plan $A_1B_1A_2B_2$, en menant par le point M(9) de l'arête A_1B_1 une tangente à la circonférence décrite du point o(9,5) comme centre, avec un rayon égal à la moitié du module, soit 0,5.

Connaissant une horizontale de chacun de ces deux plans à $\frac{1}{1}$, on les a cotés et limités au plan horizontal 6.

Enfin, on a soutenu l'arête B_1C_1 à l'aide d'un plan déterminé par B_1C_1 et le point 3 de l'intersection des deux plans $A_1B_1B_2A_2$, $C_1D_1D_2C_2$.

En appelant o ce point qui d'ailleurs est donné par l'intersection des deux horizontales $\beta(3)$, $\gamma(3)$, on a joint oB_1, oC_1, ce qui donne les intersections de ce dernier plan avec les deux plans à $\frac{1}{1}$.

III. — PLATE-FORME AVEC RAMPE.

325. — *La plate-forme est limitée à un rectangle* ABCD, *ayant pour cote* 11, *et pour dimensions* 10 *mètres de long sur*

7 de large (fig. 173, pl. 16). *L'axe de la rampe aboutit au milieu du petit côté* CD, *et il est perpendiculaire sur* CD.

La largeur de la rampe est de 3 mètres, sa pente de $\frac{1}{5}$.

Le tout est établi sur un plan incliné dont l'échelle de pente est P.

Tous les talus de déblai et de remblai sont à $\frac{1}{1}$.

Le sommet A étant au-dessous du plan incliné, les talus aboutissant aux arêtes AB et AD seront en déblai. Le talus ABA_1B_1, par exemple, doit avoir pour pente $\frac{1}{1}$; nous pouvons donc le coter en partant de l'horizontale AB(11), l'intervalle étant égal à 1.

L'intersection du plan ABA_1B_1 avec le plan incliné a été obtenue, en coupant ces deux plans successivement par les deux plans horizontaux 12 et 15, ce qui donne les deux points *m* et *n*.

On a de même construit l'intersection du talus ADA_1D_1 avec le plan incliné, et on a trouvé A_1D_1. Comme vérification, AA_1 intersection des deux talus est la bissectrice de l'angle BAD.

La région $B\omega'_1$ de BC étant au-dessous du plan incliné, le talus correspondant sera encore en déblai. On s'est servi de la bissectrice BB_1, pour trouver la trace de ce plan $BB_1\omega$ sur le plan incliné.

Le talus qui soutient $C\omega'_1$ est maintenant en remblai, son horizontale 10 rencontre l'horizontale 10 du plan incliné au point *p* que l'on a joint à ω'_1, de manière à former le talus $C\omega'C_1$.

Enfin les talus aboutissant à CD sont moitié en déblai, moitié en remblai, et leurs traces sur le plan incliné s'obtiennent en joignant $D_1\omega, C_1\omega$.

Passons maintenant à la construction de la rampe; sa pente étant $\frac{1}{5}$, son module est égal à 5, ce qui permet de la coter à partir de l'horizontale CD(11).

Les points *a* et *q* sont au-dessous du plan incliné, donc le talus correspondant est en déblai; on en a trouvé une horizontale, en menant par le point *q* une tangente à la circonférence décrite de *a* comme centre avec un rayon égal à 1. On a ainsi coté ce talus, dont on a construit l'intersection avec le plan incliné, soit *ar*. La partie utile est limitée à gauche en *a*, sur $D_1\omega$, ce qui donne l'arête *aa*.

La même opération a été faite de l'autre coté de la rampe, seulement de b à t, le talus est en remblai, et à partir de t il est en déblai.

IV. — POLYÈDRE RÉGULIER.

326. — *Construire un tétraèdre régulier, reposant par une face, sur un plan dont l'échelle de pente est* P (fig. 173, pl. 16). *On a en* a *et* b *les projections de deux sommets de la base.*

On commence par rabattre le plan P sur le plan horizontal. En particulier, le point $m(6)$ de l'arête ab se rabat sur une perpendiculaire à l'horizontal (0) et à une distance

$$\delta = \sqrt{(6)^2 + (12)^2} = 13,4.$$

Soit μm_1 le rabattement de l'arête, on en déduit en a_1, b_1 les rabattements de a et b.

Actuellement, la base du tétraèdre est, dans le plan horizontal, un triangle équilatéral $a_1b_1c_1$ construit sur a_1b_1 comme côté.

Le quatrième sommet est rabattu en S_1, et sa cote

$$H = a_1b_1\sqrt{\frac{2}{3}} = 5,5\sqrt{\frac{2}{3}} = 4,47.$$

Il reste à relever le tétraèdre. On a d'abord relevé le sommet c_1 en c sur $a\nu$, et le centre de la base o_1 en o sur la médiane $b\beta$. Le centre de la base a pour cote 3,9; d'ailleurs la hauteur du tétraèdre étant perpendiculaire sur le plan de base, elle a un module inverse de celui du plan, ce qui permet de la coter.

Enfin, il reste à porter sur cette droite une longueur égale à la hauteur du tétraèdre 4,47; d étant la différence de cote entre les deux points s et o, on doit avoir

$$H = 4,47 = d\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2},$$

d'où l'on tire

$$d = 3,98.$$

La cote du point s est donc

$$3,9 + 3,98 = 7,88.$$

CHAPITRE VI

I. — SURFACES TOPOGRAPHIQUES. — DÉFINITIONS.

327. — *On appelle surface topographique, toute surface telle que celle d'un terrain, c'est-à-dire toute surface n'ayant pas de définition géométrique.*

328. — Lignes de niveau. — Pour déterminer une telle surface, on en cherche des lignes de niveau, c'est-à-dire les sections par des plans horizontaux équidistants, et on arrive à ce résultat sur le terrain à l'aide de l'opération du nivellement.

La surface sera d'autant mieux déterminée, que les plans horizontaux contenant les lignes de niveau seront plus rapprochés. Comme nous l'avons déjà dit, on suppose ces plans équidistants les uns des autres, et la différence de cote entre deux plans consécutifs s'appelle l'*équidistance*. Afin de pouvoir opérer sur les surfaces topographiques comme sur les surfaces géométriques, on convient de remplacer chaque zone comprise entre deux lignes de niveau successives, par une surface engendrée par une droite rencontrant constamment les deux courbes, et restant constamment normale à l'une d'elles.

Cette substitution est admissible, lorsque les lignes de niveau sont très-rapprochées, mais dans le cas contraire, il est nécessaire d'intercaler des lignes de niveau entre les lignes considérées.

329. — Ligne de plus grande pente. — On appelle ainsi, toute ligne tracée sur la surface, et rencontrant normalement toutes les lignes de niveau.

On utilise quelquefois les lignes de plus grande pente, pour mieux représenter la surface, seulement on les dessine par fragments compris entre les lignes de niveau successives. Ces lignes de plus grande pente forment alors des hachures que l'on fait

d'autant plus grosses et plus rapprochées les unes des autres, que la pente est plus rapide.

330. — Sommet. — On appelle *sommet*, le point le plus élevé d'une région de surface topographique. Les lignes de plus grande pente des régions voisines aboutissent à ce sommet en montant.

Ainsi A, B, C (fig. 175, pl. 16) sont des sommets.

331. — Fond. — Un *fond* est le point le plus bas d'une région de surface topographique. Les lignes de plus grande pente des régions voisines aboutissent à ce fond, mais en descendant. Dans la fig. 175, pl. 16, D est un fond.

332. — Col. — En un tel point, le plan tangent à la surface est aussi horizontal comme pour un sommet ou bien un fond, seulement ce plan tangent coupe la surface. Il existe alors deux lignes de niveau passant par un col.

Au-dessus du col, les lignes de niveau sont dans les angles opposés par le sommet formés par les deux lignes de niveau du col.

Au-dessous du col, les lignes de niveau sont encore dans deux angles opposés par le sommet, mais adjacents aux précédents.

Ainsi E (fig. 175, pl. 16) est un col.

333. — Ligne de faîte. — C'est la ligne de plus grande pente qui réunit deux sommets A,B, en passant par un col.

334. — Ligne de thalweg. — C'est la ligne de plus grande pente partant d'un col pour aller vers un fond.

II. — SECTION PLANE D'UNE SURFACE TOPOGRAPHIQUE.

335. — Soit P l'échelle de pente du plan sécant (fig. 176, pl. 16); on marquera les points de rencontre des lignes de niveau de la surface avec les horizontales de même cote du plan sécant, et on aura successivement en *abc*, etc. des points de la section. Puis on joindra tous ces points par un trait continu.

Comme cas particulier, proposons-nous de trouver la coupe d'une surface suivant XY (fig. 177, pl. 16), c'est-à-dire la section de la surface par le plan vertical XY. Cette intersection se projette horizontalement suivant $fedcbaa_1b_1c_1d_1$, etc. On a projeté ensuite ces points verticalement dans le système xy, à des distances au-dessus de la ligne de terre égales aux cotes des lignes de niveau correspondantes.

Pour avoir une idée plus nette de la forme de la courbe ainsi

obtenue $f'e'd'c'b'a'a'_1b'_1c'_1$, etc., on change quelquefois l'échelle des cotes.

Dans la fig. 177, pl. 16, nous avons multiplié toutes les cotes par 5, ce qui nous donne le profil $FEDCBAA_1B_1C_1D_1E$, etc. De cette manière, les accidents de terrain sont plus accentués.

On peut utiliser la construction que nous venons d'indiquer, pour déterminer l'intersection d'une droite et d'une surface topographique, en employant un plan auxiliaire quelconque passant par la droite.

Une méthode analogue à celle que nous venons de suivre permet de trouver l'intersection de deux surfaces topographiques.

III. — LIGNE DE PENTE CONSTANTE.

336. — Proposons-nous de tracer sur une surface topographique, une ligne de pente constante.

Soit A (fig. 178, pl. 16) le point de départ de la ligne que nous voulons tracer sur la surface, la pente de cette ligne étant $\frac{1}{4}$.

Du point A(4) avec un rayon égal à l'inverse de la pente, nous décrivons un arc de cercle qui rencontre la ligne de niveau (5) aux points B et B_1. La droite AB a la pente demandée $\frac{1}{4}$.

Opérons sur le point B, comme nous l'avons fait sur le point A, et parmi toutes les solutions, nous aurons successivement les éléments rectilignes AB, BC, CD, DE, etc. du chemin cherché

Enfin, en joignant tous les points ainsi obtenus par un trait continu, les lignes de niveau étant suffisamment rapprochées, on aura suivant ABCD, etc., la ligne demandée.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

LIVRE V. — CHANGEMENTS DE PLANS. — ROTATIONS. — RABATTEMENTS.

LIVRE VI. — RÉSOLUTION DES TRIÈDRES.

LIVRE VII. — CONSTRUCTION DES POLYÈDRES RÉGULIERS CONVEXES.

LIVRE VIII. — MÉTHODE DES PROJECTIONS COTÉES.

COULOMMIERS
Imprimerie Paul Brodard.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

—

TEXTE

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

CONES — CYLINDRES — SPHÈRE

A L'USAGE

DES CANDIDATS A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE DE SAINT-CYR

PAR

J. CARON

Ancien élève de l'École normale supérieure,
Agrégé des sciences mathématiques,
Directeur des travaux graphiques à l'École normale supérieure,
Professeur de géométrie descriptive au Lycée Saint-Louis, etc.

TROISIÈME ÉDITION REVUE

TEXTE

PARIS

ANCIENNE LIBRAIRIE GERMER BAILLIÈRE ET C^IE

FÉLIX ALCAN, ÉDITEUR

108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 108

1895

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

ÉLÉMENTAIRE

CONES, — CYLINDRES, — SPHÈRES

LIVRE I

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

I. — COURBES.

1. — Un point de l'espace est défini par trois conditions, par exemple ses distances à trois plans donnés ou à trois points donnés. Lorsqu'on se donne seulement deux conditions, il existe alors une infinité de points remplissant ces deux conditions, et l'ensemble des positions de tous ces points constitue en général une ligne courbe.

L'une des conditions étant que le point reste dans un plan, la courbe est alors plane.

Ainsi les différents points d'une *circonférence* remplissent les conditions suivantes : 1° ils sont dans un même plan ; 2° la distance de chaque point de la circonférence à un point fixe est constante ; ou encore : 1° ils sont dans un même plan ; 2° ils sont sur une même sphère.

De même, une *ellipse* est définie par les deux conditions : 1° qu'elle est dans un plan ; 2° que la somme des distances de

chacun de ses points à deux points fixes du plan est constante.

Lorsque la courbe n'a pas tous ses points contenus dans le même plan, on dit que la courbe est gauche.

L'hélice, par exemple, est une courbe gauche, les deux conditions qui la déterminent sont : 1° le cylindre sur lequel la courbe est tracée ; 2° son pas.

Nous pouvons donc dire qu'une courbe est le lieu des points de l'espace assujettis à deux conditions d'égalité.

La troisième condition qui définit chaque point de la courbe est alors variable ; si nous faisons varier cette troisième condition d'une manière continue, le point décrit la courbe.

Revenons à l'exemple de la circonférence, en nous donnant l'angle d'un rayon OM avec un rayon fixe OA, nous définissons la position du point M, et si nous faisons varier cet angle AOM d'une manière continue de 0 à 2π, le point M décrit la circonférence.

II. — TANGENTE.

2. — On appelle *tangente* à une courbe en un point donné, la limite de la position d'une corde passant par le point donné, et par un deuxième point de la courbe, ce deuxième point se rapprochant indéfiniment du premier, qu'on appelle alors le point de contact.

Dans le cas d'une circonférence, cette courbe n'étant coupée qu'en deux points par une ligne droite, d'après la définition précédente, la tangente n'aura qu'un point de commun avec la courbe. Nous retrouvons ainsi la définition élémentaire de la tangente à une circonférence.

Nous avons dit que pour obtenir une courbe, il fallait assujettir un point de l'espace à deux conditions déterminées et faire varier une troisième condition d'une manière continue ; cette troisième condition étant par exemple une longueur.

Si au lieu de cela, on donne à cette longueur des valeurs différant d'une quantité très-petite, mais déterminée, on obtient alors un nombre déterminé de points de la courbe, et en les joignant deux à deux, dans l'ordre suivant lequel ils sont obtenus, on forme un polygone inscrit dans la courbe.

On peut donc dire qu'une courbe est la limite d'un polygone

dont les côtés sont infiniment petits, et par suite, la tangente à la courbe est la limite de l'un de ces éléments prolongé de part et d'autre de ses deux sommets.

3. — THÉORÈME. — *La tangente à une courbe se projette suivant la tangente à la projection de la courbe.*

Soit en effet M un point d'une courbe, m sa projection. Considérons un point M_1 de la courbe très-rapproché de M, ce point se projettera en m_1 sur la projection de la courbe, et la corde MM_1 aura pour projection la corde mm_1 de la projection de la courbe.

Supposons maintenant que le point M_1 se rapproche indéfiniment du point M, la corde MM_1 aura, par définition, pour limite la tangente MT à la courbe proposée. Or, en même temps, le point m_1 vient coïncider avec m, donc mm_1 a aussi pour limite la tangente mt à la projection de la courbe. D'ailleurs mm_1 est constamment la projection de MM_1 quelque soit la distance MM_1, par suite il en est de même à la limite, ce qui prouve que mt est bien la projection de MT.

Cette démonstration est indépendante du mode de projection employé, elle est donc vraie pour les projections coniques, obliques ou orthogonales.

La démonstration suppose enfin qu'à la limite, la tangente MT se projette suivant une droite, elle est donc en défaut, lorsque la tangente se projette suivant un point.

III. — NORMALE.

4. — On appelle *normale* à une courbe, toute perpendiculaire à la tangente menée par le point de contact.

5. — L'ensemble de ces normales, menées au même point, forme le *plan normal* à la courbe au point considéré.

Dans le cas particulier d'une courbe plane, on n'entend généralement par normale que la normale contenue dans le plan de la courbe.

IV. — ASYMPTOTE.

6. — En chaque point d'une courbe, il existe toujours une tangente. Il en est de même lorsque le point qui décrit la courbe

s'éloigne indéfiniment. Mais alors il se présente deux cas. Ou bien, la tangente reste constamment à distance finie, et alors la limite de cette tangente, lorsque le point de contact est à l'infini, s'appelle une *asymptote*. Ou bien, la tangente s'éloigne aussi tout entière à l'infini, et la courbe a une forme *parabolique*.

V. — TRACÉ DES COURBES.

7. — Comme nous n'avons pas à notre disposition d'instruments parfaits autres que le compas, pour tracer des courbes, il faudra nécessairement les dessiner toutes à la main, sauf les circonférences. On commencera donc par déterminer un certain nombre de points de la courbe, d'après sa définition géométrique, en s'attachant surtout à déterminer tous les points remarquables, par exemple les points de contact avec des tangentes connues, les asymptotes, etc., puis on construira les tangentes à la courbe en différents points courants.

Quant au nombre des points à déterminer, il dépend de la forme de la courbe et de ses dimensions. En général, on fera mieux d'en déterminer avec une très-grande exactitude un petit nombre, plutôt que d'en chercher beaucoup qui seraient alors tous faux parce qu'on aurait fait les constructions avec moins de soins. On déterminera ensuite les tangentes en tous ces points, puisque analytiquement une tangente équivaut à deux points réunis au point de contact. On réunira alors tous les points ainsi obtenus par un trait continu, en faisant bien attention à toutes les tangentes.

Comme il est difficile du premier coup d'arriver à un résultat satisfaisant, on fera bien d'employer un crayon tendre pour ce premier tracé. On jugera alors de l'aspect général de la courbe, en la regardant à une certaine distance, et à l'aide de retouches successives, on fera disparaître tous les genoux du premier tracé. Ces genoux paraîtront plus sensibles, en visant la courbe suivant ses différentes tangentes.

En général, la courbe est bien tracée, lorsque passant par tous les points connus et étant tangente à toutes les droites déterminées, sa forme plaît à l'œil.

Arrivé à ce résultat, on enlève légèrement avec la gomme tous les traits inutiles, et on trace de nouveau la courbe en suivant

bien le trait auquel on s'est décidé, avec un crayon dur, mais en faisant cette fois un trait excessivement fin.

On recommande aussi quelquefois d'appuyer légèrement sur le papier, de manière à creuser une sorte de petite rigole qui, dans la mise à l'encre, entrainera plus facilement la plume.

Mais il ne faut pas abuser de ce procédé qui, poussé à l'excès, enlève à la feuille toute sa fraicheur.

Enfin, pour la mise à l'encre, on emploiera de préférence un porte plume ordinaire et une plume fine avec laquelle on se sent capable d'écrire facilement. Puis, on tiendra le plan de la plume tangentiellement à la courbe, de telle sorte qu'en appuyant plus ou moins fort sur le papier, les deux becs de la plume s'écartent suivant la tangente sans augmenter considérablement la largeur du trait. Il n'en serait pas de même évidemment si l'on tenait la plume normalement à la courbe.

On suivra alors le trait du crayon dans une petite longueur, puis à l'aide de petites touches répétées, on augmentera successivement la largeur du trait, de manière à obtenir partout une largeur uniforme.

On aura soin aussi de placer la main du côté de la concavité de la courbe, la ligne tracée naturellement par la plume étant sensiblement une circonférence ayant son centre du côté de la main.

On se sert aussi pour tracer les courbes d'un pistolet, mais cela n'empêche pas de suivre les recommandations indiquées plus haut pour le tracé au crayon. Nous engageons d'ailleurs à n'employer le pistolet que lorsqu'on aura acquis une habileté assez grande pour ne pouvoir se servir à un moment donné que de la main.

CHAPITRE II

PROJECTION D'UNE CIRCONFÉRENCE.

Proposons-nous de *déterminer les projections d'une circonférence connaissant son plan, le centre et le rayon.*

Soit PxP_1 (fig. 1, pl. I) le plan donné, et *o* la projection horizontale du centre.

I. — DÉTERMINATION D'UN POINT QUELCONQUE.

8. — Pour résoudre ce problème, rabattons le plan PxP_1 sur le plan horizontal autour de Px. Cette opération nous donne en même temps la cote du centre oo' qui se rabat en o_2. Traçons alors le rabattement de la courbe, c'est une circonférence ayant pour centre o_2, et pour rayon le rayon donné. Il ne reste plus qu'à relever un point quelconque m_2 de la circonférence o_2 en mm' par exemple.

II. — DÉTERMINATION DE LA TANGENTE.

9. — Pour trouver la tangente à la courbe en mm', et par suite les tangentes aux deux projections de la courbe en m et m', il suffit de relever la tangente en m_2 au rabattement de la circonférence.

Dans la figure, on s'est servi pour faire ce relèvement du point fixe tt'.

Ainsi mt, $m't'$ est la tangente demandée. On marquera cette tangente en ligne de construction, parce qu'en général elle ne fait pas partie de l'objet à représenter, et qu'elle a pour seul but de déterminer plus exactement la courbe.

II. — MENER PAR UN POINT, UNE TANGENTE A UNE PROJECTION DE LA COURBE.

10. — *Soit à mener par le point a, une tangente à la projection horizontale de la courbe.*

La tangente inconnue sera la projection horizontale d'une tangente à la courbe de l'espace menée par le point du plan de la courbe projeté horizontalement en a. Le problème précédent peut donc s'énoncer ainsi : mener par le point aa' du plan $P\alpha P_1$ une tangente à la circonférence.

Pour résoudre ce problème, on rabattra le point aa' en a_2, puis par ce point on mènera une tangente à la circonférence rabattue, et enfin on relèvera cette droite et en même temps le point de contact.

11. — Comme cas particulier du problème précédent, proposons-nous de mener une tangente parallèle à une direction donnée.

Soit par exemple D (fig. 1, pl. I), la direction de la tangente inconnue en projection horizontale. Nous n'avons pas le droit de nous donner la projection verticale D′ de cette direction, parce que la droite DD′ doit être parallèle au plan $P\alpha P_1$.

Commençons par déterminer la projection verticale D′, en supposant la droite DD′ contenue dans le plan $P\alpha P_1$, puis rabattons cette droite suivant D_2, et menons au rabattement de la circonférence deux tangentes parallèles à D_2. En relevant ces deux droites ainsi que leurs points de contact l_2, s_2, nous aurons les tangentes demandées avec leurs points de contact ll', ss'.

Ce problème est d'un très-grand intérêt, il permet en effet de trouver :

1° Le point le plus haut et le point le plus bas de la circonférence, c'est-à-dire les points pour lesquels la tangente est parallèle au plan horizontal, ou, ce qui revient au même, parallèle à la trace horizontale du plan.

2° Le point le plus éloigné et le point le plus rapproché du plan vertical. Pour ces deux points, la tangente est parallèle au plan vertical, c'est-à-dire à la trace verticale du plan.

3° Le point le plus à droite et le point le plus à gauche. En ces deux points, la tangente est parallèle à un plan de profil. On

trouvera donc la direction de ces tangentes en coupant le plan $P\alpha P_1$ par un plan de profil quelconque. On obtiendra ainsi une tangente commune aux deux projections de la courbe, cette tangente commune étant de plus perpendiculaire à la ligne de terre.

IV. — DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS DES PROJECTIONS DE LA COURBE.

Nous démontrerons plus tard qu'une circonférence se projette suivant une ellipse; en admettant ce fait, nous pouvons dès maintenant trouver les *axes de symétrie* de cette ellipse.

12. — Étant donné dans une circonférence, deux diamètres rectangulaires, chacun d'eux est le lieu des milieux des cordes parallèles à l'autre. Or cette propriété se conserve en projection. Donc, si nous prenons les projections A, B de deux diamètres rectangulaires de la circonférence, chacun des diamètres en projection sera par rapport à l'ellipse le lieu des milieux des cordes parallèles à l'autre.

Ces deux diamètres A et B s'appellent pour cette raison des *diamètres conjugués* de l'ellipse.

En particulier, les axes de l'ellipse sont deux diamètres conjugués, ils sont de plus rectangulaires.

Il faut donc, pour trouver les axes de la projection d'une circonférence, chercher les deux diamètres rectangulaires de cette circonférence qui se projettent suivant deux droites rectangulaires. Mais nous savons que si un angle droit se projette suivant un angle droit, c'est qu'il a un de ses côtés parallèle au plan de projection.

13. — Donc, les axes de la projection horizontale d'une circonférence seront donnés en projetant horizontalement le diamètre horizontal et le diamètre ligne de plus grande pente de la circonférence.

De même, les axes de la projection verticale d'une circonférence s'obtiendront en projetant verticalement le diamètre de front et le diamètre perpendiculaire au premier.

14. — Appliquons ces résultats (fig. 2, pl. I). La circonférence est contenue dans le plan $P\alpha P_1$, elle a pour centre oo', son rayon est donné.

Le diamètre horizontal se projette horizontalement suivant un

diamètre égal, on aura donc ses extrémités en portant sur *of* de part et d'autre du point *o* des longueurs *oa*, *ob* égales au rayon connu.

Il faut ensuite porter la même longueur sur le diamètre ligne de plus grande pente $o\beta$. Pour cela, rendons cette droite parallèle au plan vertical à l'aide, par exemple, du changement de plan vertical x_1y_1. Soit $\beta o'_1$ la projection verticale nouvelle de $o\beta$; nous portons sur cette droite les longueurs $o'_1c'_1$, $o'_1d'_1$ égales au rayon, et en projetant horizontalement, nous aurons en *c* et *d* les sommets du deuxième axe.

On fera bien de projeter verticalement les quatre points *a, b, c, d* de manière à avoir sans peine des points de la projection verticale. Les points a', b' se trouvent sur $o'f'$; quant aux points *c* et *d*, ils ont pour cotes cc'_1, dd'_1.

Il est à remarquer que dans l'espace, les tangentes en cc' et dd' sont parallèles au diamètre $aba'b'$, donc cc' et dd' sont le point le plus haut et le point le plus bas de la circonférence. On dessinera en même temps les tangentes en a' et b' parallèles à $c'd'$.

Dans la figure, on a déterminé à l'aide du changement de plan horizontal $o'\gamma'$ les deux axes de la projection verticale, $ege'g'$, kl $k'l'$. Les points kk', ll' sont pour la même raison que précédemment le point le plus rapproché et le point le plus éloigné du plan vertical.

15. — Le diamètre horizontal se projetant suivant un diamètre égal, il donne évidemment le grand axe de la projection horizontale, de même le diamètre de front donne le grand axe de la projection verticale; *cd* et $k'l'$ sont au contraire les petits axes des deux projections.

V. — TRACÉ D'UNE ELLIPSE.

16. — Ayant ainsi déterminé les axes d'une projection de la circonférence, on pourra s'en servir à l'aide de telle construction analytique qu'on voudra, pour déterminer de nouveaux points de la courbe, mais ces constructions ne faisant pas partie de l'épure elle-même, on ne devra pas les indiquer à l'encre.

On peut, par exemple, connaissant les axes, déterminer les foyers et construire l'ellipse en la considérant comme le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante.

Cette construction est assez avantageuse, car à l'aide de deux rayons seulement, elle donne immédiatement quatre points.

On peut encore considérer l'ellipse, comme le lieu d'un point d'une corde de longueur constante, dont les extrémités glissent sur deux droites fixes.

Pour utiliser cette propriété, on porte sur une bande de papier deux longueurs PM, MQ égales aux deux axes de l'ellipse oA,oB, puis on place cette bande de papier (fig. 3, pl. I), de manière que le point P reste sur OB et le point Q sur OA; on marque alors au crayon la position correspondante du point M.

17. — De tous les procédés employés pour trouver rapidement une ellipse, le plus expéditif consiste à dessiner les ***cercles de courbure*** aux quatre sommets.

Il est facile de se rendre compte graphiquement qu'une circonférence coupe en général une ellipse en quatre points. Deux de ces points étant fixes, en faisant varier le rayon de la circonférence, on voit très-bien qu'elle peut devenir tangente à l'ellipse. Nous dirons alors que les deux autres points sont venus se confondre au point de contact. D'après cela, deux courbes tangentes sont deux courbes qui ont deux points communs réunis au point de contact.

Supposons maintenant ce point de contact fixe, et faisons varier l'un des autres points de rencontre de l'ellipse avec la circonférence. Pour chaque position de ce point, la circonférence sera déterminée par deux points et la tangente en l'un d'eux.

Nous pouvons admettre qu'il en est de même au cas limite,où le point variable vient coïncider avec le point de contact.

La circonférence aura alors trois points de communs avec l'ellipse au point de contact. On a ainsi le cercle ***osculateur*** au point considéré.

Le contact de cette circonférence particulière avec l'ellipse étant plus intime que les précédents, il en résulte que graphiquement, une plus grande région du cercle osculateur sera confondue avec l'ellipse dans le voisinage du point de contact.

Il arrive qu'aux sommets de l'ellipse, ce contact est encore plus intime qu'en un point quelconque, car alors le cercle osculateur a quatre points de communs avec l'ellipse.

Il suffira donc, après avoir tracé les cercles osculateurs aux quatre sommets, de déterminer un assez petit nombre de points

entre ces cercles osculateurs, pour en déduire rapidement et très exactement la courbe.

18. — Pour déterminer les centres des cercles osculateurs qu'on appelle aussi les centres de courbure, on construit un rectangle sur les deux axes de l'ellipse, puis du sommet P de ce rectangle (fig. 4, pl. I), on abaisse une perpendiculaire sur la diagonale AB. Les deux points de rencontre $\alpha\beta$ avec les deux axes sont les centres de courbure relatifs aux sommets A et B.

Les mêmes rayons de courbure serviront pour les sommets symétriques.

Il est bien entendu que les cercles de courbure ne composent pas l'ellipse, et que par suite, il ne faut pas tracer ces cercles de courbure à l'encre pour les assimiler à l'ellipse. Il serait donc absurde, comme le font souvent les commençants, de raccorder brusquement les cercles A et B.

19. — **Remarque.** — Le cercle de courbure au sommet B contient l'ellipse qui, à son tour, contient le cercle de courbure au sommet A.

LIVRE II

CHAPITRE PREMIER

I. — SURFACES. — DÉFINITIONS.

20. — Une surface est engendrée par une courbe mobile, pouvant varier de forme et de position, mais toujours parfaitement déterminée, en se donnant l'un des paramètres variables de la courbe.

Cette courbe mobile s'appelle *courbe génératrice;* elle est généralement assujettie à rencontrer constamment des lignes fixes tracées sur la surface, et qu'on appelle alors les *courbes directrices.*

La courbe génératrice doit donc être parfaitement définie, de forme et de position, en se donnant le point de rencontre de cette courbe génératrice avec l'une des courbes directrices.

21. — **Cône.** — On appelle *cône,* la surface engendrée par une ligne droite assujettie à passer par un point fixe qui est le sommet du cône, et à s'appuyer constamment sur une ligne fixe plane ou gauche ou bien sur une surface.

22. — **Cylindre.** — Un *cylindre* est engendré par une droite qui reste parallèle à une droite fixe, en s'appuyant constamment sur une ligne fixe plane ou gauche ou bien sur une surface.

Un cylindre est donc un cas particulier d'un cône, et on l'en déduit, en supposant que le sommet du cône s'éloigne à l'infini dans la direction des génératrices du cylindre.

Comme cas particulier des cônes et des cylindres, citons le plan dont la directrice est une ligne droite.

23. — **Surface de révolution.** — On appelle *surface de révolution,* toute surface engendrée par une ligne plane ou

gauche, en tournant autour d'une droite fixe. On peut dire encore qu'une surface de révolution est engendrée par une circonférence dont le plan reste perpendiculaire à une droite fixe, dont le centre reste sur cette droite fixe, et dont un point décrit une ligne fixe plane ou gauche.

Cette circonférence variable qui alors est choisie comme génératrice de la surface s'appelle un *parallèle* de la surface.

En revenant à la première définition, c'est au contraire la courbe tournant autour de l'axe qui sert de génératrice. Lorsque cette courbe est contenue dans un plan passant par l'axe, on l'appelle la *méridienne* de la surface.

24. — ELLIPSOIDE DE RÉVOLUTION ALLONGÉ. — L'*ellipsoïde de révolution allongé* est engendré par une ellipse, en tournant autour de son grand axe.

25. — ELLIPSOIDE DE RÉVOLUTION APLATI. — L'*ellipsoïde de révolution aplati* est engendré par une ellipse, en tournant autour de son petit axe.

Comme cas intermédiaire, la *sphère*, est engendrée par une circonférence en tournant autour d'un diamètre.

26. — HYPERBOLOIDE DE RÉVOLUTION A UNE NAPPE. — L'*hyperboloïde de révolution à une nappe* est engendré par une hyperbole, en tournant autour de l'axe qui ne rencontre pas la courbe.

27. — HYPERBOLOIDE DE RÉVOLUTION A DEUX NAPPES. — L'*hyperboloïde de révolution à deux nappes* s'obtient au contraire en faisant tourner l'hyperbole autour de son axe transverse.

Comme cas intermédiaire, le cône de révolution est engendré par les deux côtés d'un angle en tournant autour de la bissectrice de cet angle.

28. — PARABOLOIDE DE RÉVOLUTION. — Enfin, comme dernière surface de révolution du second degré, citons le *paraboloïde de révolution,* qui est engendré par une parabole en tournant autour de son axe.

Cette surface devient un cylindre de révolution, lorsque la parabole se réduit à deux droites parallèles.

29. — SURFACE GAUCHE DE RÉVOLUTION. — La *surface gauche de révolution* est engendrée par une droite en tournant autour d'une autre droite fixe qui ne rencontre pas la première. On démontre que cette surface n'est autre chose qu'un hyperboloïde de révolution à une nappe.

30. — TORE. — Le *tore* est engendré par une circonférence

en tournant autour d'une droite contenue dans son plan, mais ne passant pas par le centre.

Dans le cas particulier où l'axe passe par le centre de la méridienne, le tore devient une sphère.

31. — Surfaces réglées. — On appelle *surface réglée*, toute surface engendrée par une ligne droite. Trois directrices suffisent pour déterminer la surface. Ainsi, on peut assujettir la ligne à s'appuyer constamment sur trois lignes fixes planes ou gauches, ou bien sur des surfaces. On peut encore assujettir la ligne génératrice à être parallèle successivement aux différentes génératrices d'un cône qu'on appelle alors le *cône directeur*.

32. — HYPERBOLOIDE A UNE NAPPE. — Parmi les surfaces réglées, citons l'*hyperboloïde à une nappe*, engendré par une ligne droite assujettie à rencontrer constamment trois droites fixes non parallèles à un même plan.

33. — CONOIDE. — Les *conoïdes* sont engendrés par une droite restant parallèle à un plan fixe, et s'appuyant sur une droite fixe, puis sur une autre ligne fixe plane ou gauche, ou bien sur une surface.

34. — PARABOLOIDE HYPERBOLIQUE. — Comme cas particulier des conoïdes, le *paraboloïde hyperbolique* ou *plan gauche* est engendré par une droite restant parallèle à un plan fixe, en s'appuyant sur deux droites fixes.

Les surfaces réglées se divisent en surfaces *gauches* et en surfaces *développables*. Ces dernières surfaces peuvent être considérées comme engendrées par la tangente à une courbe gauche; elles jouissent de la propriété suivante, qu'on peut les dérouler sur un plan sans déchirure ni duplicature.

Les cônes et les cylindres sont des cas particuliers des surfaces développables.

35. — HÉLICOIDE. — Comme dernier exemple de surfaces fréquemment employées, citons enfin les *hélicoides*, engendrés par une droite qui rencontre constamment une hélice, en faisant avec l'axe et la tangente à l'hélice deux angles constants.

36. — *L'hélicoïde à plan directeur* est engendré par une droite s'appuyant constamment sur une hélice, et sur l'axe de l'hélice, en restant perpendiculaire sur cet axe.

Cette surface est donc un conoïde, elle est utilisée dans la vis à filet carré.

37. — *L'hélicoïde à cône directeur* est engendré par une droite qui rencontre l'hélice et l'axe de l'hélice, en faisant avec cet axe un angle constant. Le cône directeur de cet hélicoïde est donc un cône de révolution.

On emploie cette surface dans la vis à filet triangulaire.

38. — Enfin, *l'hélicoïde développable* est engendré par la tangente à une hélice.

II. — PLAN TANGENT. — NORMALE.

39. — **THÉORÈME.** — *Les tangentes en un même point, à toutes les courbes tracées sur une surface, et passant par ce point, sont contenues dans un même plan, qu'on appelle le plan tangent à la surface au point considéré.*

En effet, soit M (fig. 5, pl. I) un point d'une surface, C et C_1 deux courbes tracées sur la surface et passant par le point M. Supposons la surface engendrée par une troisième courbe mobile c assujettie à rencontrer constamment les deux courbes fixes C et C_1, et parfaitement définie de forme en même temps que de position, lorsqu'on se donne le point de rencontre P de la courbe mobile avec l'une des courbes fixes C.

Dans cette hypothèse, la courbe mobile passera à un moment donné par le point M. Soit C_2 la position de la courbe génératrice, au moment où elle passe par le point M.

Or, pour une position quelconque de la courbe mobile, les trois cordes MP, MP_1, PP_1 sont constamment dans le même plan, il en est donc de même à la limite, c'est-à-dire que les limites de ces trois cordes sont dans le même plan.

Mais les cordes MP, MP_1 ont pour limite par définition les tangentes MT, MT_1 aux deux courbes C et C_1 au point M. Quant à la corde PP_1 dont les deux extrémités viennent coïncider en M sur la courbe C_2, nous admettrons qu'elle a aussi pour limite la tangente MT_2 à la courbe C_2 au point M. Donc les trois tangentes MT, MT_1, MT_2 sont dans le même plan.

D'ailleurs, pour engendrer la surface, on aurait pu prendre une autre courbe quelconque telle que c ayant pour limite en passant par le point M une courbe quelconque telle que C_2 ; donc les tangentes à toutes ces courbes sont dans un même plan, c'est le plan des deux droites MT, MT_1.

Cette démonstration suppose que la corde PP_1 a réellement

pour limite la tangente MT_2 à la courbe C_2 au point M, et cette hypothèse est permise, chaque fois que le point M n'est pas un point singulier de la courbe C_2.

Il résulte de là que la démonstration peut être en défaut pour certains points de la surface. Ces points s'appellent des points singuliers de la surface et doivent être étudiés d'une façon toute spéciale. Comme exemple de point singulier d'une surface, citons le sommet d'un cône. Il est facile de vérifier que les tangentes au sommet d'un cône à toutes les courbes tracées sur la surface du cône et passant par ce sommet,ne sont autre chose que les génératrices du cône. Ainsi donc, dans ce cas particulier, les tangentes, au lieu de former un plan qui serait le plan tangent au point considéré, forment le cône lui-même.

Citons encore comme point singulier d'une surface, le point de rencontre d'une surface de révolution avec l'axe, lorsque la méridienne n'est pas normale à l'axe.

Ici, le cône des tangentes est de révolution.

40. — Normale. — On appelle *normale* à une surface, la perpendiculaire au plan tangent menée par le point de contact.

Le théorème du plan tangent peut donc s'énoncer de la manière suivante :

Les plans normaux au même point, à toutes les courbes tracées sur une surface et passant par ce point, passent tous par une même droite, qui est la normale à la surface au point considéré.

41. — CONSTRUCTION DU PLAN TANGENT. — Pour déterminer le plan tangent en un point d'une surface, il suffira de dessiner sur la surface deux lignes passant par le point considéré, les tangentes à ces deux lignes détermineront le plan tangent demandé.

42. — CONSTRUCTION DE LA NORMALE. — Ayant trouvé le plan tangent, en menant une perpendiculaire sur ce plan par le point de contact, on aura la normale au même point.

Remarquons cependant qu'il est possible de construire la normale sans passer par l'intermédiaire du plan tangent.

Il suffit en effet, de construire les plans normaux aux deux lignes dessinées sur la surface et passant par le point considéré, puis d'en prendre l'intersection.

43. — Plans tangents aux surfaces réglées. — Une ligne droite étant à elle-même sa tangente, si nous choisissons comme première ligne tracée sur la surface réglée, la génératrice rectiligne passant par le point de contact, il en résulte que le plan tangent contiendra cette génératrice. *Ainsi tout plan tangent à une surface réglée, contient la génératrice passant par le point de contact.*

Si accidentellement, on pouvait dessiner sur la même région de surface deux droites passant par le point de contact, le plan de ces deux droites serait le plan tangent demandé.

44. — Il ne faut donc pas s'étonner, d'après cela, qu'un plan tangent coupe la surface, car nous ne donnons pas comme définition du plan tangent, qu'il n'a qu'un point de commun avec la surface, mais que c'est le lieu des tangentes aux lignes tracées sur la surface. Ces deux définitions ne s'accordent que dans le cas où la surface est convexe, comme cela a lieu pour la sphère.

Les plans tangents aux différents points d'une même génératrice d'une surface réglée contiendront donc tous la génératrice considérée, mais en général, ces plans tangents varient avec la position du point de contact sur la génératrice.

Il peut arriver cependant que le plan tangent reste le même quelque soit la position du point de contact, la surface est alors développable. Dans le cas contraire, la surface est une surface gauche. Nous allons voir que les cônes et les cylindres sont des cas particuliers des surfaces développables.

III. — PLANS TANGENTS AUX CONES ET AUX CYLINDRES.

45. — **THÉORÈME.** — *Tout plan tangent en un point de la surface d'un cône est tangent aussi à la surface, aux différents points de la génératrice passant par le premier point de contact.*

Soit en effet A (fig. 6, pl. I) une génératrice d'un cône, M, M_1 deux points de cette génératrice. Pour construire les plans tangents en ces deux points, dessinons sur la surface deux lignes C, C_1 passant respectivement par les points M, M_1 en ayant soin de ne pas les choisir tangentes à la génératrice A, de telle sorte que ces deux lignes seront toujours rencontrées par des génératrices du cône suffisamment rapprochées de A. Les droites MT, M_1T_1

étant les tangentes à ces deux courbes, les deux plans SMT, SM_1T_1 seront les deux plans tangents au cône en M et M_1. Il faut démontrer que ces deux plans coïncident. En effet, une génératrice B suffisamment rapprochée de A, rencontre toujours les deux courbes C, C_1 en deux points N et N_1, donc les deux cordes MN, M_1N_1 sont constamment dans un même plan avec la génératrice A. Il en est de même à la limite, et par suite les deux tangentes MT, M_1T_1 qui sont les limites des deux cordes MN, M_1N_1, sont aussi dans le même plan avec la génératrice A.

Le raisonnement que nous venons de faire pour les deux points M, M_1 s'applique à tous les autres points de la génératrice A, donc les plans tangents en tous les points de cette génératrice coïncident.

46. — Il résulte de ce théorème, qui d'ailleurs est vrai aussi pour un cylindre, que pour trouver le plan tangent en un point de la surface d'un cône ou d'un cylindre, il suffit de construire le plan tangent à la surface au point de rencontre de la directrice avec la génératrice passant par le point de contact.

Le plan tangent étant le même tout le long de la génératrice, on a le droit d'appeler cette ligne la *génératrice de contact.*

IV. — TANGENTE A L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES.

47. — *La tangente en un point de l'intersection de deux surfaces, est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces, au point considéré.*

Nous entendons en effet, par intersection de deux surfaces, la ligne commune aux deux surfaces, c'est-à-dire que l'intersection de deux surfaces est une ligne dessinée simultanément sur les deux surfaces. Il en résulte que la tangente à cette ligne se trouve simultanément dans les plans tangents aux deux surfaces au point considéré.

48 — Dans le cas particulier d'une section plane, le plan tangent au plan sécant coïncidant avec le plan lui-même, *la tangente en un point d'une section plane, sera l'intersection du plan sécant avec le plan tangent à la surface au point considéré.*

Il est souvent plus facile de construire les normales aux deux surfaces, plutôt que les deux plans tangents, on en déduira dans ce cas la tangente à l'intersection par la règle suivante :

49. — *La tangente en un point de l'intersection de deux surfaces est la perpendiculaire sur le plan des deux normales aux deux surfaces au point considéré.*

En effet, l'intersection étant dessinée sur les deux surfaces, son plan normal contient les normales aux deux surfaces au point considéré; or, le plan normal à une courbe est perpendiculaire à la tangente, donc inversement la tangente à l'intersection est perpendiculaire sur le plan des deux normales.

CHAPITRE II

I. — CONES ET CYLINDRES CIRCONSCRITS AUX SURFACES.

50. — Étant donné une surface et un point extérieur S, on peut en général mener par le point S une infinité de plans tangents à la surface. Soit C (fig. 7, pl. I) la courbe lieu des points de contact de tous ces plans tangents.

Nous allons vérifier que *le cône qui a pour sommet le point* S *et pour directrice la courbe* C, *est circonscrit à la surface tout le long de la courbe* C. Cela veut dire qu'en tous les points de la courbe C, la surface donnée et le cône admettent le même plan tangent.

Soit, en effet, M un point quelconque de la courbe C. Le plan tangent en ce point M à la surface donnée contient : 1° la tangente MT à la courbe C tracée sur la surface ; 2° le point S et par suite la droite MS, puisque par hypothèse les plans tangents en tous les points de la courbe C passent par le point S.

D'un autre côté, le plan tangent au cône S au point M est aussi déterminé par la génératrice SM et par la tangente MT à la directrice C. Donc les deux surfaces sont bien tangentes en tous les points de la courbe C.

On obtiendra, par le même procédé, un cylindre circonscrit à une surface parallèlement à une direction donnée, la courbe de contact étant le lieu des points de contact des plans tangents à la surface, parallèles à la direction donnée.

II. — CONTOURS APPARENTS D'UNE SURFACE.

51. — On appelle *contour apparent dans l'espace* d'une surface, la courbe de contact du cône circonscrit à la surface, ayant pour sommet le centre de projection.

52. — On appelle *contour apparent en projection*, la projection du contour apparent de l'espace.

Dans le cas des projections obliques ou orthogonales, le cône circonscrit précédent devient un cylindre circonscrit à la surface parallèlement à la direction suivant laquelle on projette.

Ainsi, pour obtenir le contour apparent horizontal d'une surface, il faudra mener à la surface une série de plans tangents parallèles à une verticale.

De même, pour trouver le contour apparent vertical, il faut chercher le lieu des points de contact des plans tangents parallèles à une perpendiculaire au plan vertical, ou ligne de bout.

III. — OMBRES PROPRES ET OMBRES PORTÉES.

La définition que nous venons de donner des contours apparents s'applique aussi aux *contours d'ombre* ou *séparatives*.

53. — Le *contour de l'ombre propre* d'une surface est la courbe de contact du cône circonscrit à la surface ayant pour sommet le point lumineux, dans le cas de l'ombre au flambeau ; ou du cylindre circonscrit parallèlement aux rayons lumineux, dans le cas de l'ombre au soleil.

54. — Le *contour de l'ombre portée* est la trace du cône ou du cylindre circonscrit sur la surface qui reçoit l'ombre.

Il résulte de ce rapprochement entre les contours apparents et les ombres, que les théorèmes que nous allons démontrer pour les contours apparents s'appliqueront également aux lignes d'ombre.

IV. — THÉORÈMES SUR LES CONTOURS APPARENTS.

55. — **THÉORÈME.** — *Le contour apparent d'une surface développable contient des lignes droites.*

En effet, soit M un point du contour apparent dans l'espace d'une surface développable. Le plan tangent au point M passe par le centre de projection, mais ce plan tangent contient la génératrice G qui passe par le point M, et de plus, il est tangent à la surface en tous les points de la génératrice G. Donc cette génératrice G fait partie tout entière du contour apparent de la surface.

Cette démonstration est en défaut dans le cas où le point M est un point singulier de la surface.

Il est bien entendu aussi que nous supposons les surfaces complètes, c'est-à-dire que les définitions des contours apparents ne s'appliquent pas entièrement à des fragments de surface.

56. — **THÉORÈME**. — *Toute ligne tracée sur une surface et rencontrant le contour apparent dans l'espace, a sa projection tangente au contour apparent en projection de la surface*

En effet, soit C (fig. 8, pl. I) le contour apparent dans l'espace d'une surface, A une ligne dessinée sur la surface et rencontrant le contour apparent dans l'espace au point M. Soit de plus MT, MT_1 les tangentes à ces deux lignes. Les projections a et c de A et C se rencontrent au point m projection de M. Or les tangentes MT, MT_1 sont contenues toutes deux dans le plan tangent à la surface au point M, de plus ce plan tangent passe par le centre de projection O, puisque M appartient au contour apparent. Donc le plan $OMTT_1$ est un plan projetant, et par suite les deux droites MT, MT_1 ont même projection mt. D'ailleurs, la tangente à une courbe se projette suivant la tangente à la projection de la courbe, donc les deux courbes a et c sont tangentes entre elles, puisqu'elles admettent la même tangente mt.

Dans toute épure, chaque fois qu'on aura à construire une courbe sur une surface, on devra déterminer, lorsqu'on pourra le faire, les points sur les contours apparents, ou tout au moins en tenir compte, parce que ces points servent de limite entre les parties vues et cachées de la courbe sur la surface.

On peut, en effet, considérer les génératrices du cône circonscrit à une surface comme les limites de droites menées par le sommet du cône, coupant d'abord la surface en deux points, lorsqu'elles sont à l'intérieur du cône, et ne coupant plus la surface dans la même région lorsqu'elles sont extérieures au cône.

Donc le contour apparent dans l'espace d'une surface partage la surface en deux régions, l'une d'elles dirigée du côté du centre de projection et qui est vue par un observateur placé au centre de projection, l'autre opposée au centre de projection et qui est cachée pour le même observateur.

La courbe A, en traversant le contour apparent dans l'espace au point M passe donc d'une région vue de la surface à une région cachée.

Ce raisonnement suppose que les deux courbes A et C ne sont pas tangentes entre elles dans l'espace, car alors la courbe A est ou tout entière vue ou tout entière cachée sur la région de surface dont on s'occupe.

57. — Le théorème précédent est en défaut lorsque la tangente à la courbe A passe par le centre de projection, puisqu'alors la tangente à cette courbe se projette suivant un point.

Imaginons (fig. 9, pl. I) un plan passant par OM et par un point N de A très-rapproché de M, ce plan aura pour trace la corde *mn* de la courbe *a*, *m* et *n* étant les projections de M et N. Si le point N se rapproche indéfiniment de M, le plan NOM prend une position limite, qu'on appelle le plan *osculateur* à la courbe A au point M ; mais en même temps, la corde *mn* devient la tangente *mt* à la courbe *a* au point *m*. Donc, dans ce cas particulier, la tangente *mt* à la projection de la courbe est la trace du plan osculateur à la courbe A au point M. D'ailleurs, la projection de la courbe doit rester à l'intérieur du contour apparent en projection *c* ; donc la courbe *a* atteignant le contour apparent *c* sous un angle qui n'est pas nul, doit nécessairement rebrousser en *m* suivant la même tangente *mt*.

En résumé, la tangente à une courbe gauche passant par le centre de projection, la projection de la courbe présente un point de rebroussement au point correspondant. Comme dans le cas général, ce point servira de limite entre les parties vues et cachées de la courbe sur la région de surface correspondante.

58. — Le théorème primitif permet de trouver le contour apparent en projection d'une surface, en le considérant comme l'enveloppe des projections de toutes les lignes tracées sur la surface.

Ainsi, étant donnée une surface réglée, en construisant les projections d'un certain nombre de génératrices, on aura le contour apparent en projection, en traçant une courbe tangente à toutes ces projections.

Comme autre application, le contour apparent en projection d'un cône s'obtiendra en menant, par la projection du sommet, des tangentes à la projection de même nom de la directrice.

Dans le cas d'un cylindre, il faudrait mener à la projection de la directrice, des tangentes parallèles aux projections de même nom des génératrices.

59. — **THÉORÈME.** — *Deux surfaces tangentes entre elles tout le long d'une même courbe, ont leurs contours apparents en projection tangents entre eux, et en même temps à la projection de la courbe de contact des deux surfaces.*

Soit en effet (fig. 10, pl. I) A la courbe de contact de deux surfaces, C le contour apparent dans l'espace de la première surface, et M le point de rencontre de ces deux lignes.

Au point M de la courbe A, le plan tangent est commun aux deux surfaces, mais ce point appartenant au contour apparent dans l'espace C, le plan tangent commun passe par le centre de projection, donc le point M appartient aussi au contour apparent dans l'espace C_1 de la deuxième surface. Ce résultat étant établi, projetons les trois lignes A, C, C_1 suivant a, c, c_1. D'après le théorème précédent, A étant dessinée sur la première surface, elle a sa projection tangente au contour apparent en projection c au point m. De même, A étant dessinée sur la deuxième surface, les deux lignes a et c_1 sont tangentes entre elles au point m.

Donc les trois courbes a, c, c_1 sont tangentes entre elles au point m.

60. — Ce nouveau théorème permet de construire le contour apparent en projection d'une surface, en le considérant comme l'enveloppe des contours apparents en projection de toutes les surfaces inscrites dans la surface donnée.

LIVRE III

PLANS TANGENTS AUX CONES ET AUX CYLINDRES

CHAPITRE PREMIER

. — DÉTERMINER UN POINT DE LA SURFACE D'UN CONE OU D'UN CYLINDRE, PLAN TANGENT EN CE POINT.

61. — Soit, par exemple, *m* la projection horizontale d'un point de la surface d'un cône ou d'un cylindre, le point inconnu est l'intersection de la surface avec la verticale *m*.

Pour trouver ce point, on procédera comme pour une pyramide ou un prisme. Ainsi, dans le cas du cône, par le sommet et la droite on fait passer un plan, dont on détermine la trace sur le plan de base. Cette trace rencontre la base en un certain nombre de points que l'on joint au sommet, on a ainsi les génératrices d'intersection du plan auxiliaire avec le cône. Enfin ces génératrices rencontrent la droite donnée aux points demandés.

Si au lieu d'un cône, on avait un cylindre, on emploierait un plan auxiliaire passant toujours par la droite, mais parallèle aux génératrices du cylindre.

Ayant ainsi trouvé le point de la surface, le plan tangent en ce point sera déterminé :

1° Par la génératrice passant par le point de contact;

2° Par la tangente à la directrice au point où cette directrice est rencontrée par la génératrice de contact.

62. — **EXEMPLE I.** — *Dans la figure* 11, *planche* I, *le cône est déterminé par son sommet* SS′ *et par sa directrice*

contenue dans le plan $P\alpha P_1$, *mais on a donné seulement la projection verticale* D' *de la directrice.*

Cette directrice étant en effet contenue dans le plan $P\alpha P_1$, on n'a plus le droit de se donner arbitrairement sa projection horizontale, parce qu'elle est déterminée.

Proposons-nous ici de trouver le point de la surface projeté horizontalement en m.

Par la verticale *m* et le sommet SS', on a mené un plan, c'est le plan vertical S*m* ; il coupe le plan de base suivant la droite *aba'b'*, qui rencontre la directrice en deux points dont nous avons immédiatement les projections verticales $\mu'\mu'_1$, et qui se projettent horizontalement en μ et μ_1 sur *ab*.

Le plan auxiliaire coupe donc le cône suivant les deux génératrices $S\mu S'\mu'$, $S\mu_1 S'\mu'_1$ qui rencontrent la verticale *m* aux deux points demandés *mm'*, $m_1m'_1$.

Remarquons que cette construction permet d'établir la ponctuation de la surface du cône en projection horizontale. Nous reconnaissons ici, que le point $m_1m'_1$ est vu, tandis que ce point cache le point *mm'*.

Maintenant que nous avons en *mm'* un point de la surface, nous allons chercher le plan tangent en ce point.

Le plan tangent inconnu est déterminé :

1° Par la génératrice $Sm\mu\, S'm'\mu'$;

2° Par la tangente en $\mu\mu'$ à la directrice. Comme la directrice est donnée en projection verticale, nous pouvons dessiner immédiatement sa tangente en projection verticale. Quant à la projection horizontale, on l'obtiendra en tenant compte de ce que la ligne que nous cherchons est contenue dans le plan de la directrice $P\alpha P_1$. La tangente inconnue rencontre donc une droite quelconque du plan de la directrice, et en particulier la trace horizontale Pα au point *tt'*.

Donc finalement, le plan tangent est déterminé par S*m* S'*m'* et par $\mu t\mu' t'$.

63. — EXEMPLE II. — *Soit* $P\alpha P_1$ (fig. 12, pl. I) *le plan de base d'un cylindre, la directrice est donnée par son rabattement* D_2 *sur le plan horizontal, et les génératrices sont parallèles à la direction* AA'. *Proposons-nous de déterminer le point de la surface projeté horizontalement en* m.

Par la verticale *m*, on a mené le plan *mab* parallèle aux géné-

ratrices du cylindre; il coupe le plan de base suivant $aba'b'$, dont il faut marquer les points de rencontre avec la directrice. Mais cette directrice étant donnée par son rabattement, nous avons aussi rabattu $aba'b'$ suivant ab_2. Les points de rencontre μ_2, ν_2 ainsi obtenus se relèvent en $\mu\mu'$ et $\nu\nu'$ sur $aba'b'$.

Nous menons alors par ces deux points des parallèles aux génératrices du cylindre qui rencontrent la verticale m aux deux points demandés mm', nn'.

Pour trouver le plan tangent en mm', il faut construire la tangente en $\mu\mu'$ à la directrice. Cette tangente est connue seulement dans le rabattement; c'est μ_2t, que nous avons relevée suivant $\mu t\mu' t'$ dans le plan $P\alpha P_1$. Le plan tangent est donc déterminé par les deux droites $m\mu m'\mu'$ et $\mu t\mu' t'$.

II. — PLAN TANGENT A UN CONE OU A UN CYLINDRE PAR UN POINT EXTÉRIEUR.

64. — Pour résoudre ce problème dans le cas d'un cône (fig. 13, pl. II), on joint le point donné A au sommet du cône, puis on détermine la trace σ de cette droite sur le plan P de la directrice, et ensuite on mène par ce point σ une tangente à la directrice. Cette tangente σM détermine avec SAσ et la génératrice de contact SM, le plan tangent demandé.

La construction que nous venons d'indiquer suppose le point σ dans les limites de l'épure; lorsqu'il n'en est pas ainsi, on n'a comme ressource qu'à choisir un autre plan de base, ce qui nécessite la construction d'une section plane du cône.

Parmi les nouveaux plans de base, on peut en choisir un passant, par exemple, par le point A. Il suffira alors de mener par le point A une tangente à la nouvelle base; elle déterminera avec le sommet, le plan tangent demandé.

65. — Dans le cas d'un cylindre (fig. 14, pl. II), on mène par le point A une parallèle aux génératrices du cylindre, puis on détermine le point de rencontre σ de cette droite avec le plan de base P, et enfin par le point σ on mène une tangente σm à la directrice, elle détermine avec le point A et la génératrice mM du point de contact, le plan tangent demandé.

Comme dans le cas précédent, si le point σ se trouve hors des limites de l'épure, on choisit un autre plan de base du cylindre.

III. — PLAN TANGENT A UN CONE OU A UN CYLINDRE PARALLÈLE A UNE DROITE DONNÉE.

66. — Par le sommet du cône, on mène une parallèle à la droite donnée D (fig. 15, pl. II), puis on détermine la trace de cette droite sur le plan de base P, et par ce point σ on mène une tangente à la directrice D; cette tangente détermine avec le sommet S le plan tangent demandé.

67. — Si au lieu d'un cône, on a un cylindre par un point *o* de l'espace (fig. 16, pl. II), on mène une parallèle *oa* aux génératrices du cylindre, et une parallèle *od* à la direction donnée; ces deux droites déterminent un plan, dont on cherche la trace *ad* sur le plan de base P, puis, on mène à la directrice une tangente parallèle à *ad*, elle détermine avec la génératrice qui passe par le point de contact, le plan tangent demandé.

IV. — CONTOURS APPARENTS. — OMBRES.

Comme applications de ces différents problèmes, nous citerons la détermination des contours apparents, des cônes et des cylindres, ainsi que la détermination des ombres propres et portées par ces mêmes surfaces.

68. — **EXEMPLE I.** — *Trouver les contours apparents d'un cône déterminé par son sommet* SS′ (fig. 17, pl. II) *et sa directrice contenue dans le plan* $P\alpha P_1$, *cette directrice étant donnée par sa projection verticale* D′.

1° Contour apparent horizontal.

Il faut mener au cône des plans tangents parallèles à une verticale; pour cela, menons par le sommet SS′ la verticale S, puis déterminons le point de rencontre $\sigma\sigma'$ de cette droite avec le plan de base $P\alpha P_1$. Menons maintenant par ce point, des tangentes à la base. On a immédiatement ces tangentes en projection verticale; pour en déduire les projections horizontales, nous remarquerons qu'elles sont contenues dans le plan $P\alpha P_1$, et par suite qu'elles rencontrent la trace horizontale du plan aux points tt', $t_1t'_1$.

En traçant les deux génératrices de contact, les deux droites $SmS'm'$, $Sm_1S'm'_1$ constitueront le contour apparent horizontal

dans l'espace. Quant au contour apparent horizontal en projection, il est composé uniquement des deux droites Sm, Sm_1.

69. — Remarque. — Si l'on prenait la peine de projeter horizontalement la directrice, cette courbe serait en projection horizontale tangente en m et m_1 au contour apparent horizontal. Cette remarque va nous permettre de trouver immédiatement le contour apparent vertical.

2° Contour apparent vertical.

Il suffit ici de mener par le point S′ des tangentes $S'p'$, $S'q'$ à la projection verticale de la directrice. Si l'on veut de plus trouver le contour apparent vertical dans l'espace, il faut chercher les projections horizontales des deux points de contact $p'q'$, en remarquant que ces deux points sont contenus dans le plan $P\alpha P_1$.

Le contour apparent vertical dans l'espace se compose donc des deux droites $SpS'p'$, $SqS'q'$.

70. — **Ponctuation.** — Une fois qu'on a déterminé les contours apparents d'un cône, il suffit d'établir directement la ponctuation d'un point de la surface du cône, pour en déduire la ponctuation de tous les autres.

Dans l'exemple actuel, proposons-nous d'établir la ponctuation de la directrice en projection verticale, en supposant le cône solide, prolongé indéfiniment, et tous les plans transparents.

Soit $m_1m'_1$ un point quelconque de la directrice; par ce point, menons une perpendiculaire au plan vertical, et cherchons ses points de rencontre avec le cône; $m_1m'_1$ est l'un de ces points. Quant au second point, il n'est pas nécessaire ici de le chercher, car, devant se projeter horizontalement à l'intérieur du contour apparent horizontal du cône, il sera nécessairement derrière le point $m_1m'_1$. Donc le point particulier $m_1m'_1$ de la directrice est vu en projection verticale. Il en résulte que la région $p'm'_1q'$ de la directrice est vue en projection verticale, tandis que la région $p'm'q'$ est cachée.

Si l'on dessinait la directrice en projection horizontale, un raisonnement analogue au précédent prouverait que la région mqm_1 est vue en projection horizontale, tandis que la région mpm_1 est cachée.

Nous avons reconnu que le point $m_1m'_1$ de la directrice était vu en projection verticale, il en résulte que la génératrice $Sm_1S'm'_1$

est vue en projection verticale dans la région $S'm'_1$ jusque l'infini à droite, tandis qu'elle est cachée à gauche du sommet, et il en est de même pour toutes les génératrices aboutissant à la portion vue de la directrice. C'est l'inverse qui a lieu pour toutes les autres génératrices.

71. — EXEMPLE II.—*Contours apparents d'un cylindre, connaissant la direction des génératrices, le plan de la directrice, et le rabattement de cette directrice sur le plan horizontal* (fig. 18, pl. II).

1° Contour apparent horizontal.

Il faut mener à la surface des plans tangents parallèles à une verticale. Pour cela, construisons un plan vertical parallèle aux génératrices du cylindre. Soit le plan vertical ab ; il coupe le plan de base suivant $aba'b'$. Nous devons ensuite mener à la directrice une tangente parallèle à cette droite.

Mais la directrice étant donnée par son rabattement, il faut d'abord rabattre $aba'b'$ suivant ab_2.

Menons alors à la directrice rabattue des tangentes m_2t et $\mu_2\theta$ parallèles à ab_2, et relevons ces deux tangentes dans le plan de la directrice, suivant $mtm't'$ et $\mu\theta\mu'\theta'$ parallèles à $aba'b'$. Les points de contact se relèvent en mm' et $\mu\mu'$ sur ces deux tangentes.

Traçons enfin les génératrices déterminées par ces deux points, elles formeront le contour apparent horizontal dans l'espace ; d'ailleurs le contour apparent horizontal en projection est composé des deux droites mt et $\mu\theta$.

2° Contour apparent vertical.

Construisons un plan parallèle aux génératrices et à une perpendiculaire au plan vertical ; soit le plan perpendiculaire au plan vertical $c'd'$. Ce plan coupe le plan de base suivant $cdc'd'$ qui se rabat suivant c_2d.

Menons alors au rabattement de la directrice, des tangentes parallèles à c_2d, soit $p_2r, \pi_2\rho$. Ces deux tangentes se relèvent dans le plan $P\alpha P_1$ suivant des parallèles à $cdc'd'$, soit $prp'r', \pi\rho\pi'\rho'$.

Le contour apparent vertical, en projection, est composé des deux lignes $p'r'$, $\pi'\rho'$.

Pour trouver le contour apparent vertical dans l'espace, il faudrait relever les points de contact, et dessiner les génératrices déterminées par ces deux points.

72. — EXEMPLE III. — *Contours apparents et ombres d'un cône déterminé par son sommet* SS', *et sa base dans le plan horizontal.*

On représentera la partie solide du cône comprise entre le sommet et la base, en supposant les deux plans de projection opaques (*fig.* 19, *pl.* 2).

1° **Le contour apparent horizontal** se compose des tangentes issues du point S à la projection horizontale de la base. Soit Sa,Sb ces deux tangentes.

2° **Le contour apparent vertical** s'obtient en menant au cône des plans tangents parallèles à une perpendiculaire au plan vertical. Les traces horizontales de ces plans tangents seront donc perpendiculaires à la ligne de terre ; de plus elles sont en même temps tangentes à la directrice. Il en résulte que le contour apparent vertical se compose des deux droites S'c' et S'd'.

A l'aide d'un raisonnement analogue à celui que nous avons employé dans le premier exemple, on reconnaîtra que la région $bfdea$ de la base est vue en projection horizontale, et qu'il en est de même de la région $d'e'a'c'$ en projection verticale.

3° Pour déterminer les ombres en éclairant le cône parallèlement à AA', on a mené par le sommet SS' du cône, la droite SσS'σ' parallèle aux rayons lumineux. Soit $\sigma\sigma'$ la trace horizontale de cette droite,nous menons par ce point les tangentes σe,σf à la directrice. Les génératrices d'ombre propre sont alors SeS'e', SfS'f'. Quant au contour de l'ombre portée sur le plan horizontal, il est composé des deux tangentes σe,σf.

En supposant la source lumineuse à gauche, la région S$eacbf$ du cône est dans l'ombre. Les parties vues de cette ombre sont Sae, Sbf en projection horizontale, et S'$e'c'$ en projection verticale.

Il ne reste plus dans cet exemple, qu'à relever l'ombre sur le plan vertical, suivant $\varphi\sigma'_1\varepsilon$.

CHAPITRE II

I. — PLAN TANGENT A UN CONE OU A UN CYLINDRE PAR UNE DROITE.

Ce problème, comme ceux qui suivent dans ce chapitre, n'est généralement pas possible ; nous allons énoncer les constructions à effectuer pour reconnaître si le problème est possible.

73. — Dans le cas d'un cône, on mène par le sommet et par la droite un plan, dont on cherche la trace sur le plan de base. Cette trace doit être tangente à la base.

La vérification que nous venons d'indiquer se fait directement en projection, quand la base est donnée par une projection, ou après un rabattement, lorsque la base est elle-même donnée par son rabattement.

On est certain que le problème est possible, lorsque la droite passe par le sommet du cône.

74. — Dans le cas d'un cylindre, on mène par la droite un plan parallèle aux génératrices du cylindre, sa trace sur le plan de base du cylindre doit être tangente à la base du cylindre.

Cette vérification est impossible à faire, lorsque la droite est parallèle aux génératrices du cylindre. Mais il est alors évident que le problème est généralement possible, et que les plans tangents demandés s'obtiennent en menant à la directrice des tangentes par la trace de la droite sur le plan de la directrice.

II. — PLAN TANGENT A UN CONE OU A UN CYLINDRE, PARALLÈLE A UN PLAN DONNÉ.

75. — Pour reconnaître si ce problème est possible, dans le cas d'un cône, on mène par le sommet un plan parallèle au plan donné ; sa trace sur le plan de base doit être tangente à la base.

76. — Dans le cas d'un cylindre, il faut et il suffit que le plan donné soit parallèle aux génératrices du cylindre.

III. — PLAN TANGENT COMMUN A DEUX SURFACES CYLINDRIQUES OU CONIQUES.

77. — 1° Plan tangent commun à deux cônes.

Pour reconnaître s'il est possible de mener à deux cônes un plan tangent commun, on mène à chacun des cônes un plan tangent par le sommet de l'autre cône, les deux plans ainsi obtenus doivent coïncider, et par suite les deux traces de ces deux plans sur un troisième plan arbitraire doivent se confondre, ou bien les points de rencontre de ces deux plans avec une droite quelconque doivent coïncider.

En supposant les bases des deux cônes dans le même plan, voici donc comment on fera cette vérification. Après avoir joint les sommets des deux cônes par une ligne droite, on déterminera la trace de cette droite sur le plan de base, puis on vérifiera s'il est possible de mener par ce point une tangente commune aux deux bases.

Si les bases étaient dans des plans différents, on mènerait d'abord la ligne des deux sommets, puis on déterminerait les deux points de rencontre de cette droite avec les deux plans de base, et l'on ferait passer par ces points des tangentes aux bases correspondantes. Les tangentes ainsi obtenues doivent rencontrer la droite d'intersection des deux plans de base au même point.

Cette vérification ne peut plus se faire, lorsque les deux cônes ont même sommet. On obtient alors les plans tangents communs, en menant des tangentes communes aux deux bases supposées dans le même plan.

Nous aurons occasion plus tard de trouver autrement ces plans tangents communs dans le cas où les deux cônes sont de révolution.

78. — 2° Plan tangent commun à un cône et à un cylindre.

Pour reconnaître si ce problème est possible, on mène au cône un plan tangent parallèle aux génératrices du cylindre, et au cylindre un plan tangent par le sommet du cône, les deux plans ainsi obtenus doivent coïncider.

79. — 3° Plan tangent commun à deux cylindres.

On mène à chaque cylindre un plan tangent parallèle aux génératrices de l'autre cylindre. Les deux plans ainsi obtenus doivent coïncider.

La vérification ne peut plus se faire, lorsque les génératrices des deux cylindres sont parallèles entre elles. Mais on voit *à priori* que le problème est généralement possible.

On obtient alors les plans tangents communs, en menant des tangentes communes aux deux directrices supposées dans le même plan, puis on fait passer par chacune de ces droites un plan tangent à l'un des cylindres.

Dans ces deux derniers cas, les constructions à effectuer pour faire la vérification sont analogues à celles que nous avons indiquées dans le premier cas.

Remarquons enfin que la vérification est inutile, c'est-à-dire que le problème est possible, lorsque les deux surfaces ont la même directrice plane.

CHAPITRE III

I. — MENER A DEUX SURFACES CYLINDRIQUES OU CONIQUES, DES PLANS TANGENTS PARALLÈLES ENTRE EUX.

80. — 1° Mener à deux cônes, des plans tangents parallèles entre eux.

Pour mener à deux cônes des plans tangents parallèles entre eux, on commence par transporter les deux cônes parallèlement à eux-mêmes, de manière à leur donner même sommet, puis on mène aux deux cônes ainsi transportés un plan tangent commun. Il existe alors pour chaque cône primitif, un plan tangent parallèle à ce plan tangent commun. On formera donc ainsi,un système de deux plans tangents parallèles entre eux.

Pour transporter un cône parallèlement à lui-même, de manière à amener son sommet en un point donné, on doit mener par ce point des parallèles à toutes les génératrices du cône primitif. On forme ainsi un cône égal au cône primitif. Les plans tangents au cône primitif et au cône transporté suivant des génératrices parallèles sont également parallèles entre eux.

Pour construire simplement le cône transporté, il est bon de remarquer que les sections par un même plan du cône primitif et du cône transporté sont homothétiques, le centre de similitude étant la trace de la ligne des sommets sur le plan sécant. En particulier, ces sections seront égales entre elles, lorsque le plan sécant sera parallèle à la ligne des sommets.

Si, par exemple, le cône primitif a pour base dans le plan horizontal une circonférence, en menant par le point des parallèles à trois génératrices du cône primitif, puis en cherchant les traces horizontales de ces trois droites, on aura la base du cône transporté en faisant passer une circonférence par ces trois traces.

En appliquant la même construction à un point quelconque

du plan de la première base, on aura le point homologue de la seconde base. On aura donc ainsi le moyen de trouver le centre, les sommets, etc., de la deuxième base, en supposant, bien entendu, les deux plans de base parallèles entre eux.

Ces différentes constructions étant effectuées pour les deux cônes primitifs, on aura alors à mener un plan tangent commun aux deux cônes transportés. Nous savons résoudre ce problème lorsque les deux bases sont dans le même plan. S'il n'en était pas ainsi, il faudrait couper les deux cônes transportés par un même plan, et choisir ces deux sections comme nouvelles directrices.

Rappelons encore une fois que nous aurons le moyen plus tard d'éviter cette construction, lorsque les deux cônes donnés seront de révolution.

81. — 2° Mener à un cône et à un cylindre des plans tangents parallèles entre eux.

Pour mener à un cône et à un cylindre des plans tangents parallèles entre eux, on mène au cône un plan tangent parallèle aux génératrices du cylindre, puis au cylindre un plan tangent parallèle au plan ainsi obtenu.

82. — 3° Mener à deux cylindres des plans tangents parallèles entre eux.

Enfin, pour mener à deux cylindres des plans tangents parallèles entre eux, on mène à chaque cylindre un plan tangent parallèle aux génératrices de l'autre cylindre.

II. — NORMALE COMMUNE A DEUX SURFACES CYLINDRIQUES OU CONIQUES.

83. — Les plans tangents aux deux pieds de la normale commune, étant perpendiculaires tous deux sur la normale commune, sont parallèles entre eux. Donc les pieds de la normale commune se trouvent sur les génératrices de contact de deux plans tangents parallèles entre eux.

D'ailleurs, toute normale à une surface est en même temps normale à toutes les lignes tracées sur la surface et passant par son pied.

Donc, en résumé, *la normale commune à deux surfaces cylindriques ou coniques est la perpendiculaire commune aux génératrices de contact de deux plans tangents parallèles entre eux*:

III. — EXERCICE SUR LES PLANS TANGENTS AUX CONES ET AUX CYLINDRES.

84. — *Étant donné un cône déterminé par son sommet* S_1 *et sa directrice* D_1 *contenue dans le plan* P_1, *on coupe ce cône par le plan* P_2 ; *la section ainsi obtenue* D_2 *sert de directrice à un deuxième cône de sommet* S_2. *Cette même opération étant répétée un certain nombre de fois, on arrive finalement à un dernier cône de sommet* S_n, *dont la directrice* D_n *est la section par le plan* P_n *du cône* S_{n-1}.

On demande de mener par un point A *un plan tangent au dernier cône* S_n.

Dans ce problème, les données sont : 1° les différents sommets $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n$; 2° les plans de base successifs $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$; 3° la première directrice D_1, et il faut éviter de construire les directrices intermédiaires.

Le problème qui consiste à mener par un point un plan tangent à un cône dont la directrice est définie par son plan et sa projection horizontale est un cas particulier de celui qui nous occupe ; en effet, on peut considérer la base du cône, comme l'intersection du plan de cette base avec son cylindre projetant.

Pour mener par le point A un plan tangent au cône S_n, il faut joindre AS_n, puis déterminer la trace σ_n de cette droite sur le plan de base P_n, et mener par ce point une tangente à la base D_n.

Mais cette base D_n n'est pas connue. Nous remarquerons alors que la courbe D_n étant tracée sur le cône S_{n-1}, la tangente cherchée est contenue dans le plan tangent au cône S_{n-1} mené par le point σ_n.

Nous avons donc ramené le problème primitif à un problème analogue, le rang du cône étant diminué d'une unité.

En répétant le même raisonnement, nous aurons finalement à mener au cône S_1, un plan tangent par le point σ_2.

Pour cela, joignons $S_1\sigma_2$ qui rencontre P_1 au point σ_1, puis par ce point σ_1 menons la tangente $\sigma_1 m_1$ à la directrice D_1.

Cette fois, la construction peut s'effectuer, puisque la directrice D_1 est donnée.

En cherchant alors l'intersection du plan tangent $S_1\sigma_1 m_1$ avec le plan P_2, on aura la tangente $\sigma_2 m_2$ à la directrice D_2.

Quant au point de contact m_2, il sera l'intersection du plan P_2 ou de la tangente $\sigma_2 m_2$ avec la génératrice $S_1 m_1$.

Nous trouverons ainsi successivement les tangentes $\sigma_2 m_2$, $\sigma_3 m_3$... $\sigma_n m_n$ et les points de contact $m_2 m_3$... m_n.

La solution que nous venons d'indiquer s'applique naturellement au cas où la série de surfaces contient des cylindres.

On procéderait aussi de la même manière pour mener à la dernière surface un plan tangent parallèle à une droite donnée.

Enfin, on emploierait une méthode analogue à la précédente, pour trouver l'intersection d'une droite avec la dernière surface.

LIVRE IV

SURFACES DE RÉVOLUTION

CHAPITRE PREMIER

Dans l'étude que nous allons faire des surfaces de révolution, nous supposerons toujours l'axe perpendiculaire à l'un des plans de projection, dans le but de construire plus facilement les parallèles de la surface, parce que ces parallèles se projetteront suivant des circonférences et des droites, tandis qu'autrement ils se projetteraient suivant des ellipses.

Nous reconnaîtrons cependant plus tard, que pour la résolution de certains problèmes, on peut, en utilisant les propriétés de la sphère, supposer seulement l'axe parallèle à l'un des plans de projection.

I. — PROPRIÉTÉS DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

85. — THÉORÈME. — *Tout plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire sur le plan méridien passant par le point de contact.*

Soit en effet M (fig. 20, pl. 3) un point quelconque d'une surface de révolution. Construisons d'abord le parallèle et la méridienne passant par ce point. Les tangentes MT, MS à ces deux courbes déterminent le plan tangent à la surface au point M.

Or le plan du parallèle est perpendiculaire sur l'axe de révolution OS, donc la tangente MT, qui est perpendiculaire sur le rayon OM du parallèle, est en même temps perpendiculaire sur

le plan du méridien MOS. Il en est de même alors pour le plan tangent SMT.

Ce théorème fondamental des surfaces de révolution peut encore s'énoncer de la manière suivante :

86. — *Toutes les normales à une surface de révolution rencontrent l'axe.*

En effet, la normale en M à la surface est perpendiculaire sur la tangente MT au parallèle, elle est donc contenue dans le plan méridien MOS, et par suite, elle rencontre l'axe ; comme cas particulier, elle peut être parallèle à l'axe.

87. — **THÉORÈME.** — *Tous les plans tangents à une surface de révolution aux différents points d'un même parallèle rencontrent l'axe au même point.*

En effet, en faisant tourner le point M (fig. 20, pl. 3) autour de l'axe, de manière à l'amener en un point quelconque du parallèle, la droite MS deviendra la tangente M_1S à la méridienne du point M_1, et comme elle est contenue dans le plan tangent en M_1, il en résulte que ce plan tangent passe toujours par le point S quel que soit le point M_1 du parallèle considéré.

Il résulte de ce théorème que le point S est le sommet d'un cône de révolution circonscrit à la surface tout le long du parallèle considéré

88. — Comme deuxième énoncé de ce théorème, on peut dire que *les normales à une surface de révolution aux différents points d'un même parallèle rencontrent l'axe au même point.*

Ces normales forment donc un cône de révolution coupant normalement la surface tout le long du parallèle considéré.

Remarquons que le point fixe N est le centre d'une sphère inscrite dans la surface de révolution tout le long du parallèle considéré.

II. — DÉTERMINER UN POINT D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION. — PLAN TANGENT EN CE POINT.

89. — Soit *m* (fig. 21, pl. 3) la projection horizontale d'un point d'une surface de révolution dont l'axe est vertical, et dont on connait la méridienne principale CC′. (On appelle ainsi la méridienne de front qui par suite se projette verticalement suivant une courbe égale à la courbe de l'espace.)

Traçons le parallèle passant par le point inconnu, sa projec-

tion horizontale est une circonférence ayant pour centre le pied de l'axe *o* et passant par le point *m*.

Ce parallèle rencontre la méridienne principale au point $\mu\mu'$, et par suite il se projette verticalement suivant une parallèle à la ligne de terre menée par μ'. Il ne reste plus qu'à projeter verticalement le point *m* en *m'* sur la projection verticale du parallèle.

Dans la figure, nous avons choisi un ellipsoïde allongé. Le parallèle rencontre la méridienne aux deux points $\mu\mu'$, $\mu_1\mu'_1$, on n'obtient donc de ce côté qu'une solution *mm'*.

Mais on peut encore choisir comme points de rencontre du parallèle avec la méridienne principale les deux autres points $\nu\nu'$, $\nu_1\nu'_1$, ce qui donne la deuxième solution *nn'*.

90. — Si nous nous donnions au contraire la projection verticale *m'* du point, on aurait immédiatement la projection verticale du parallèle, en menant par *m'* une parallèle à la ligne de terre. Ce parallèle rencontre alors la méridienne principale aux deux points $\mu\mu'$, $\mu_1\mu'_1$, et par suite, il se projette horizontalement suivant une circonférence décrite du point *o* comme centre avec $o\mu$ pour rayon.

On obtient de cette manière les deux solutions *mm'* et *pp'*.

91. — Le problème que nous venons de résoudre permet d'établir la ponctuation d'un point quelconque de la surface.

Nous reconnaissons, par exemple ici, que le point *mm'* est vu dans les deux projections, tandis que ce même point cache premièrement le point *nn'* en projection horizontale, deuxièmement le point *pp'* en projection verticale.

Maintenant que nous avons en *mm'* un point quelconque de la surface, proposons-nous de trouver le plan tangent en ce point.

92. — Pour cela, faisons tourner le point *mm'* autour de l'axe, pour l'amener en $\mu\mu'$ sur la ligne qui engendre la surface, c'est-à-dire sur la méridienne principale. Construisons ensuite le plan tangent en ce point $\mu\mu'$ à la surface ; il contient la tangente $\mu S \mu' S'$ à la méridienne principale, et la tangente au parallèle.

Enfin, faisons tourner ce plan d'un angle égal à l'angle μom, et nous aurons le plan tangent demandé.

Dans la figure, nous avons fait tourner la tangente à la méridienne, en tenant compte de son point de rencontre SS' avec

l'axe. D'ailleurs, la tangente au parallèle en $\mu\mu'$ devient la tangente $mtm't'$ au même parallèle en mm'.

Donc, finalement, le plan tangent demandé est déterminé par les deux droites $SmS'm'$ et $mtm't'$.

Ayant construit le plan tangent en mm', on peut en déduire la normale, en menant par le point de contact la perpendiculaire sur le plan tangent, mais il est plus simple de procéder directement, en employant d'ailleurs un procédé analogue au précédent.

Faisons d'abord tourner le point mm' autour de l'axe, de manière à l'amener en $\mu\mu'$ sur la méridienne principale, puis construisons la normale en ce point à la surface; elle sera en même temps normale à la méridienne principale. Soit donc $\mu'\omega'$ cette normale. Il ne reste plus qu'à la faire tourner en sens contraire de la rotation précédente, ce qui donne à l'aide du point fixe, suivant $m\omega m'\omega'$, la normale demandée.

III. — CONTOURS APPARENTS.

93. — Si nous considérons un point quelconque de la méridienne principale, le plan tangent en ce point est perpendiculaire sur le plan vertical, et par suite, la méridienne principale sert de contour apparent vertical.

Menons ensuite à la méridienne principale une tangente verticale $a'\alpha$ (fig. 21, pl. 3), le parallèle déterminé par le point de contact aa' sera le parallèle de rayon maximum, et il servira de contour apparent horizontal. En effet, au point particulier aa' de ce parallèle, le plan tangent contenant la tangente à la méridienne qui est verticale est lui-même vertical.

Ce parallèle de rayon maximum s'appelle l'*équateur de la surface.* Lorsque le rayon de ce parallèle est minimum, on appelle aussi ce parallèle le *collier* ou *cercle de gorge.*

CHAPITRE II

I. — PLAN TANGENT PARALLÈLE A UN PLAN DONNÉ.

94. — Examinons d'abord le cas particulier où le plan donné est perpendiculaire au plan vertical (fig. 22, pl. 3).

Le plan méridien passant par le point de contact, devant être perpendiculaire sur le plan tangent, sera aussi perpendiculaire sur le plan donné, et par suite le point de contact inconnu se trouve dans le plan méridien principal, sur la méridienne principale. D'ailleurs, tout plan tangent à la surface en un point de la méridienne principale a pour trace verticale la tangente au point considéré à la méridienne principale.

Donc, dans le cas actuel, nous aurons la trace verticale du plan tangent demandé, en menant à la méridienne principale une tangente $R_1\beta$ parallèle à la trace verticale $P_1\alpha$ du plan donné. $R\beta$ sera la trace horizontale du plan tangent inconnu, et $m'm$ sera son point de contact.

Examinons maintenant le cas où le plan donné est quelconque (fig. 23, pl. 3). Nous commencerons par faire tourner le plan $P\alpha P_1$ autour de l'axe, de manière à le rendre perpendiculaire au plan vertical. Soit $P'\alpha'P'_1$ sa nouvelle position. Menons ensuite le plan tangent $R'\beta'R'_1$ parallèle à $P'\alpha'P'_1$; puis faisons tourner ce plan, ainsi que son point de contact $\mu\mu'$, d'un angle égal à l'angle de rotation précédent, mais en sens contraire. Nous obtiendrons ainsi, suivant $R\beta R_1$, le plan tangent demandé; mm' sera son point de contact.

II. — NORMALE PARALLÈLE A UNE DROITE DONNÉE. — POINTS BRILLANTS.

95. — La résolution de ce problème est tout à fait analogue à celle du précédent. On commence par faire tourner la droite

autour de l'axe, de manière à la rendre parallèle au plan vertical, puis on mène à la méridienne principale, une normale parallèle à la projection verticale nouvelle de la droite; enfin, on fait tourner le pied de la normale en sens contraire de la rotation précédente.

Nous avons cité ce problème, surtout dans le but de montrer la détermination des points brillants d'une surface de révolution, cette surface étant éclairée par des rayons lumineux parallèles entre eux.

96. — Étant donné une surface quelconque, les points brillants de cette surface sont les points pour lesquels il y a réflexion totale. Ces points remplissent donc les conditions suivantes :

1° *Le rayon lumineux et le rayon réfléchi sont contenus dans un même plan normal ;*

2° *L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.*

Donc, la normale à la surface aux points brillants est parallèle à la bissectrice de l'angle des rayons lumineux et des rayons réfléchis.

97. — **Remarque.** — L'angle des deux droites admet deux bissectrices ; l'une d'elles correspond au point brillant dans la partie éclairée, l'autre au point brillant dans l'ombre. Pour obtenir le premier point brillant, il faut prendre la bissectrice de l'angle formé par une parallèle aux rayons lumineux menée par un point de l'espace, et dirigée vers la source lumineuse, avec une droite joignant le même point de l'espace à l'œil de l'observateur.

On explique la présence du second point brillant, en disant que l'espace environnant le corps éclaire encore l'objet, comme s'il existait une deuxième source lumineuse opposée à la première, mais d'intensité moindre.

Proposons-nous (fig. 24, pl. 3) d'appliquer ce que nous venons de dire à la recherche *des points brillants en projection horizontale et en projection verticale, d'un ellipsoïde de révolution, éclairé par des rayons lumineux parallèles à* LL'.

1° Point brillant en projection horizontale.

Pour regarder la projection horizontale, l'observateur est supposé à l'infini au-dessus du plan horizontal. Nous aurons donc la direction de la normale au point brillant, en construisant la bissectrice de l'angle des rayons lumineux avec une verticale.

Pour résoudre ce problème, nous avons mené par oo' une parallèle aux rayons lumineux oa, $o'a'$ et une verticale ; puis, nous avons fait tourner le plan ainsi formé autour de la verticale o, de manière à le rendre parallèle au plan vertical. Les bissectrices sont alors $ob_1o'b'_1$, $o\beta_1o'\beta'_1$.

Dans cette position, nous avons mené à la surface des normales parallèles à ces droites. Soit $m_1m'_1$, $\mu_1\mu'_1$ les pieds de ces deux normales. Il ne reste plus qu'à faire tourner ces deux points en sens contraire de la rotation précédente, ce qui donne en mm', $\mu\mu'$ les deux points demandés. Le premier point m est, en projection horizontale, le point brillant de la partie éclairée ; μ est le point brillant dans l'ombre.

98.—Remarque.—Nous n'avons, bien entendu, marqué que les pieds de normales vus par l'observateur. Il faudrait, au contraire, tenir compte des deux autres points, symétriques d'ailleurs des deux premiers par rapport au centre, si l'on représentait seulement la surface de l'ellipsoïde au-dessous du plan horizontal o', et en ne tenant pas compte des reflets produits par la surface elle-même.

2° Point brillant en projection verticale.

Ici, les rayons réfléchis sont perpendiculaires au plan vertical, puisque l'observateur est à l'infini en avant du plan vertical.

Nous avons fait tourner le rayon lumineux $oao'a'$ autour de la perpendiculaire au plan vertical o', de manière à le rendre horizontal ; soit $oa_2o'a'_2$. Puis nous avons mené les bissectrices de l'angle $a_2oha'_2o'h'$; soit $oc_2o'c'_2$, $o\gamma_2o'\gamma'_2$.

En faisant tourner ces droites en sens contraire de la rotation précédente, nous avons suivant $oco'c'$, $o\gamma o'\gamma'$, les directions des normales demandées.

Enfin, la construction générale appliquée à ces deux droites donne, comme dans le cas précédent, en nn', $\nu\nu'$ les points brillants de la projection verticale.

99.—Remarque.—Puisque nous parlons ici de points brillants des surfaces, faisons remarquer qu'il n'y en aura pas, en général, sur les cônes et les cylindres. En effet, mener une normale à une surface parallèlement à une droite donnée, revient à mener à la surface un plan tangent parallèle à un plan donné. Or ce problème est en général impossible pour les surfaces cylindriques ou coniques. Ainsi, on n'a pas sur ces surfaces de lignes brillantes,

suivant lesquelles il y a réflexion totale. On a tout simplement des génératrices paraissant plus éclairées que les génératrices voisines.

III. — PLAN TANGENT AYANT SON POINT DE CONTACT SUR UN PARALLÈLE DONNÉ.

100. — Mener à une surface de révolution, par un point extérieur, un plan tangent ayant son point de contact sur un parallèle donné.

Soit pp' (fig. 23, pl. 3) le parallèle sur lequel doit se trouver le point de contact; AA′ le point extérieur.

Nous savons que tous les plans tangents à une surface de révolution en tous les points d'un même parallèle rencontrent l'axe en un point fixe. Cherchons donc ce point fixe, et pour cela, construisons le plan tangent à la surface, en un point particulier du parallèle, par exemple, le point de rencontre du parallèle pp' avec la méridienne CC′. Nous obtenons ainsi comme point fixe le point SS′.

Le plan inconnu est alors tangent à un cône de révolution circonscrit à la surface, ayant pour sommet le point SS′, et pour directrice le parallèle pp'.

Pour mener ce plan tangent, on a joint SAS′A′, puis déterminé le point de rencontre $\sigma\sigma'$ de cette droite avec le plan de base du cône, et enfin on a mené par ce point les tangentes $\sigma m\sigma n$ au parallèle. Les points de contact demandés sont alors les points mm' et nn'. Quant aux plans tangents inconnus, ce sont les plans $S\sigma AmS'\sigma'A'm'$, $S\sigma AnS'\sigma'A'n'$.

La construction que nous venons d'employer suppose les points SS′ et $\sigma\sigma'$ dans les limites de l'épure.

Lorsqu'il n'en est pas ainsi, on choisit pour plan de base du cône, la section de ce cône par le plan horizontal A′. Cette section est une circonférence ayant son centre sur l'axe et passant par le point $\mu_1\mu'_1$ qui est le point de rencontre du plan horizontal A′ avec une génératrice principale du cône. Il suffit alors de mener par A une tangente Am_1 à cette circonférence.

La génératrice de contact se projette horizontalement suivant Sm_1, et rencontre enfin le parallèle donné au point de contact demandé mm'.

101. — Mener à une surface de révolution un plan tangent parallèle à une droite donnée, le point de contact étant sur un parallèle donné.

On construira comme précédemment le cône SS′ circonscrit à la surface tout le long du parallèle donné, puis on mènera à ce cône (fig. 25, pl. 4) un plan tangent parallèle à la direction donnée.

Si la construction ne réussit pas, parce que le point SS′ est hors des limites de l'épure, on transporte le cône auxiliaire parallèlement à lui-même, de manière à amener son sommet dans les limites de l'épure en $s_1s'_1$; puis on mène à ce cône auxiliaire le plan tangent $s_1m_1\tau_1$ parallèle à la direction donnée. On en déduit la direction de la génératrice de contact inconnue sur le cône primitif.

Enfin, en menant par le point S une parallèle à s_1m_1, son point de rencontre avec le parallèle considéré donne en mm' le point de contact inconnu.

IV. — PLAN TANGENT AYANT SON POINT DE CONTACT SUR UNE MÉRIDIENNE DONNÉE.

102. — Mener par un point extérieur un plan tangent à une surface de révolution, le point de contact étant dans un plan méridien donné (fig. 26, pl. 4).

Commençons par faire tourner toute la figure autour de l'axe, de manière à faire coïncider le plan méridien donné M avec le plan méridien principal.

Le point AA′ prend alors la position $A_1A'_1$. Actuellement, le plan tangent a pour trace verticale une tangente à la méridienne principale menée par A'_1. Il ne reste plus qu'à faire tourner le point de contact $m_1m'_1$ ainsi obtenu, en sens contraire de la rotation précédente, ce qui donne en mm' le point de contact demandé.

On peut encore expliquer cette construction en disant : Le plan tangent inconnu est tangent à un cylindre circonscrit à la surface, tout le long de la méridienne considérée, et ayant pour section droite cette méridienne.

On mène donc par le point AA′ une parallèle aux génératrices du cylindre, qui rencontre le plan de base en un point projeté horizontalement en α. Par ce point, on doit mener une tangente

à la base ; pour cela, nous avons fait coïncider la méridienne donnée avec la méridienne principale, ce qui amène le point α en $\alpha_1\alpha'_1$.

On a ensuite mené la tangente et ramené le point de contact $m_1m'_1$ en mm'.

103. Mener à une surface de révolution un plan tangent parallèle à une droite donnée, le point de contact étant dans un plan méridien donné (fig. 27, pl. 4).

Nous suivons ici la même marche que dans l'exemple précédent, c'est-à-dire que nous faisons tourner toute la figure autour de l'axe, de manière à faire coïncider le plan méridien donné avec le plan méridien principal.

On mènera alors à la méridienne principale une tangente parallèle à la projection verticale nouvelle de la direction donnée. Enfin, on fera tourner le point de contact ainsi obtenu en sens contraire de la rotation précédente.

LIVRE V

DE LA SPHERE

CHAPITRE PREMIER

I. — DÉTERMINATION D'UN POINT DE LA SURFACE. — PLAN TANGENT.

104. — La sphère est une surface de révolution engendrée par une circonférence tournant autour de l'un de ses diamètres.

Nous allons donc pouvoir appliquer à cette surface les mêmes constructions que nous venons d'établir pour les surfaces de révolution, avec la faculté de choisir comme axe de révolution tel diamètre que nous voudrons de la sphère.

Parmi les axes que nous aurons l'occasion de choisir, citons avant tout les deux diamètres perpendiculaires aux plans de projection, et quelquefois, les diamètres parallèles aux plans de projection.

Soit oo' (fig. 28, pl. 4) le centre d'une sphère dont nous connaissons le rayon, et m la projection horizontale d'un point de la surface, proposons-nous de trouver la projection verticale de ce point.

105. — **1re construction**. — Prenons, par exemple, comme axe de révolution la verticale o. Alors la méridienne principale de la sphère est une circonférence contenue dans le plan de front o. Cette circonférence a pour projection horizontale A, la parallèle à la ligne de terre, menée par le point o, et pour projection verticale A′, une circonférence ayant pour centre le point o', et pour rayon le rayon de la sphère.

Le parallèle passant par le point inconnu se projette donc horizontalement, suivant une circonférence ayant pour centre le point o et passant par le point m. Ce parallèle rencontre la méridienne principale AA′, au point $\mu\mu'$; et par suite, il se projette verticalement suivant la parallèle à la ligne de terre menée par μ'.

Nous déduisons de là en m' la projection verticale demandée. Le problème présente évidemment deux solutions, mm', $m_1m'_1$, puisque l'on peut choisir comme point de rencontre du parallèle auxiliaire avec la méridienne principale le point $\mu\mu'$ ou le point $\mu_1\mu'_1$.

106. — 2e construction. — Les données étant les mêmes que précédemment, prenons comme axe de révolution la perpendiculaire au plan vertical o'. La méridienne principale (fig. 29, pl. 4) est alors la circonférence BB′, dont la projection verticale est une parallèle à la ligne de terre menée par o', et dont la projection horizontale est la circonférence décrite du point o comme centre, avec un rayon égal au rayon de la sphère.

Actuellement, le parallèle passant par le point inconnu se projette horizontalement suivant une parallèle à la ligne de terre menée par le point m. Ce parallèle rencontre la méridienne principale BB′, au point $\mu\mu'$, et se projette verticalement suivant une circonférence décrite de o' comme centre, avec $o'\mu'$ pour rayon. Le point m se projette donc verticalement en m' ou m'_1, sur la projection verticale du parallèle. On a ainsi les deux solutions mm', $m_1m'_1$.

107. — 3e construction. — Prenons cette fois comme axe le diamètre horizontal $ozo'z'$ (fig. 30, pl. 5) perpendiculaire au plan vertical om, et choisissons ce plan vertical om comme plan vertical de projection. Pour simplifier les constructions, nous avons élevé en même temps le plan horizontal jusqu'en o'.

Dans le système actuel x_1y_1, l'axe est donc la perpendiculaire au plan vertical o'_1 ; quant à la méridienne principale, c'est le grand cercle BB′, dans le système xy, ou BB′$_1$, dans le système x_1y_1.

Le parallèle passant par le point inconnu se projette ici horizontalement suivant x_1y_1 ; il rencontre la méridienne principale en $\mu\mu'_1$, et par suite, il se projette verticalement suivant une circonférence décrite de o'_1 comme centre, avec $o'_1\mu'_1$ comme

rayon. Dans le dessin, cette circonférence coïncide avec B. Le point m se projette donc verticalement en m'_1 dans le système x_1y_1, et par suite en m' dans le système xy.

108. — Cherchons maintenant le plan tangent en mm'. Ce plan tangent est perpendiculaire au rayon passant par le point de contact; on aura donc, suivant $mhm'h'$ (fig. 28, pl. 4) (fig. 29, pl. 4) une horizontale, et suivant $mfm'f'$, une ligne de front du plan tangent.

Remarquons (fig. 28, pl. 4) que la ligne $mhm'h'$ n'est autre chose que la tangente au parallèle, en prenant comme axe de révolution la verticale o; de même (fig. 29, pl. 4), $mfm'f'$ est la tangente au parallèle, en choisissant comme axe de révolution, la perpendiculaire au plan vertical o'.

Dans la figure 30, planche 5, si nous construisons le plan tangent en mm'_1, dans le système x_1y_1, nous constatons que le rayon $omo'_1m'_1$ est dans le plan vertical, le plan tangent est alors perpendiculaire au plan vertical. La trace verticale du plan tangent dans le système x_1y_1 est donc la perpendiculaire à $o'_1m'_1$ menée par m'_1, et la trace horizontale dans le même système est H perpendiculaire à x_1y_1.

En revenant dans le système xy, nous aurons suivant HH′ une horizontale du plan tangent.

109.— Il résulte donc de cette construction la remarque suivante : la trace HH′ du plan tangent à la sphère en mm' sur le plan horizontal o' est la ***polaire*** du point m, par rapport au grand cercle BB′, qui est la section de la sphère par le même plan horizontal o'.

On aura pour la même raison la ligne de front FF′ du plan tangent, en prenant dans le plan de front o, la ***polaire*** du point m' par rapport au grand cercle AA′.

110. — Remarque. — En tous les points des méridiennes principales AA′,BB′, les plans tangents sont perpendiculaires aux plans de projection correspondants ; donc, comme pour les surfaces de révolution, ces méridiennes principales déterminent les contours apparents de la sphère.

Ainsi les contours apparents d'une sphère sont les sections de la surface par les plans parallèles aux plans de projection menés par le centre.

II. — PLAN TANGENT PARALLÈLE A UN PLAN DONNÉ.

111. — 1re solution. — Faisons tourner le plan $P\alpha P_1$ (fig. 31, pl. 5) autour de la verticale du centre, de manière à le rendre perpendiculaire au plan vertical. Soit $R\beta R_1$ sa nouvelle position. Menons alors au contour apparent vertical une tangente parallèle à $R_1\beta$; nous déterminons ainsi le point de contact m'_1m_1 qu'il faut faire tourner de l'angle $\lambda_1 o\lambda$, pour avoir en mm' le point demandé. Il ne reste plus, pour avoir le plan tangent, qu'à mener par mm', un plan parallèle au plan $P\alpha P_1$, ce qui donne le plan $T\theta T_1$.

112. — 2e solution. — Abaissons du centre de la sphère une perpendiculaire sur le plan donné $P\alpha P_1$ (fig. 32, pl. 5) et portons sur cette droite $oao'a'$, à partir du centre, une longueur égale au rayon de la sphère ; nous aurons ainsi en mm' le point de contact.

Nous avons employé ici une rotation autour de la verticale o, rendant $oao'a'$ parallèle au plan vertical. La longueur du rayon a été portée suivant $om_1o'_1m'_1$.

Ayant trouvé le point de contact mm', il ne reste plus qu'à mener par ce point un plan $R\beta R_1$ parallèle au plan $P\alpha P_1$, pour avoir le plan tangent demandé.

Dans ces deux solutions, on aurait pu trouver le point de contact et le plan tangent, à l'aide d'un changement de plan vertical par exemple, en prenant comme ligne de terre une perpendiculaire sur la trace horizontale du plan ; ce changement de plan ayant le même but que les rotations précédentes.

113. — Problème. — *Mener à une sphère un plan tangent par un point extérieur, ou parallèle à une droite donnée, le point de contact étant sur un parallèle donné.*

La solution de ce problème pour la sphère est identique à celle que nous avons donné déjà pour les surfaces de révolution.

CHAPITRE II

I. — SPHÈRE CIRCONSCRITE A UN TÉTRAÈDRE.

114. — Le centre d'une sphère passant par deux points donnés est dans le plan perpendiculaire au milieu de la ligne qui joint les deux points donnés. La sphère étant circonscrite à un tétraèdre, elle aura son centre dans les plans perpendiculaires aux milieux des six arêtes de ce tétraèdre.

Trois de ces plans suffisent pour déterminer le centre inconnu; en ayant soin toutefois de ne pas choisir trois arêtes formant une même face, car ces plans se coupent suivant une même droite qui est l'axe de la circonférence circonscrite à cette face. Il est évident d'ailleurs qu'en considérant seulement trois arêtes d'une même face, on ne tient pas compte du quatrième sommet, et c'est pour cela que dans ces conditions, le centre n'est pas déterminé.

Les constructions résultant du raisonnement précédent sont très-simples, lorsque l'une des faces est dans le plan horizontal, le plan vertical étant en même temps parallèle à l'une des arêtes latérales ; mais comme il faut trois opérations pour arriver à ce résultat, il est presque aussi simple, dans le cas général, de construire directement les trois plans et de prendre leur point commun.

115. — Dans la figure 33, planche 5, nous avons supposé la face *abca'b'c'* dans le plan horizontal, et l'arête *asa's'* parallèle au plan vertical.

Les plans perpendiculaires aux milieux des trois arêtes *aba'b'*, *aca'c'*, *bcb'c'* sont ici verticaux ; ils ont pour traces horizontales des perpendiculaires aux milieux de *ab*, *bc*, *ca*. Ces trois plans se coupent donc suivant la verticale *o*.

D'un autre côté, le plan perpendiculaire au milieu de l'arête *asa's'* est perpendiculaire au plan vertical, et il a pour trace

verticale la perpendiculaire au milieu de $a's'$. Ce quatrième plan rencontre la verticale o, au point demandé oo'.

Il ne reste plus qu'à déterminer le rayon de la sphère ; nous l'obtiendrons en cherchant la distance du centre oo' à l'un quelconque des sommets, par exemple cc'. Cette longueur a été trouvée ici, à l'aide d'une rotation autour de la verticale o; $o'c'_1$ est donc le rayon demandé.

116. — Dans la figure 34, planche 5, nous avons laissé le tétraèdre dans sa position quelconque $abcda'b'c'd'$.

Menons les plans perpendiculaires aux milieux des trois arêtes $aba'b'$, $aca'c'$, $ada'd'$. Nous avons d'abord dessiné les trois lignes de front $\beta\beta_1\beta'\beta'_1$, $\gamma\gamma_1\gamma'\gamma'_1$, $\delta\delta_1\delta'\delta'_1$; puis on a coupé ces trois plans par deux plans horizontaux. Soit $pp'p_1p'_1$ les deux horizontales d'intersection du premier plan avec les deux plans horizontaux auxiliaires, qq', $q_1q'_1$ les deux horizontales du deuxième plan, rr', $r_1r'_1$ celles du troisième.

L'intersection des deux premiers plans pp_1, qq_1 est alors mm_1, $m'm'_1$; celle des deux plans qq_1rr_1 est $nn_1n'n'_1$. Comme vérification, la troisième intersection des deux plans rr_1, pp_1 passe par le point de rencontre des deux premières.

Le point ainsi obtenu oo' est le point demandé.

Le rayon de la sphère est mesuré par $o'c'_1$, comme dans l'exemple précédent.

II. — SPHÈRES TANGENTES AUX QUATRE FACES D'UN TÉTRAÈDRE.

117. — Le centre d'une sphère tangente aux quatre faces d'un tétraèdre est le point commun aux plans bissecteurs des dièdres du tétraèdre.

Trois de ces plans suffisent pour déterminer le centre cherché, en ayant soin de ne pas choisir les plans bissecteurs des dièdres appartenant à un même trièdre, car ces plans se coupent suivant une même droite, ou bien forment un trièdre ayant pour sommet le sommet du trièdre primitif.

Il est bien évident d'ailleurs qu'en considérant seulement les dièdres d'un même trièdre, on ne tient pas compte de la quatrième face.

Nous prendrons, par exemple, les plans bissecteurs des dièdres adjacents à une même face abc.

118. — Nombre des solutions. — Quatre plans prolongés indéfiniment déterminent en tout onze solides.

Premièrement, le tétraèdre SABC (fig. 35, pl. 5) dont les faces sont des triangles.

Deuxièmement, nous avons quatre troncs de pyramide à une base, obtenus (fig. 36, pl. 5) en prolongeant trois des faces au-delà de la quatrième.

Troisièmement, les six combles que l'on obtient (fig. 37, pl. 5) en prolongeant les faces du tétraèdre au-delà d'une même arête. Ces six combles sont, comme les arêtes du tétraèdre, opposés deux à deux.

Nous ne parlons pas du trièdre obtenu en prolongeant trois faces au-delà du sommet, car le solide ainsi obtenu n'est pas limité par les quatre plans.

On conçoit à première vue l'existence d'une sphère inscrite dans chacun de ces onze solides, le centre de cette sphère étant le point commun aux plans bissecteurs intérieurs des dièdres de chaque solide. Nous entendons par plan bissecteur intérieur d'un dièdre d'un solide, le plan bissecteur qui coupe le solide.

Cette distinction va nous permettre de reconnaître l'existence seulement de huit sphères répondant à la question.

Considérons, par exemple, les deux combles opposés AB et SC (fig. 37, pl. 5).

1° Le dièdre AB qui convient pour le comble AB est opposé par l'arête au dièdre AB qui convient pour le tétraèdre. Il faut donc prendre pour le comble AB le plan bissecteur intérieur C_i relatif au tétraèdre.

D'un autre côté, le dièdre AB qui convient pour le comble SC est le même que le dièdre AB qui convient pour le tétraèdre. Il faut donc prendre pour le comble SC le même plan bissecteur C_i.

2° Le dièdre AB qui convient pour le comble BC est adjacent au dièdre BC qui convient pour le tétraèdre ; il faut donc prendre le plan bissecteur extérieur A_e relatif au tétraèdre ; mais le dièdre BC qui convient au comble SC est aussi adjacent au dièdre BC du tétraèdre.

Il faut donc prendre encore le plan bissecteur A_e pour le comble Sc.

3° Enfin, le dièdre AC qui convient pour le comble AB est adjacent au dièdre AC du tétraèdre, et il en est de même pour le

dièdre AC du comble SC. Donc ici encore, il faut choisir le même plan bissecteur B_e.

Il résulte de ce raisonnement que les plans correspondant aux deux combles AB et SC sont les mêmes, et par suite qu'il n'existe qu'une sphère inscrite dans l'un ou l'autre de ces deux combles.

Nous n'avons donc, en résumé, que huit sphères tangentes aux quatre faces d'un tétraèdre.

1° La sphère inscrite;

2° Les quatre sphères exinscrites;

3° Trois sphères dans les six combles, une sphère pour chaque groupe de deux combles opposés.

119.—On pourrait arriver plus rapidement à ce même résultat, en formant les combinaisons des six plans bissecteurs A_iA_e, B_iB_e, C_iC_e.

Nous avons en effet :

1° La combinaison des trois plans bissecteurs intérieurs

$$A_iB_iC_i.$$

2° Trois combinaisons contenant deux plans bissecteurs intérieurs et un seul extérieur

$$A_eB_iC_i.$$
$$A_iB_eC_i.$$
$$A_iB_iC_e.$$

3° Trois combinaisons contenant un plan bissecteur intérieur et deux extérieurs

$$A_iB_eC_e.$$
$$A_eB_iC_e.$$
$$A_eB_eC_i.$$

4° Les trois plans bissecteurs extérieurs

$$A_eB_eC_e.$$

Enfin, le calcul des rayons des sphères va nous donner le même nombre de huit sphères tangentes aux quatre faces du tétraèdre.

120. — Représentons par a, b, c, d les surfaces des quatre faces du tétraèdre, et par V le volume du tétraèdre. En joignant le centre de la sphère inscrite aux quatre sommets, nous formons quatre tétraèdres, dont la somme équivaut au tétraèdre total.

On a donc

$$V = \frac{r}{3}(a+b+c+d),$$

puisque ces quatre tétraèdres partiels ont pour hauteur commune le rayon r de la sphère inscrite; donc

$$r = \frac{3V}{a+b+c+d}.$$

Considérons maintenant la sphère exinscrite opposée au sommet A; en joignant son centre O_a aux quatre sommets, on forme quatre nouveaux tétraèdres.

En particulier, le tétraèdre O_aSBC est extérieur au tétraèdre primitif, et les trois autres réunis contiennent le volume total O_aSABC; on a donc

$$r_a = \frac{3V}{b+c+d-a}.$$

De même,

$$r_b = \frac{3V}{a+c+d-b}.$$

$$r_c = \frac{3V}{a+b+d-c}.$$

$$r_d = \frac{3V}{a+b+c-d}.$$

Ces rayons sont toujours positifs, car une face d'un tétraèdre est toujours plus petite que la somme des trois autres faces, ce qui veut dire que les sphères correspondantes existent toujours.

Supposons maintenant la sphère dans le comble AB.

En joignant toujours son centre O_{ab} aux quatre sommets, nous formons les deux tétraèdres O_{ab}ASC, O_{ab}BSC qui, réunis, forment le volume total O_{ab}SABC, et les deux tétraèdres O_{ab}SAB, O_{ab}ABC qui sont extérieurs au tétraèdre primitif.

On a donc

$$r_{ab} = \frac{3V}{a+b-c-d}.$$

$$r_{bc} = \frac{3V}{b+c-a-d}.$$

$$r_{ca} = \frac{3V}{c+a-b-d}.$$

$$r_{Sa} = \frac{3V}{a+d-b-c}.$$
$$r_{Sb} = \frac{3V}{b+d-a-c}.$$
$$r_{Sc} = \frac{3V}{c+d-a-b}.$$

En comparant les valeurs de ces différents rayons, nous constatons que les valeurs de r_{ab} et r_{Sc} sont égales et de signes contraires; il en résulte qu'une seule des sphères correspondantes existe.

Si, par exemple, $a+b > c+d$, il y a une sphère dans le comble ab, mais il n'y en a pas dans le comble opposé Sc.

Nous retrouvons ainsi seulement trois sphères dans les combles, et nous pouvons reconnaître de plus dans lequel des deux combles, opposés se trouve la sphère correspondante.

Dans le cas particulier où $a+b=c+d$, le rayon correspondant est infini; les plans bissecteurs $C_iA_eB_e$ sont alors parallèles à une même droite, et la sphère est elle-même rejetée à l'infini.

Si en même temps nous avons $a+c=b+d$, c'est-à-dire si l'on a $a=d$ et $b=c$, une deuxième sphère s'éloigne à l'infini.

Enfin, si $a=b=c=d$, les trois sphères des combles n'existent plus.

Passons maintenant à l'épure de la détermination de ces sphères.

121. — 1re construction. — Donnons (fig. 38, pl. 6) le tétraèdre par sa base abc dans le plan horizontal; soit s la projection horizontale du quatrième sommet, dont nous supposons la cote donnée.

Choisissons comme ligne de terre xy, une perpendiculaire à bc; dans ce système, la face sbc est perpendiculaire au plan vertical, et a pour trace verticale $s'b'$. Les deux plans bissecteurs du dièdre bc sont donc aussi perpendiculaires au plan vertical et ont pour traces verticales A_ib', A_eb', les bissectrices de l'angle $s'b'x$.

La première bissectrice A_ib' est la trace du plan bissecteur intérieur relatif au tétraèdre, puisque ce plan coupe l'arête $sas'a'$ entre les deux points ss', aa'.

Nous construisons de même les plans bissecteurs B_i, B_e, C_i, C_e, en prenant successivement comme lignes de terre x_1y_1, x_2y_2, des perpendiculaires sur ac et ab.

Proposons-nous, par exemple, de trouver la sphère exinscrite opposée au sommet A. Il faut prendre alors le point commun aux trois plans $A_eB_iC_i$. Pour cela, nous chercherons les intersections de ces trois plans deux à deux, en les coupant par deux plans auxiliaires.

Nous avons choisi d'abord le plan horizontal lui-même, qui coupe les six plans bissecteurs suivant ab, bc, ca, et ensuite un deuxième plan horizontal qui est déterminé dans les trois systèmes par sa trace verticale parallèle à la ligne de terre, et à la même hauteur au-dessus de chaque ligne de terre.

Soit donc α_i, α_e, β_i, β_e, γ_i, γ_e les intersections des six plans bissecteurs par ce deuxième plan horizontal.

Nous avons déterminé ces six horizontales avec l'intention de trouver les huit sphères, mais revenons maintenant au centre particulier o_a.

1° Cherchons l'intersection des deux plans A_eB_i. Coupés par le plan horizontal de projection, nous avons bc et ac, et par suite le point c. Coupés par le deuxième plan horizontal, nous avons $\alpha_e\beta_i$, et par suite le point d; donc cd est l'intersection de ces deux plans en projection horizontale.

2° L'intersection de A_e et C_i est be, le point b étant donné par l'intersection de bc et ab dans le plan horizontal, et le point e par α_e et γ_i dans le plan horizontal supérieur.

Ces deux droites cd et be se rencontrent au point demandé o_a qui, comme vérification, se trouve sur af intersection des deux plans B_iC_i.

Il nous faut en outre déterminer la cote de ce centre; pour cela, nous le projetons verticalement dans l'un quelconque des systèmes auxiliaires, sur la trace verticale du plan bissecteur correspondant.

Ainsi, dans le système xy, le point o_a se projette verticalement sur A_e.

Enfin, les sphères étant toutes tangentes au plan horizontal, le rayon de chacune d'elles, est mesuré par la cote de son centre. Ainsi $o'_a\omega_a$ est le rayon de la sphère cherchée.

On a dans l'épure, déterminé de la même manière, tous les autres centres; et représenté finalement, l'ensemble de ces sphères

solides, en supposant le plan horizontal transparent et le tétraèdre réduit à ses arêtes.

122. — 2e construction. — Dans cette deuxième construction, plus intéressante, mais moins naturelle que la première, nous nous appuierons sur les deux faits suivants :

1° Les deux points de contact d'une sphère avec deux plans tangents, sont sur deux perpendiculaires au même point à l'intersection des deux plans tangents, et à la même distance de cette intersection. Donc ces deux points de contact coïncident en rabattant l'un des plans tangents sur l'autre, de manière à écraser la sphère, ou, ce qui revient au même, de manière à écraser le dièdre solide dans lequel se trouve la sphère.

2° Les points de contact d'une sphère avec des plans tangents issus d'un même point, sont à la même distance de ce point.

Les données étant les mêmes que dans l'exemple précédent, proposons-nous de trouver (fig. 39, pl. 6) la sphère o_a.

En rabattant :

1° La face *sbc* extérieurement,

2° La face *sac* intérieurement,

3° La face *sab* intérieurement,

les trois points de contact de la sphère inconnue avec ces trois faces se rabattront sur le point de contact de la même sphère avec le plan horizontal.

Mais en même temps, les distances du sommet *s* aux trois points de contact des faces latérales étant égales, il en sera de même après le rabattement ; donc le point de contact inconnu o_a est le centre du cercle circonscrit au triangle $s_{ae}s_{bi}s_{ci}$.

Remarquons que les longueurs $s_{ai}c$, $s_{ae}c$, $s_{bi}c$, $s_{be}c$ sont égales entre elles, puisqu'elles représentent la longueur de l'arête *sc*. Cela permettra de trouver tous les rabattements du sommet, à l'aide d'un seul choix de plan vertical xy.

Ayant trouvé le point de contact o_a, on aura la cote du centre et le rayon, en projetant verticalement ce centre dans le système xy, sur la trace verticale du plan bissecteur correspondant.

On établira la discussion du nombre des centres, avec ce procédé, comme nous l'avons fait avec les plans bissecteurs, et l'on arrivera bien entendu aux huit sphères déjà trouvées.

III. — EXERCICES.

1. Construire une sphère à des distances données de quatre plans donnés.

2. Construire une sphère passant par trois points et tangente à un plan donné.

3. Construire une sphère passant par trois points et tangente à une droite donnée.

4. Construire une droite faisant avec trois droites qui se coupent au même point des angles égaux.

5. Construire une sphère de rayon donné, tangente aux trois arêtes d'un trièdre.

6. Construire une sphère de rayon donné tangente à trois plans.

CHAPITRE III

I. — SECTION PLANE D'UNE SPHÈRE.

123. — Pour trouver un point quelconque d'une section plane d'une sphère, on coupe la sphère et le plan sécant par un plan auxiliaire, par exemple, par un plan parallèle à l'un des plans de projection.

Dans la figure 40, planche 6, nous avons pris comme plan auxiliaire le plan horizontal H_1; il coupe la sphère suivant le parallèle $\mu'\mu$, et le plan sécant suivant l'horizontale $h'h$; nous avons donc en $m'm$, m'_1m_1 deux points de l'intersection.

La tangente au point $m'm$ est l'intersection du plan sécant avec le plan tangent à la sphère au même point. Comme nous connaissons déjà le point mm' de la tangente, il suffit d'en déterminer un deuxième point, en coupant le plan tangent et le plan sécant par un plan auxiliaire quelconque.

Nous avons ici coupé le plan tangent et le plan sécant, par le plan horizontal, ce qui donne en tt' la trace horizontale de la tangente. Donc mt, $m't'$ sont les deux projections de la tangente demandée.

Maintenant que nous savons déterminer un point quelconque de la section et la tangente en ce point, nous allons passer à la détermination des points remarquables et des éléments de la section.

Les points sur les contours apparents de la sphère, s'obtiennent en employant comme plans auxiliaires, le plan horizontal et le plan de front passant par le centre.

Ainsi, le plan horizontal o' coupe le plan sécant suivant l'horizontale HH', qui rencontre le contour apparent horizontal de la sphère aux points aa', bb'.

De même, le plan de front o coupe le plan sécant suivant la

ligne de front FF′, qui rencontre le contour apparent vertical de la sphère aux deux points *cc*′, *dd*′.

En *a* et *b*, la projection horizontale de la section est tangente au contour apparent en projection horizontale, et en *c*′ et *d*′, la projection verticale de la section est tangente au contour apparent de la projection verticale. De plus, ces quatre points *a*, *b*, *c*′, *d*′ servent de limites entre les parties vues et cachées des deux projections de la courbe.

II. — DÉTERMINATION DES AXES.

124. — La section plane d'une sphère est une circonférence, dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan sécant. Nous pourrons donc, d'après cela, trouver les sommets des projections de la section, en employant le même procédé que nous avons suivi (13), pour trouver les projections d'une circonférence.

Rappelons donc que les deux axes de la projection horizontale d'une circonférence sont les projections du diamètre horizontal et du diamètre ligne de plus grande pente de la circonférence. La détermination de ce deuxième axe se fait immédiatement, lorsque le plan de la circonférence est perpendiculaire au plan vertical; aussi pour mieux comprendre la construction, nous allons examiner d'abord ce cas particulier.

Soit donc $P\alpha P_1$ (fig. 41, pl. 6) le plan sécant. Abaissons du centre *oo*′ de la sphère une perpendiculaire sur le plan $P\alpha P_1$; son pied $\omega\omega'$ sur ce plan est précisément le centre de la section. Menons alors l'horizontale et la ligne de plus grande pente du plan $P\alpha P_1$ passant par le centre $\omega\omega'$. Ces deux droites AA′, BB′ seront donc en projection horizontale les axes de la projection horizontale de la section.

Pour avoir leurs extrémités, il suffit de déterminer les points de rencontre de ces deux droites AA′, BB′ avec la sphère.

Or, la droite BB′ étant contenue dans le plan de front mené par le centre, rencontre le contour apparent vertical, et par suite la sphère, aux deux points *cc*′, *dd*′.

Quant à la droite AA′, remarquons qu'étant horizontale, nous pouvons trouver ses points de rencontre avec la sphère, en cou-

pant cette sphère par le plan horizontal A′, ce qui donne le parallèle $\mu\mu'$, et par suite, les deux points aa', bb'.

Donc a, b, c, d sont les quatre sommets de la projection horizontale.

On peut trouver plus simplement les deux sommets du grand axe, en remarquant que $aba'b'$, $cdc'd'$ sont deux diamètres de la section dans l'espace, et par suite, que les longueurs de ces deux diamètres dans l'espace sont égales.

L'un d'eux étant horizontal et l'autre de front, on a donc

$$ab = c'd',$$

ou bien

$$\omega a = \omega b = \omega' c'.$$

Ayant les deux axes de la section, nous pouvons maintenant construire cette section à l'aide de ces deux éléments, sans nous occuper de la sphère; mais il est néanmoins utile de déterminer les points sur le contour apparent horizontal, en employant comme plan auxiliaire le plan horizontal o'.

Nous avons ainsi en m et n les points de contact de la projection horizontale de la section avec le contour apparent horizontal de la sphère.

125. — Cas particulier. — Supposons (fig. 42, pl. 6), les conditions étant les mêmes que précédemment, que le plan sécant passe par le point le plus à droite de la sphère.

Soit a, b, c, d les quatre sommets de la projection horizontale.

Dans le cas particulier qui nous occupe, les deux points m et n de contact avec le contour apparent horizontal sont confondus au point c.

Ainsi, en général, la projection horizontale de la courbe a quatre points communs avec le contour apparent horizontal, deux en m, et les deux autres en n; maintenant, ces quatre points communs sont confondus au point unique c, donc le contour apparent horizontal de la sphère est précisément le cercle osculateur de l'ellipse au sommet c.

On pourra donc déduire de cette remarque, à l'aide d'une construction inverse, le cercle de courbure au sommet du petit axe d'une ellipse, cette ellipse étant donnée par ses sommets.

126. — Cas général. — Revenons maintenant au cas général, où le plan sécant est quelconque. Nous ramènerons ce cas général au cas particulier où le plan sécant est perpendiculaire

au plan vertical, à l'aide d'un changement de plan ou d'une rotation.

Soit donc $P\alpha P_1$ (fig. 43, pl. 7) le plan sécant; cherchons les éléments des deux projections de la section de ce plan dans la sphère oo'.

127. — 1° Axes de la projection horizontale. — Nous allons effectuer un changement de plan vertical, en prenant comme nouvelle ligne de terre x_1y_1, une perpendiculaire sur la trace horizontale du plan. En faisant passer cette ligne de terre par le point o, et en élevant en même temps le plan horizontal jusqu'au centre de la sphère, on a l'avantage de faire coïncider le nouveau contour apparent vertical de la sphère avec le contour apparent horizontal. On évite donc, de cette manière, le tracé d'une circonférence.

Effectuons le changement de plan indiqué pour le plan $P\alpha P_1$. La nouvelle trace horizontale du plan est HH', intersection du plan donné avec le plan horizontal o'. Le point λ est donc un point de la nouvelle trace verticale. D'ailleurs, le point α a sa projection verticale nouvelle en α'_1, à une distance au-dessous de la nouvelle ligne de terre, égale à la distance de α au-dessous du plan horizontal actuel.

La nouvelle trace verticale du plan est donc $\alpha'_1\lambda$, puisque, actuellement, le plan est perpendiculaire au plan vertical. D'un autre côté, la projection verticale nouvelle du centre o'_1 coïncide avec le point o; donc, comme nous l'avons dit en commençant, le contour apparent vertical actuel de la sphère coïncide avec le contour apparent horizontal.

Actuellement, le plan rencontre le contour apparent vertical nouveau, aux deux points c'_1c, d'_1d qui donnent en c et d les sommets du petit axe.

Le grand axe ab est perpendiculaire au milieu de cd et a pour longueur $c'_1d'_1$.

En projetant verticalement les quatre points ainsi obtenus dans le système primitif, nous aurons suivant $aba'b'$ le diamètre horizontal, et en cc' et dd' le point le plus haut et le point le plus bas de la section.

Nous remarquerons enfin que les deux points de rencontre de H avec le contour apparent horizontal de la sphère sont les deux points de contact mm', nn' de la courbe avec le contour apparent horizontal.

128. — Ponctuation. — Le contour apparent horizontal partage la surface de la sphère en deux régions ; l'une d'elles, au dessus du centre, est vue en projection horizontale, l'autre au dessous du centre est cachée.

Il résulte de là que la région *mdn* de la section est vue en projection horizontale, tandis que la région *macbn* est cachée.

129. — **2° Axes de la projection verticale** — Pour résoudre cette deuxième question, nous allons procéder tout à fait de la même manière que précédemment.

Commençons donc par effectuer un changement de plan horizontal, en prenant comme ligne de terre x_2y_2, une perpendiculaire sur la trace verticale du plan. Choisissons cette droite passant par le point o', et avançons en même temps le plan vertical jusqu'au centre de la sphère.

Dans le système actuel x_2y_2, la trace horizontale nouvelle du plan $\mu\alpha_2$ rencontre le contour apparent horizontal aux deux points g_2g', h_2h' qui sont les sommets du petit axe de la projection verticale. Quant au grand axe $e'f'$, il est perpendiculaire au milieu de $g'h'$, et il a pour longueur g_2h_2. Comme vérification, g_2h_2 est égale à $c'_1d'_1$, puisque ces deux longueurs représentent le diamètre de la section.

Dans le système primitif, les points gg', hh' sont les points les plus éloignés ou les plus rapprochés du plan vertical.

Enfin, dans le système x_2y_2, la trace verticale nouvelle du plan F' rencontre le contour apparent vertical aux deux points $p'p$, $q'q$, qui donnent les points de contact de la courbe avec le contour apparent vertical.

130. — Ponctuation. — Le point hh' étant en avant du plan de front o, la région $q'h'p'$ est vue en projection verticale, tandis que la région $q'e'g'f'p'$ est cachée.

III. — INTERSECTION DE DEUX SPHÈRES.

131. — Pour trouver un point de l'intersection de deux sphères, il suffit de couper ces deux sphères par un plan parallèle à l'un des plans de projection ; on a ainsi deux circonférences, dont les points communs appartiennent à l'intersection des deux sphères.

Soit les deux sphères oo', $\omega\omega'$ (fig. 45, pl. 7). Nous avons

coupé ces deux surfaces par le plan horizontal H_1, ce qui nous a donné les deux parallèles mm', $\mu\mu'$. Ces deux parallèles se rencontrent en nn', pp', nous avons ainsi deux points de l'intersection.

Pour trouver la tangente au point pp', par exemple, il suffit de construire l'intersection des deux plans tangents aux deux sphères en ce point. On peut également mener par pp' une perpendiculaire sur le plan des deux normales, c'est-à-dire ici, une perpendiculaire sur le plan des deux rayons $opo'p'$, $\omega p\omega' p'$.

C'est cette dernière construction que nous avons employée, en construisant l'horizontale $h_1h'_1$ et la ligne de front $f_1f'_1$ du plan $po\omega p'o'\omega'$. La tangente demandée a donc pour projection $ptp't'$.

Comme points remarquables, nous avons ici à déterminer les points sur tous les contours apparents. On les obtient en employant comme plans auxiliaires les plans horizontaux, ou les plans de front passant par les centres.

Passons maintenant à la détermination des éléments de l'intersection. On sait que l'intersection de deux sphères est une circonférence dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres; nous pouvons donc ramener la question de l'intersection de deux sphères à la détermination d'une section plane.

132. — 1° Axes de la projection horizontale. — Pour résoudre cette question dans le cas d'une section plane, nous avons rendu le plan sécant perpendiculaire au plan vertical. Nous allons procéder ici de la même manière, et pour cela, nous allons rendre la ligne des centres parallèle au plan vertical.

Commençons donc par effectuer le changement de plan vertical x_1y_1 (fig. 45, pl. 7), la nouvelle ligne de terre étant parallèle à $o\omega$. Pour éviter comme d'ordinaire la construction d'un nouveau contour apparent vertical, nous avons pris $o\omega$ comme ligne de terre, en élevant le plan horizontal jusqu'à l'un des centres, oo' par exemple.

Soit o'_1, ω'_1 les nouvelles projections verticales des deux centres; dessinons en même temps les deux nouveaux contours apparents en projection verticale. Ces deux nouveaux contours apparents étant contenus tous deux dans le plan vertical actuel, se rencontrent en deux points c'_1c, d'_1d; donc $c'_1d'_1$ est la trace verticale du plan de la courbe dans le système x_1y_1, puisque, actuellement, ce plan est perpendiculaire au plan vertical.

Les deux points c et d sont donc les deux sommets du petit

axe de la projection horizontale de la section. Quant au grand axe, il est perpendiculaire au milieu de cd, et sa longueur ab est égale à $c'_1d'_1$.

Nous pouvons profiter du changement de plan vertical x_1y_1, pour trouver en même temps les points sur les contours apparents en projection horizontale des deux sphères, en considérant la courbe comme la section de l'une ou l'autre des deux sphères, par le plan perpendiculaire au plan vertical $c'_1d'_1$. Nous avons donc coupé le plan de la section et les deux sphères, successivement par les plans horizontaux o'_1, ω'_1, et nous avons obtenu les points k, l, q, r.

133. — 2° Axes de la projection verticale. — Commençons par effectuer le changement de plan horizontal x_2y_2, en prenant comme ligne de terre $o'\omega'$, et en avançant le plan vertical jusqu'en o. Soit $o_2\omega_2$ les nouvelles projections horizontales des deux centres.

Dans le système actuel, les deux contours apparents en projection horizontale se rencontrent en g_2g' et h_2h' ; donc g_2h_2 est la trace horizontale nouvelle du plan de l'intersection.

Il résulte de là que g', h' sont les sommets du petit axe de la projection verticale. Le grand axe est perpendiculaire au milieu de $g'h'$, et sa longueur $e'f'$ est égale à g_2h_2.

Comme précédemment, nous profiterons du changement de plan horizontal x_2y_2, pour trouver les points sur les contours apparents verticaux, en coupant le plan de la courbe et les deux sphères, successivement par les plans de front o_2 et ω_2.

134. — Ponctuation. — Proposons-nous ici de représenter le système des deux sphères solides, et de même substance.

Règle I. — Un point de l'intersection est vu dans ce système, lorsqu'il est vu en examinant les deux surfaces séparément. La région $kpdnl$ est donc vue en projection horizontale, et il en est de même pour la région $s'n'g'u'$ en projection verticale.

Règle II. — On enlève la portion de surface de chacune des sphères contenue dans l'autre ; donc les portions de contour apparents kl, qr, $s'u'$, $v'w'$ sont enlevées.

Règle III. — Toute ligne tracée sur une partie conservée de l'une des sphères et aboutissant à un point vu de l'intersection, est vue avant d'arriver à ce point ; si, au contraire, elle aboutit à un point caché, elle est cachée avant d'arriver à ce point.

Les portions de contour apparent de la sphère oo' conservées à l'intérieur des contours apparents de $\omega\omega'$ sont donc cachées, et tout le reste est vu.

Dans la figure 46, planche 7, nous avons représenté le solide commun aux deux sphères, en appliquant encore les mêmes règles que nous avons données au sujet de l'intersection de deux pyramides.

De même, la figure 44, pl. 7, représente la partie de la sphère o extérieure à la sphère ω.

IV. — POINTS COMMUNS A TROIS SPHÈRES.

135. — Pour trouver les points communs à trois sphères, on détermine les intersections de ces trois sphères deux à deux ; on obtient ainsi trois circonférences, dont les deux points communs sont les points demandés.

Comme il faut éviter à tout prix de tracer des ellipses, on emploie comme plan de projection auxiliaire, le plan des trois centres, en profitant de ce que les intersections des trois sphères deux à deux se projettent sur ce plan suivant trois droites.

Soit donc (fig. 47, pl. 7) aa', bb', cc' les trois centres.

Rabattons le plan de ces trois points sur le plan horizontal a' autour de l'horizontal ax; a, b_2, c_2 sont alors les rabattements des trois centres.

Actuellement, les intersections des trois sphères deux à deux, se projettent suivant les cordes communes aux contours apparents pris aussi deux à deux. Ces trois cordes d_2e_2, f_2g_2, h_2k_2 se rencontrent au point m_2 qui est le rabattement des deux points communs aux trois sphères.

Pour déterminer complétement les points communs aux trois sphères, il ne reste plus qu'à chercher les cotes de ces deux points par rapport au plan des trois centres. Pour cela, nous avons choisi comme nouveau plan vertical, le plan vertical am_2. Dans ce système, le point a se projette verticalement en a'_3, et le point m_2 en m'_3, sur le contour apparent vertical actuel de la sphère.

Passons maintenant au relèvement des deux points rabattus en m_2, et ayant pour cote $m_2m'_3$.

La construction ordinaire consiste à abaisser du point m_2 une

perpendiculaire sur x_1y_1, puis à faire tourner le point μ'_2 de l'angle $b'_2a'_1b'_1$, et à mener par le point μ'_1 une perpendiculaire sur la trace verticale du plan des trois centres. En prenant enfin sur cette perpendiculaire les longueurs $\mu'_1m'_1$, $\mu'_1n'_1$ égales à $m_2m'_3$, nous avons les projections verticales dans le système x_1y_1 des deux points communs aux trois sphères.

D'ailleurs, les projections horizontales de ces points se trouvent sur la perpendiculaire à la charnière menée par m_2, en m ou n.

Nous pouvons enfin passer du système x_1y_1 au système xy, ce qui donne en mm' et nn' les deux points demandés.

Il est indispensable de déterminer les points communs aux trois sphères, pour représenter une combinaison quelconque du système de ces trois sphères, par exemple le solide commun (fig. 48, pl. 7).

Pour représenter ce solide commun, il faut conserver de l'intersection de deux sphères la partie contenue dans la troisième sphère, et des contours apparents de chaque sphère, tout ce qui est contenu simultanément dans les deux autres.

V. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE SPHÈRE.

136. — Pour trouver l'intersection d'une droite et d'une sphère, on fait passer par la droite un plan, dont on construit l'intersection avec la sphère, les points de rencontre de cette intersection avec la droite, sont les points demandés.

Parmi les plans passant par la droite, on peut choisir soit l'un des plans projetants de la droite, soit le plan passant par la droite et le centre de la sphère. Nous avons ainsi deux méthodes simples pour trouver l'intersection demandée.

137. — **1re méthode.** — Soit à trouver (fig. 49, pl. 7) l'intersection de la droite AA', avec la sphère oo'.

Choisissons comme plan auxiliaire passant par la droite, le plan vertical A qui la projette horizontalement ; ce plan auxiliaire coupera la sphère suivant une circonférence.

Pour mettre en évidence cette circonférence, il suffit de rendre son plan parallèle à l'un des plans de projection ; c'est ce que nous avons fait en effectuant un changement de plan vertical, la nouvelle ligne de terre étant A. Nous avons en même temps élevé le plan horizontal jusqu'en o'. Alors, dans le système actuel x_1y_1, le plan vertical A coupe la sphère suivant une circonfé-

rence, dont la projection verticale est aussi une circonférence décrite sur $a'_1b'_1$ comme diamètre.

D'ailleurs, la nouvelle projection verticale de la droite étant A'_1, nous avons en m'_1, n'_1 les projections verticales des deux points d'intersection. Ces deux points se projettent horizontalement en *m* et *n* sur A, et verticalement, dans le système primitif, en *m'* et *n'* sur A'.

138. — Ponctuation. — Supposons la sphère solide et la droite de même substance que la sphère.

La région *mnm'n'* de la droite est alors enlevée.

Les deux points *mm'*. *nn'* étant vus tous deux sur la sphère, en projection horizontale, les parties conservées de la droite sont vues aussi.

En projection verticale, les points *mm'* et *nn'* étant cachés tous deux, la partie conservée de la droite à l'intérieur du contour apparent vertical de la sphère, est également cachée.

139.—2e méthode.— Dans cette deuxième méthode (fig. 50, pl. 7), nous emploierons comme plan auxiliaire, le plan passant par la droite et le centre de la sphère. Ce plan auxiliaire coupe la sphère suivant un grand cercle, qui se rabat sur le plan horizontal mené par le centre de la sphère, suivant le contour apparent horizontal de la sphère.

Déterminons d'abord la charnière, c'est-à-dire l'horizontale du plan *o*A*o'*A', qui passe par le centre. Soit *oαo'α'* cette horizontale. Il faut alors rabattre la droite AA' autour de cette horizontale, et pour cela, en tenant compte du point fixe, il suffit d'en rabattre un point ββ'.

La droite rabattue A_2 rencontre donc le rabattement de la section aux deux points m_2, n_2, qui se relèvent en *mm'* et *nn'* sur AA'.

CHAPITRE IV

I. — COURBE DE CONTACT D'UN CONE OU D'UN CYLINDRE CIRCONSCRIT A UNE SPHÈRE.

140. — La courbe de contact d'un cône circonscrit à une sphère est le lieu des points de contact des plans tangents à la sphère menés par le sommet du cône. Nous avons déjà traité cette question pour les surfaces de révolution, en assujettissant le point de contact à se trouver sur un parallèle, ou sur un méridien donné; nous pouvons donc la considérer comme résolue dans le cas particulier de la sphère.

Il nous reste alors à trouver les points remarquables de la courbe de contact, en tenant compte de ses propriétés.

Or, on sait que la courbe de contact d'un cône circonscrit à une sphère est une circonférence,dont le plan est perpendiculaire à la droite qui joint le sommet du cône au centre de la sphère; nous sommes donc ramenés à la détermination d'une section plane.

141. — **1° Axes de la projection horizontale** (fig. 51, pl. 8).

Effectuons un changement de plan vertical, en prenant comme ligne de terre x_1y_1, la projection horizontale de l'axe du cône, et élevons en même temps le plan horizontal jusqu'au centre de la sphère. Ce changement de plan a pour but de rendre l'axe du cône parallèle au plan vertical, et par suite le plan de la courbe de contact perpendiculaire au plan vertical. Ainsi, dans le système x_1y_1, la projection verticale de la courbe de contact sera une ligne droite.

Nous savons que deux surfaces tangentes entre elles tout le long d'une même courbe, ont leurs contours apparents en projection, tangents entre eux; donc, dans le système x_1y_1, le contour apparent vertical du cône se composera des deux tangentes

menées par S'_1 au contour apparent de même nom de la sphère.

Les deux points de contact cc'_1, dd'_1 ainsi obtenus appartiennent à la courbe de contact cherchée; donc $c'_1d'_1$ est la trace verticale, dans le système auxiliaire, du plan de la courbe de contact; et par suite, c et d sont les deux sommets du petit axe de la projection horizontale. Quant au grand axe, il est perpendiculaire au milieu de cd, et sa longueur ab est égale à $c'_1d'_1$.

En coupant, dans le système x_1y_1, le plan de la courbe et la sphère, par le plan horizontal o'_1, nous aurons en m et n les deux points sur le contour apparent horizontal.

Comme vérification, ces deux points sont les deux points de contact des tangentes issues du point S, au contour apparent horizontal de la sphère. Nous savons en effet, que deux surfaces tangentes entre elles tout le long d'une même courbe ont leurs contours apparents en projection tangents entre eux, et en même temps à la projection de la courbe de contact.

Cette remarque donne suivant $mnm'n'$ une horizontale du plan de la courbe de contact. Nous pourrons d'ailleurs toujours trouver cette horizontale, alors même que les points m et n seraient imaginaires, en tenant compte de ce que la droite mn est dans tous les cas, la polaire du point S, par rapport au contour apparent horizontal de la sphère.

142. — 2° Axes de la projection verticale. — Nous commencerons par effectuer le changement de plan horizontal x_2y_2, en prenant comme ligne de terre $o'S'$, et en avançant en même temps le plan vertical, jusqu'au centre de la sphère. Dans ce système, la courbe de contact se projette horizontalement suivant la polaire g_2h_2 du point S_2, par rapport au contour apparent horizontal actuel de la sphère; g_2h_2 est en même temps, dans le système x_2y_2, la trace horizontale du plan de la courbe de contact.

En projetant verticalement les deux points g_2h_2 sur x_2y_2, nous avons en g',h', les deux sommets du petit axe de la projection verticale.

Le grand axe est perpendiculaire au milieu de $g'h'$, et sa longueur $e'f'$ est égale à g_2h_2 ou, comme vérification, à $c'_1d'_1$ et à ab.

Enfin, en coupant dans le système x_2y_2 la sphère et le plan de la courbe de contact par le plan de front o_2, nous avons en p',q' les points de la courbe de contact sur le contour apparent vertical de la sphère.

Comme vérification, les points p', q' sont les points de contact les tangentes menées par le point S′ au contour apparent vertical de la sphère.

Remarquons, comme précédemment, que $pqp'q'$ est dans le plan de front o, une ligne de front du plan de la courbe de contact ; cette ligne de front pouvant toujours s'obtenir, quand même les points p',q' sont imaginaires, puisque $p'q'$ est la polaire de S′ par rapport au contour apparent vertical.

Nous retrouvons ainsi, pour la détermination du plan polaire d'un point, la même construction que nous avons donnée autrefois du plan tangent en un point de la sphère. On devait arriver à ce résultat, puisque le plan tangent en un point n'est autre chose que le plan polaire de ce point.

143. — Cas particulier du cylindre circonscrit. — La courbe de contact d'un cylindre circonscrit à une sphère n'est autre chose que la section de la sphère par le plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre, mené par le centre de la sphère.

Nous trouverons les axes de cette section en amenant l'axe du cylindre à être parallèle à l'un des plans de projection, comme nous l'avons fait, dans le cas du cône.

Soit, par exemple (fig. 52, pl. 8), à déterminer la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à la sphère oo', parallèlement à la droite $oko'k'$.

144. — 1° Axes de la projection horizontale. — Nous effectuerons le changement de plan vertical x_1y_1, en prenant comme ligne de terre la droite ok. Élevons en même temps le plan horizontal jusqu'au centre de la sphère.

Dans ce système x_1y_1, le plan de la courbe de contact étant perpendiculaire sur $oko'k'$, est perpendiculaire au plan vertical; il a donc pour trace verticale la perpendiculaire sur $o'_1k'_1$ menée par o'_1. Ce plan rencontre alors le contour apparent vertical actuel de la sphère, aux deux points c'_1c, d'_1d qui sont les deux sommets du petit axe de la projection horizontale. D'ailleurs, le grand axe est la perpendiculaire sur ok menée par le point o; sa longueur ab est égale au diamètre de la sphère.

Les points a, b sont en même temps les points de contact de la projection horizontale de la courbe avec le contour apparent horizontal de la sphère.

145. — 2° Axes de la projection verticale. — Effec-

tuons le changement de plan horizontal x_2y_2, en prenant comme ligne de terre la droite $o'k'$; avançons en même temps le plan vertical jusqu'au centre de la sphère. Dans ce système, la courbe de contact se projette horizontalement suivant une perpendiculaire menée par o_2 à o_2k_2.

Nous déduirons de là, en g' et h', les sommets du petit axe de la projection verticale, le grand axe étant perpendiculaire à $o'k'$ mené par o', et ayant pour longueur le diamètre de la sphère.

Les extrémités e',f' de ce grand axe sont en même temps les points sur le contour apparent vertical de la sphère.

146. — Ponctuation — La ponctuation de ces différentes courbes de contact s'obtient de la même manière que pour une section plane. Les limites entre les parties vues et cachées seront les points de contact de la courbe, avec les contours apparents de la sphère.

Tout point de la courbe, placé au-dessus du centre de la sphère sera vu en projection horizontale, et de même, tout point de la courbe en avant du plan de front o, est vu en projection verticale.

147.—La courbe de contact d'un cône circonscrit à une sphère est la limite de l'ombre propre de la sphère, en supposant la sphère éclairée par un point lumineux placé au sommet du cône.

Lorsque la source lumineuse est à l'infini, c'est-à-dire lorsque les rayons lumineux sont parallèles entre eux, la courbe d'ombre propre devient la courbe de contact du cylindre circonscrit à la surface parallèlement à la direction des rayons lumineux.

Dans tous les cas, la région de la sphère limitée par la courbe de contact, mais opposée à la source lumineuse, est dans l'ombre. Nous avons indiqué ce résultat, (fig. 51, pl. 8) et (fig. 52, pl. 8), en supposant les plans de projection transparents, pour n'avoir pas à déterminer les ombres portées par la sphère sur les plans de projection.

II. — PLAN TANGENT PAR UNE DROITE A UNE SPHÈRE.

148. — Pour mener par une droite un plan tangent à une surface quelconque, on circonscrit à la surface un cône ayant pour sommet un point quelconque de la droite, puis on mène par la droite un plan tangent à ce cône; on a ainsi le plan demandé.

Le point de rencontre de la génératrice de contact sur le cône, avec la courbe de contact du cône circonscrit et de la surface, n'est autre chose que le point de contact du plan tangent avec la surface donnée.

Dans le cas d'une sphère, nous choisirons comme sommet de cône un point de la droite tel qu'il soit possible d'obtenir facilement la courbe de contact.

Nous arriverons à ce résultat, en choisissant comme sommet de cône, l'un des points de rencontre de la droite, avec l'un des plans parallèles à l'un des plans de projection mené par le centre de la sphère; ou bien encore, en choisissant comme sommet de cône le point à l'infini sur la droite. Le cône devient alors un cylindre circonscrit à la sphère parallèlement à la direction donnée.

149. — 1re solution. — Soit (fig. 53, pl. 8) AA′ la droite donnée. Choisissons comme sommet de cône le point de rencontre ss' de la droite, avec le plan horizontal o'. L'axe du cône circonscrit étant l'horizontale $oso's'$, la courbe de contact se projette horizontalement suivant la polaire de s par rapport au contour apparent horizontal de la sphère.

Pour mettre en évidence cette courbe de contact, que nous choisirons en même temps comme base du cône, il suffit d'effectuer un changement de plan vertical, en prenant comme ligne de terre x_1y_1. Élevons en même temps le plan horizontal jusqu'au centre de la sphère. Dans ce système x_1y_1, la courbe de contact ou bien la base du cône a pour projection verticale la circonférence décrite sur ab comme diamètre.

Il reste à mener par la droite AA′, un plan tangent au cône ss'.

Pour cela, déterminons le point de rencontre $\sigma\sigma'$ de la droite, avec le plan de base; puis, par ce point $\sigma\sigma'$, menons dans le système x_1y_1 une tangente à la base. Nous obtenons ainsi dans le système x_1y_1, le point de contact m'_1m, qui devient mm', dans le système primitif.

Le plan tangent inconnu est donc déterminé par son point de contact mm', et par la droite donnée AA′. Si l'on veut déterminer les traces de ce plan tangent, il suffira de chercher les traces de AA′, en tenant compte de ce que le plan tangent est perpendiculaire sur le rayon du point de contact.

Le problème présente deux solutions, puisqu'on peut mener par le point $\sigma\sigma'_1$, deux tangentes à la base du cône.

150. — La méthode que nous venons de suivre suppose le point $\sigma\sigma'$ dans les limites de l'épure; lorsqu'il n'en est pas ainsi, on change le plan de base du cône, et l'on choisit comme nouvelle base la section du cône par un plan parallèle au premier, mais plus rapproché du sommet.

Prenons, par exemple (fig. 54, pl. 8), comme plan de base le plan vertical x_1y_1 perpendiculaire à $oso's'$. Effectuons toujours le changement de plan vertical x_1y_1 en élevant le plan horizontal jusqu'au centre de la sphère. Dans ce système, la nouvelle base du cône se projette verticalement suivant une circonférence décrite sur a_1b_1 comme diamètre. D'ailleurs, la droite AA′ coupe le plan de base actuel au point $\sigma\sigma'$ qui se projette verticalement en σ'_1 dans le nouveau système. Il faut donc mener par ce point une tangente à la base, ce qui donne suivant $s\mu s'\mu'$ la génératrice de contact.

Enfin, cette génératrice rencontre la courbe de contact du cône et de la sphère, au point demandé mm'.

151. — Au lieu de choisir comme sommet du cône le point de rencontre de la droite avec le plan horizontal o', on aurait pu prendre (fig. 55, pl. 8) le point de rencontre de la même droite, avec le plan de front o. La courbe de contact de la sphère avec ce nouveau cône se projette verticalement suivant $c'd'$.

Donc, les points de contact se projetant horizontalement sur ab, et verticalement sur $c'd'$, sont à l'intersection de la sphère, avec la droite $abc'd'$. Cette droite $abc'd'$ est la *polaire conjuguée* de la droite donnée par rapport à la sphère.

Remarquons qu'il est toujours possible de construire cette droite, que les points a, b, c', d' soient réels ou imaginaires, puisque, dans tous les cas, ab est la polaire de s par rapport au contour apparent horizontal, tandis que $c'd'$ est la polaire de T′ par rapport au contour apparent vertical de la sphère.

La considération de cette polaire conjuguée permet de transformer un problème de plan tangent à une sphère, en un problème correspondant d'intersection, et réciproquement.

Ainsi, dans le problème qui nous occupe, pour mener par la droite AA′ un plan tangent à une sphère, on construit la polaire conjuguée de AA′ par rapport à la sphère, puis on détermine le

deux points de rencontre de cette droite BB′ avec la sphère, et on a les deux points de contact.

De même, si on voulait trouver les points de rencontre de BB′ avec la sphère, on construirait d'abord la polaire conjuguée de BB′ par rapport à la sphère, puis par cette droite AA′, on mènerait des plans tangents à la sphère. Les points de contact ainsi obtenus, seraient les points d'intersection demandés.

152. — 2ᵉ solution. — Choisissons maintenant comme sommet de cône, le point à l'infini sur la droite AA′ (fig. 56, pl. 8). Le cône circonscrit devient alors un cylindre circonscrit parallèle à la droite. Quant à la courbe de contact, elle est la section de la sphère par le plan perpendiculaire à la droite, mené par le centre de la sphère. Il nous faut donc premièrement déterminer le point de rencontre de la droite avec le plan de base, et deuxièmement mener par ce point une tangente à la circonférence de section.

Pour mener ces tangentes, il faudra rendre le plan du cercle de contact horizontal ; dans ce but, nous rabattons le plan du cercle de contact sur le plan horizontal o'.

Nous avons donc commencé par faire le changement de plan vertical x_1y_1, en élevant le plan horizontal jusqu'au centre de la sphère. Ce changement de plan a pour but de rendre le plan du cercle de contact perpendiculaire au plan vertical, ou, ce qui revient au même, de rendre la droite AA′ parallèle au plan vertical.

Dans ce système x_1y_1, la courbe de contact se projette verticalement suivant $a'_1b'_1$, perpendiculaire sur A'_1 menée par o'_1. Le point de rencontre de la droite avec le plan du cercle de contact est $\sigma\sigma'_1$.

Ensuite, nous faisons tourner le plan $a'_1b'_1$ autour de la trace horizontale actuelle, de l'angle $a'_1o'_1y'_1$, et alors le cercle de contact vient coïncider avec le contour apparent horizontal de la sphère ; en même temps, le point $\sigma\sigma'_1$ est rabattu en σ_2. En menant par ce point σ_2 des tangentes au rabattement de la courbe de contact, on a en m_2, n_2 les rabattements des deux points de contact.

Ainsi rabattus, les deux points de contact m_2, n_2 se projettent verticalement en $m'_2n'_2$ sur x_1y_1. Il ne reste donc plus qu'à faire subir à ces deux points deux opérations inverses des précédentes, et on a en mm', nn' les deux points de contact dans le système primitif.

III. — PLANS TANGENTS COMMUNS A DEUX SPHÈRES.

153.—THÉORÈME.— *Tout plan tangent commun à deux sphères passe par l'un des centres de similitude de ces deux sphères.*

En effet, les rayons aboutissant aux deux points de contact étant perpendiculaires tous deux au plan tangent commun, sont parallèles entre eux ; donc la droite qui joint les deux points de contact passe par l'un des centres de similitude des deux sphères, et par suite, il en est de même pour le plan tangent commun.

Il résulte de ce que nous venons de dire que les centres de similitude de deux sphères sont les sommets de deux cônes circonscrits simultanément aux deux sphères.

Le contour apparent d'un cône circonscrit à une sphère étant tangent au contour apparent de la sphère, on en déduit que les centres de similitude de deux sphères se projettent au centre de similitude des contours apparents en projection des deux sphères.

154. — PROBLÈME I. — *Mener par un point un plan tangent commun à deux sphères.*

Le plan inconnu (fig. 57, pl. 9) doit passer par l'un des centres de similitude des deux sphères cc' ; il contient par conséquent la droite qui joint le point donné à ce centre de similitude.

Le problème est ainsi ramené au suivant, mener par la droite $aca'c'$ un plan tangent à l'une des sphères données.

Nous aurons donc en tout quatre solutions, puisque chacun des centres de similitude donne une droite par laquelle on peut mener deux plans tangents à l'une des sphères.

Dans la figure 57, planche 9, nous avons mené, en appliquant la première construction, un plan tangent à la sphère oo' par la droite $aca'c'$; mm' est le point de contact de ce plan tangent avec la sphère oo'. Pour déduire de là le point de contact avec la sphère $\omega\omega'$, nous avons pris le point homologue de mm', en prenant comme centre de similitude cc'.

On a donc joint $mcm'c'$ et mené par $\omega\omega'$ un rayon parallèle à $omo'm'$. Le point de rencontre de ces deux droites est le deuxième point de contact cherché $\mu\mu'$.

155. — Remarque. — La construction que nous venons d'employer suppose les centres de similitude dans les limites de

l'épure ; or il n'en est pas toujours ainsi pour le centre de similitude direct.

Dans ce cas, circonscrivons à chacune des sphères un cône ayant pour sommet le point donné ; il suffit alors de mener un plan tangent commun à ces deux cônes.

D'ailleurs, tout plan tangent à un cône de révolution est aussi tangent à toutes les sphères inscrites dans ce cône. On peut donc remplacer la sphère oo' par une sphère quelconque inscrite dans le cône circonscrit à cette sphère oo', et ayant pour sommet le point aa'.

Proposons-nous (fig. 58, pl. 9) de trouver l'une de ces sphères. Le centre $o_1o'_1$ de cette sphère est un point quelconque de l'axe $oao'a'$ du cône circonscrit. D'ailleurs, le rayon de cette sphère est avec le rayon de la sphère oo' dans un rapport égal au rapport $\frac{(oao'a')}{(o_1ao'_1a')}$, ou, ce qui revient au même, dans le rapport $\frac{oa}{o_1a}$.

Cette construction permet de remplacer la sphère oo' par une sphère d'un rayon donné.

Si nous revenons au problème primitif, nous voyons que nous pouvons remplacer les deux sphères proposées oo', $\omega\omega'$ par deux autres sphères $o_1o'_1$, $\omega_1\omega'_1$ de même rayon. Cette fois, le centre de similitude direct est exactement à l'infini sur $o_1\omega_1o'_1\omega'_1$; on aura donc une droite du plan tangent inconnu, en menant par aa' une parallèle à $o_1\omega_1o'_1\omega'_1$.

Quant à l'autre centre de similitude, il est au milieu de $o_1\omega_1o'_1\omega'_1$, soit $\gamma\gamma'$.

Dans la figure 59, planche 9, nous avons trouvé les quatre plans tangents communs avec leurs points de contact, en remplaçant la sphère oo' tout simplement par une sphère $o_1o'_1$ égale à $\omega\omega'$.

156. — PROBLÈME II. — ***Mener à deux sphères un plan tangent commun parallèle à une droite.***

Comme dans l'exemple précédent, nous déterminerons l'un des centres de similitude des deux sphères cc', puis par ce point, nous mènerons une parallèle à la direction donnée ; nous aurons ainsi une droite du plan tangent. Il ne reste donc plus qu'à mener par cette droite un plan tangent à l'une des sphères.

Examinons encore ici le cas particulier où l'un des centres de similitude se trouve hors des limites de l'épure (fig. 60, pl. 9).

Nous circonscrirons à chacune des deux sphères un cylindre

parallèle à la direction donnée, puis nous mènerons à ces deux cylindres un plan tangent commun. Pour résoudre cette dernière question, nous couperons les deux cylindres par un plan perpendiculaire aux génératrices, puis nous mènerons aux deux sections une tangente commune ; ce sera une droite du plan tangent commun. Il suffira donc de mener par cette droite un plan parallèle à la direction donnée pour avoir le plan tangent commun demandé.

Pour effectuer simplement les constructions que nous venons d'indiquer, on commence par faire un changement de plan vertical en prenant une ligne de terre parallèle à D.

Soit o'_1, ω'_1 les nouvelles projections verticales des centres, et D'_1 la nouvelle projection verticale de la direction donnée.

Les axes des deux cylindres circonscrits sont parallèles à DD'_1 et menés respectivement par les centres des deux sphères.

Coupons maintenant les deux cylindres par le plan $P\alpha P_1$ perpendiculaire aux deux axes ; c'_1c, $\gamma'_1\gamma$ sont les centres des deux sections ; d'ailleurs, les rayons de ces deux sections sont égaux respectivement aux rayons des deux sphères.

Rabattons ensuite le plan $P\alpha P_1$ sur le plan horizontal, et menons aux deux sections droites des deux cylindres rabattues, des tangentes communes.

Relevons les points de contact e_2, ε_2 en e'_1e, $\varepsilon'_1\varepsilon$, et menons par ces deux points des parallèles aux axes des cylindres, leurs points de rencontre m'_1m, $\mu'_1\mu$ avec les plans des cercles de contact seront les points de contact cherchés. Il ne reste donc plus qu'à projeter verticalement ces deux points en m' et μ' dans le système primitif.

IV. — PLANS TANGENTS COMMUNS A TROIS SPHÈRES.

157. — Les plans tangents communs à trois sphères doivent passer par les centres de similitude de ces trois sphères prises deux à deux.

Or on sait que les six centres de similitude de trois sphères se trouvent par groupes de trois sur quatre droites. L'une de ces droites contient les trois centres de similitude directe, les trois autres passent successivement par un centre de similitude directe et deux centres de similitude inverse. En menant par l'une de

ces droites un plan tangent à l'une quelconque des trois sphères, on aura l'un des plans tangents communs.

Le problème présente donc en tout huit solutions.

Proposons-nous de transformer cette solution dans le cas où les centres de similitude directe sont hors des limites de l'épure.

Soit, par exemple, o_1, o_2, o_3 les trois sphères. Considérons le cône de révolution circonscrit aux deux sphères o_1, o_2 et le cône circonscrit aux deux sphères o_1 et o_3, puis inscrivons dans ces deux cônes deux sphères égales ω_2, ω_3. En joignant les centres de ces deux sphères par une ligne droite, on aura la direction d'une ligne passant par trois des centres de similitude. On sera donc ramené à un problème connu, mener à deux sphères un plan tangent commun parallèle à une droite donnée. Ce problème a été résolu, même lorsque le centre de similitude directe est hors des limites de l'épure.

On peut encore résoudre cette question de la manière suivante. Prenons comme plan de projection le plan des trois centres. Soit donc a, b, c, ces trois centres dans un même plan horizontal. Considérons le cône circonscrit aux deux sphères b et c, et soit C C′ les projections horizontales des deux cercles de contact. Circonscrivons de même un cône aux deux sphères a et c, et soit C_1 C'_1 les projections horizontales des deux cercles de contact.

Les deux droites C′, C'_1 se rencontrent alors en un point γ qui est la projection horizontale du point de contact inconnu sur la sphère c.

Il ne reste plus qu'à relever ce point c connaissant son rabattement et sa cote par rapport au plan qu'on rabat ; cette cote étant déterminée, en considérant le point γ comme appartenant à la sphère c.

On répète la même opération pour les autres points de contact, ou tout simplement, on prend les points homologues du point γ.

CHAPITRE V

I. — PLAN PASSANT PAR UNE DROITE ET FAISANT UN ANGLE DONNÉ AVEC UN PLAN DONNÉ.

158.— ***Soit à mener par la droite*** AA′ ***un plan faisant avec le plan*** $P\alpha P_1$ ***un angle donné*** (**fig. 61,** pl. 9).

Le plan inconnu est tangent à un cône de révolution ayant pour sommet un point quelconque SS′ de la droite, pour axe la perpendiculaire au plan $P\alpha P_1$ menée par SS′, et pour demi-angle au sommet le complément de l'angle donné.

En inscrivant dans ce cône une sphère, on ramène le problème du plan tangent au cône, à celui du plan tangent à une sphère par la droite donnée.

Proposons-nous donc de trouver le centre et le rayon d'une sphère quelconque inscrite dans le cône.

D'un point quelconque SS′ de la droite donnée, nous abaissons une perpendiculaire $SaS'a'$ sur le plan, puis nous rendons cette droite parallèle à l'un des plans de projection, à l'aide, par exemple, d'un changement de plan vertical, en prenant Sa comme ligne de terre.

Dans ce système x_1y_1, nous pouvons dessiner les génératrices principales du cône; ce sont deux droites passant par S'_1 et faisant avec $S'_1a'_1$ le demi-angle au sommet connu.

Choisissons ensuite sur l'axe du cône $SaS'_1a'_1$ un point quelconque oo'_1, ce sera le centre d'une sphère inscrite, et le rayon correspondant a pour longueur la distance du centre aux génératrices principales que nous venons de tracer.

On a continué dans l'épure la construction du plan tangent par la droite AA′ à la sphère oo'; mm' et nn' sont les points de contact. Les plans demandés sont donc déterminés par AA′, et successivement par les deux points mm', nn'. On remarque que les traces de ces plans tangents sont perpendiculaires sur les projections de même nom des deux rayons $omo'm'$, $ono'n'$.

II. — MENER PAR UN POINT UN PLAN FAISANT DES ANGLES DONNÉS AVEC DES PLANS DONNÉS.

159. — ***Soit à mener par le point*** aa' ***un plan faisant avec les deux plans*** $P\alpha P_1$, $Q\beta Q_1$ ***des angles donnés.***

Le plan inconnu est tangent à deux cônes de révolution ayant pour sommet le point aa', pour axes des perpendiculaires aux deux plans donnés menés par aa', et pour demi-angles aux sommets les compléments des deux angles donnés.

En remplaçant successivement ces deux cônes par des sphères inscrites, on est ramené au problème connu, mener par un point un plan tangent commun à deux sphères. Il y aura donc tout avantage à prendre immédiatement deux sphères égales inscrites dans les deux cônes primitifs.

Dans ce problème, comme dans le précédent, on peut assujettir le plan inconnu à faire un angle donné avec une droite, au lieu de prendre l'angle avec un plan. L'axe du cône correspondant est alors parallèle à la droite.

III. — PLAN TANGENT A UN CONE FAISANT AVEC UN PLAN UN ANGLE DONNÉ.

160. — Pour mener à un cône un plan tangent faisant avec un plan, ou avec une droite, un angle donné, nous remarquons que le plan inconnu est tangent à un cône de révolution ayant pour sommet le sommet du cône donné, pour axe une perpendiculaire au plan donné, et pour demi-angle au sommet, le complément de l'angle donné.

Il suffira donc de mener un plan tangent commun à ce cône auxiliaire et au cône donné.

Si au lieu d'un cône, on avait un cylindre, on construirait un cône de révolution analogue au précédent, auquel on mènerait un plan tangent parallèle aux génératrices du cylindre donné; puis on mènerait au cylindre primitif un plan tangent parallèle à ce plan que nous venons d'obtenir.

IV. — PLAN TANGENT A UNE SPHÈRE, FAISANT UN ANGLE DONNÉ AVEC UN PLAN DONNÉ.

161. — Le plan inconnu sera en même temps tangent à un cône circonscrit à la sphère, ayant son axe perpendiculaire au plan donné et pour demi-angle au sommet, le complément de l'angle donné.

Le plan inconnu devra donc passer par le sommet de ce cône, ou bien son point de contact devra se trouver sur le cercle de contact du même cône avec la sphère.

Nous allons nous proposer de trouver le sommet de ce cône auxiliaire, et aussi le plan de son cercle de contact.

Soit donc la sphère oo' et le plan $P\alpha P_1$ (fig. 62, pl. 10).

Commençons par rendre le plan $P\alpha P_1$ perpendiculaire à l'un des plans de projection, par exemple à l'aide du changement de plan vertical x_1y_1, en élevant en même temps le plan horizontal jusqu'au centre de la sphère.

Dans le système actuel x_1y_1, l'axe du cône a pour projection verticale une perpendiculaire abaissée de o'_1 sur la nouvelle trace verticale du plan. Nous aurons alors une génératrice principale du cône, en menant au contour apparent vertical actuel de la sphère, une tangente faisant avec l'axe un angle égal au complément de l'angle donné. Nous avons ainsi en S'_1SS' et T'_1TT' les sommets demandés.

Donc, tous les plans tangents à la sphère, faisant avec le plan $P\alpha P_1$ l'angle donné, passent par l'un des deux points SS' ou TT'. On peut dire aussi que le point de contact se trouve dans le plan polaire de SS' par rapport à la sphère. Dans le système x_1y_1, ce plan a pour trace verticale $a'_1b'_1$ ou $c'_1d'_1$; il devient dans le système primitif le plan $Q\beta Q_1$, ou bien le plan $R\gamma R_1$. Donc le point de contact se trouve dans l'un ou l'autre de ces deux plans.

162. — **PROBLÈME.** — *Mener par le point* pp' *un plan tangent à une sphère, faisant avec le plan* $P\alpha P_1$ *un angle donné.*

1re solution. — On déterminera le point SS' par lequel passent tous les plans tangents à la sphère, faisant avec le plan $P\alpha P_1$ l'angle donné; en joignant $SpS'p'$, on aura une première droite du plan tangent. Il ne restera donc plus qu'à mener par cette droite un plan tangent à la sphère.

2e solution. — On détermine d'abord le plan $Q\beta Q_1$, lieu des points de contact des plans tangents à la sphère et faisant avec le plan $P\alpha P_1$ l'angle donné. On déterminera ensuite le plan polaire du point pp'. En construisant alors l'intersection de ce plan polaire et du plan $Q\beta Q_1$, on aura une droite sur laquelle se trouveront les points de contact. Il ne restera plus qu'à chercher les points de rencontre de cette droite avec la sphère.

V. — PLAN TANGENT A UNE SPHÈRE, FAISANT AVEC DEUX PLANS DONNÉS DES ANGLES DONNÉS.

163. — **1re solution.** — On déterminera pour chaque plan le point fixe par lequel passent tous les plans tangents à la sphère, faisant avec le plan donné l'angle donné; puis, par la droite qui joint ces deux points fixes, on mènera un plan tangent à la sphère.

Il existe quatre droites joignant les points fixes deux à deux; nous aurons donc en tout huit plans tangents.

2e solution. — On déterminera pour chaque plan le plan fixe dans lequel se trouvent les points de contact des plans tangents à la sphère faisant avec ce plan donné l'angle donné; puis on déterminera les points de rencontre de l'intersection des deux plans ainsi obtenus avec la sphère; ce seront les points de contact demandés.

Nous avons quatre droites d'intersection des plans fixes pris deux à deux, et par suite huit points de contact.

VI. — EMPLOI DE LA SPHÈRE DANS L'ÉTUDE DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

164. — Soit AA' (fig. 63, pl. 10) l'axe d'une surface de révolution, supposons cet axe parallèle au plan vertical. Donnons-nous également la méridienne de la surface.

A l'aide d'une sphère auxiliaire, nous allons, par exemple, trouver les points de la surface projetés verticalement en m', sans rendre l'axe vertical.

Pour cela, par le parallèle $a'b'$ qui contient le point inconnu, faisons passer une sphère, en particulier la sphère inscrite; soit oo' le centre de cette sphère. Le point inconnu appartenant à cette sphère; nous aurons sa projection horizontale, en coupant la sphère auxiliaire par le plan horizontal m'; et en projetant

horizontalement le point sur le parallèle horizontal $a'_1b'_1a_1b_1$ ainsi obtenu.

Le plan tangent à la surface au point mm' sera le même que le plan tangent à la sphère inscrite au même point.

On peut procéder d'une manière analogue, pour mener un plan tangent à la surface par un point extérieur PP′, le point de contact étant sur le parallèle $a'b'$. On détermine d'abord le point fixe SS′ par lequel passent tous les plans tangents à la surface, aux différents points du parallèle $a'b'$; puis on joint PSP′S′, et il ne reste plus qu'à mener par cette droite un plan tangent à la sphère oo'.

Comme exercice, on appliquera cette construction au cas où le point PP′ est dans le plan de front mené par l'axe, en n'utilisant que la projection verticale.

On examinera aussi le cas particulier où le point PP′ est à l'infini sur une verticale, ce qui permettra de trouver le contour apparent horizontal de la surface.

CHAPITRE VI

SURFACE GAUCHE DE RÉVOLUTION

I. — PROPRIÉTÉS.

165. — On appelle surface gauche de révolution, la surface engendrée par une ligne droite en tournant autour d'une autre droite fixe qui ne coupe pas la première.

166. — En supposant l'axe de révolution vertical, les projections horizontales des génératrices sont toutes tangentes à une même circonférence, c'est la circonférence décrite par le pied de la perpendiculaire commune entre la droite et l'axe. Cette circonférence s'appelle le cercle de gorge ou le collier. Le cercle de gorge servira dans le cas d'un axe de révolution vertical de contour apparent horizontal.

167. — **Détermination d'un point.** — Soit AA′, la droite qui décrit la surface, en tournant autour de la verticale *o* (fig. 81, pl. 17). Nous l'avons supposée de front ; on l'appelle alors génératrice principale. Soit de plus *m*, la projection horizontale d'un point de la surface, nous nous proposons de trouver sa projection verticale.

Le parallèle passant par le point inconnu se projette horizontalement suivant une circonférence de centre *o*, et ayant pour rayon *om*. Ce parallèle rencontre la génératrice principale AA′ au point $\mu\mu'$, ou bien au point $\mu_1\mu'_1$. On en déduit la projection verticale du parallèle, qui est une parallèle à la ligne de terre menée par μ' ou μ'_1, et par suite la projection verticale du point m' ou m'_1.

168. — On peut dire aussi, faisons tourner la droite AA′ autour de l'axe, de façon à la faire passer par le point inconnu. La projection horizontale de la génératrice reste tangente au cercle de gorge, il suffit donc de mener par *m*, une tangente *mb* au cercle de gorge. La rotation de la génératrice est ainsi mesu-

rée par l'angle *aob*. Le premier point *aa'* vient en *bb'*, il reste à faire tourner un deuxième point *hh'* du même angle et dans le même sens, ce qui l'amène en $h_1h'_1$. La verticale *m* coupe alors la droite $bh_1b'h'_1$ au point demandé *mm'*.

La deuxième solution mm'_1 est donnée par la deuxième tangente $b_1mk_1\ b_1'm_1'k'_1$.

169. — La surface admet deux systèmes de génératrices. — Commençons (fig. 82, pl. 17) par construire la droite BB' symétrique de la génératrice principale AA' par rapport au plan de profil *o* mené par l'axe, et considérons la nouvelle surface gauche engendrée par BB', en tournant autour du même axe vertical *o*. Les sections des deux surfaces par un même plan horizontal seront deux circonférences concentriques engendrées, la première par le point *aa'*, la seconde par le point ββ'. Or ces deux points sont symétriques par rapport au plan de profil *o*, ils sont donc aussi équidistants du centre *o*. Autrement dit, les deux parallèles sont identiques.

Ainsi, les deux droites AA', BB', en tournant autour de la verticale *o* engendrent la même surface. La surface admet donc deux systèmes de génératrices, c'est-à-dire que les deux droites AA', BB' ne peuvent jamais coïncider, quelque soit l'angle dont on les fait tourner autour de l'axe. En effet, aussitôt que l'on fait tourner l'une des deux droites, l'autre restant fixe, les projections horizontales sont différentes. Ou encore, les droites AA', BB' sont dans la seule position où leurs projections horizontales coïncident, et en même temps leurs projections verticales sont différentes, donc dans l'espace elle ne coïncideront jamais.

170. — Reconnaître le système d'une génératrice. — Un observateur placé debout sur le plan horizontal en *a*, trace horizontale de AA' voit le cercle de gorge à sa gauche, et la génératrice A à sa droite (fig. 82, pl. 17). Au contraire, un observateur placé debout sur le plan horizontal en *b* trace horizontale de BB' voit le cercle de gorge à sa droite, et la génératrice BB' à sa gauche.

171. — On peut encore, pour établir une distinction entre les systèmes des génératrices, employer un seul observateur placé debout sur le plan horizontal en *o*. Cet observateur unique voit la trace horizontale *a* de la génératrice A à droite de son point

de contact ω avec le cercle de gorge, et la trace horizontale b de la génératrice B à gauche.

172. — Voici enfin un troisième procédé également simple. Convenons de figurer de chaque génératrice, la portion comprise entre le plan horizontal et le plan du cercle de gorge. La génératrice A par exemple sera figurée par la demi-tangente $a\omega$, tandis que la génératrice B est représentée uniquement par la demi tangente $b\omega$. Il en résulte que tout un système est figuré en projection horizontale par des demi-tangentes dirigées toutes dans le même sens, l'autre système également, mais le nouveau sens était différent du précédent.

173. THÉORÈME. — *Deux génératrices de système différent se rencontrent toujours, et deux génératrices de même système ne se rencontrent jamais.*

Soit A, B, (fig. 83, pl. 17) les projections de deux génératrices sur le plan du cercle de gorge, abstraction faite de leurs systèmes. La verticale qui s'appuie sur ces deux droites rencontre A en m, B en m_1, et le plan du cercle de gorge au point p. Nous formons ainsi deux triangles rectangle map, m_1bp, qui sont égaux comme ayant un côté égal $ap = bp$, et un angle aigu égal, attendu que toutes les génératrices font avec le plan horizontal le même angle. Donc les côtés mp, m_1p sont égaux : d'où il résulte que toute verticale s'appuyant sur deux génératrices rencontre ces deux génératrices à la même distance du plan du cercle de gorge.

174. Supposons maintenant que A et B (fig. 84, pl. 17) soient de systèmes différents. Les deux points $m\,m_1$ sont compris tous les deux entre le plan horizontal et le plan du cercle de gorge, ils sont donc confondus, et par suite les deux génératrices A et B se rencontrent.

175. Si au contraire, les deux génératrices A et B (fig. 85, pl. 17) sont de même système, le point m de A est au-dessous du plan du cercle de gorge, tandis que le point m_1 de B est au-dessus. Donc cette fois, les deux points m, m_1 sont symétriques par rapport au plan du cercle de gorge, et par suite les deux droites ne se coupent pas.

176. **Plan tangent en un point de la surface.** — Jusqu'à présent, pour résoudre cette question, nous nous servions de la

méridienne principale, parce que cette ligne était la seule connue sur la surface, avec les parallèles. Ici, nous emploierons avantageusement les génératrices.

Soit une surface gauche de révolution définie par sa trace horizontale T de cote 0 (fig. 86, pl. 17), et par son cercle de gorge C de cote 7. Soit de plus *m*, la projection horizontale d'un point de la surface. Le plan tangent en ce point sera déterminé par les deux génératrices de la surface passant par le même point. Ces droites ont pour projections horizontales, des tangentes *ma*, *mb*, au cercle de gorge. Les traces horizontales des mêmes génératrices se trouvent en $\alpha\beta$ sur la trace horizontale de la surface, ou en α_1 et β_1.

Le plan tangent est donc déterminé par l'horizontale *ab* de cote 7 dans le plan du cercle de gorge, et par sa trace horizontale $\alpha\,\beta$ qui comme vérification doit être parallèle à *ab*.

Le point *m* étant la projection horizontale de deux points de la surface, le plan tangent au point le plus bas a pour trace horizontale $\alpha\,\beta$, et le plan tangent au point le plus haut a pour trace horizontale $\alpha_1\,\beta_1$.

177. — On a figuré sur l'épure les échelles de pente des deux plans tangents aux deux points projetés en *m*, elles montrent que la cote du point *m* est de 3,64.

178. — On pouvait aussi déterminer le plan tangent en *m* avec une seule génératrice passant par le point *m*, et avec la tangente au parallèle au même point.

179.— Normale.— Soit $m\,m'$, (fig. 87, pl. 17), un point de la surface gauche engendrée par la génératrice principale $A\,A'$ en tournant autour de la verticale *o*. Pour trouver la normale en $m\,m'$, nous faisons tourner ce point autour de l'axe, de façon à l'amener en $\mu\,\mu'$ sur la génératrice principale, puis nous construisons la normale à la surface en ce point $\mu\mu'$.

Or, cette normale inconnue est en même temps normale à toutes les lignes tracées sur la surface, et passant par son pied; donc, en particulier, elle est normale à la génératrice principale. Comme cette dernière est de front, la normale se projettera verticalement suivant la perpendiculaire à A' menée par μ'. Cette normale coupe l'axe de révolution au point $n'\,n$ qui sera le point fixe des normales en tous les points du parallèle considéré, donc finalement $m\,n\,m'\,n'$ est la normale demandée.

II. — MÉRIDIENNE PRINCIPALE.

180. — Détermination d'un point. — Pour trouver un point quelconque de la méridienne principale, il suffit de prendre l'intersection d'un parallèle quelconque de la surface, avec le plan méridien principal.

Soit $\mu\mu'$ (fig. 88 pl. 17), un point quelconque de la génératrice principale AA'. Le parallèle passant par ce point rencontre le le plan de front *o* en *mm'* qui est un point de la méridienne principale.

181. — Tangente. — La tangente à la méridienne principale au point *mm'* (fig. 88, pl. 17), est l'intersection du plan tangent à la surface en *mm'*, avec le plan méridien principal. Or, le plan tangent en *mm'* contient la génératrice *ma m'a'* passant par ce point, *aa'* étant le point de rencontre de la génératrice avec le plan du cercle de gorge. De plus, le plan tangent est perpendiculaire sur le plan vertical, il a donc pour trace verticale *m'a'*, et son intersection avec le plan méridien principal se projette ainsi verticalement suivant *m' a'*. En résumé *m'a'* est la tangente.

182. — Normale. — La méthode donnée précédemment pour trouver la normale à la surface en un point quelconque conduit à une construction très simple de la normale à la méridienne principale. Faisons tourner le point *mm'* (fig. 88 pl. 17), autour de l'axe, de façon à l'amener en $\mu\mu'$ sur la génératrice principale AA'. La normale à la surface en $\mu\mu'$ se projette verticalement suivant la perpendiculaire $\mu'n'$ à la génératrice principale. Son point de rencontre *n'* avec l'axe est le point fixe des normales à la surface en tous les points du parallèle, donc *m'n'* est aussi la normale à la méridienne principale au point *m'*.

183. — Point et tangente. — On peut aussi construire la méridienne principale par point, en utilisant uniquement les propriétés des génératrices. Commençons par dessiner deux génératrices principales de même système AA', BB' (fig. 89, pl. 17), puis contruisons une génératrice quelconque de système différent C_1 C'_1. La projection horizontale de cette génératrice est une tangente quelconque C_1 au cercle de gorge. Projetons la

ensuite verticalement, à l'aide de ses deux points de rencontre aa', bb' avec les deux génératrices principales AA', BB'. Ceci fait, la génératrice variable $ab\,a'b'$ ou $C_1\,C'_1$ rencontre le plan méridien principal au point mm' qui sera un point quelconque de la méridienne principale. Cette façon de procéder a l'avantage de donner en même temps la tangente qui est C'_1, attendu que la méridienne principale doit servir de contour apparent vertical, elle est donc l'enveloppe des projections verticales des génératrices.

184. — Asymptotes. — Un point de la méridienne principale étant toujours donné par l'intersection d'une génératrice avec le plan méridien principal, ce point ne peut s'éloigner à l'infini que si la génératrice variable devient parallèle au plan sécant. Et comme dans chacune de ses positions la projection verticale de la génératrice est toujours tangente à la méridienne principale, lorsqu'elle sera de front, elle sera tangente mais le le point de contact sera rejeté à l'infini.

Donc les asymptotes de la méridienne principale d'une surface gauche de révolution, s'obtiennent en faisant tourner la génératrice autour de l'axe, de façon à la rendre de front. En résumé les asymptotes de la méridienne principale ne sont autre chose que les projections verticales des génératrices principales.

185. — Équation de la méridienne principale. — Prenons pour origine le centre du cercle de gorge oo' en projection verticale et en projection horizontale (fig. 88, pl. 17), puis comme axe des x dans les deux projections la parallèle à la ligne de terre menée par oo'. En projection horizontale, prenons comme axe des y la ligne de rappel oo' et enfin, en projection verticale, prenons comme axe des z l'axe de révolution.

Le génératrice principale AA' a pour équation en projection horizontale $y = a$, en appelant a le rayon du cercle de gorge, et en projection verticale $z = \frac{c}{a}x$, $\frac{c}{a}$ étant la tangente de l'angle de A' avec l'axe des x.

Prenons sur la génératrice le point $\mu\mu'$ déterminé par son abscisse $x = \alpha$. En projection horizontale, les coordonnées de μ seront donc $x = \alpha$, $y = a$, tandis qu'en projection verticale, les coordonnés de μ' sont $x = \alpha$, $z = \frac{c}{a}\alpha$.

Le parallèle du point $\mu\mu'$ coupe alors le plan de front o au point mm' dont les coordonnées sont $X = om = o\mu = \sqrt{\alpha^2 + a^2}$ et $Z = m'p' = \mu'\pi' = \frac{c}{a}\alpha$.

Nous aurons donc l'équation de la méridienne principale, en éliminant α entre les équations

$$(1) \qquad X = \sqrt{\alpha^2 + a^2}$$

$$(2) \qquad Z = \frac{c}{a}\alpha,$$

ce qui donne

$$X^2 - \frac{a^2}{c^2}Z^2 = a^2$$

ou

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

C'est l'équation d'une hyperbole rapportée à son centre, ayant pour axe transverse l'axe des x de longueur a et pour asymptotes, comme nous l'avions déjà dit précédemment les génératrices principales $\frac{x}{a} = \pm\frac{z}{c}$.

186. — Ainsi donc, la surface gauche de révolution n'est autre chose qu'un hyperboloïde de révolution à une nappe. C'est en résumé une surface du second degré, dont les sections planes seront des coniques, ellipses, hyperboles ou paraboles, ainsi que les variétés de ces différentes courbes.

187. — Dans la fig. 90, pl. 17, on a représenté un hyperboloïde de révolution à axe vertical, en le supposant réduit à sa surface opaque limitée à deux plans horizontaux H_1 K_1. Dans ces conditions le cercle de gorge est vu ainsi que la méridienne principale. On a de plus figuré par leurs projections, des génératrices de chaque système, en ne dessinant que les régions vues de chacune d'elles. Un premier système est marqué avec un trait plein continu comme $a\alpha a_1$ $a'\alpha'a'_1$. L'autre en gros trait de construction $b\beta b_1$ $b'\beta'b'_1$.

188. — Si l'hyperboloïde était solide à l'intérieur, c'est-à-dire du côté du centre oo', le cercle de gorge serait caché et la méri-

dienne principale serait vue. C'est l'inverse, lorsque l'hyperboloïde est solide à l'extérieur.

189. — Cône directeur. — Dans l'étude des surfaces gauches, et en particulier de la surface gauche de révolution, il est souvent utile de connaître le cône directeur, c'est-à-dire le cône obtenu en menant par un point de l'espace, des parallèles à toutes les génératrices de la surface. Considérons en particulier celui qui a pour sommet le centre oo' de la surface. Ce sera le cône de révolution engendré par $o\alpha\, o'\alpha'$ (fig. 91, pl. 17), en tournant autour de l'axe, la droite $o\alpha\, o'\alpha'$ étant la parallèle aux génératrices principales AA', $A_1 A_1'$ menée par le centre oo'.

190. — Cône asymptote. — Nous constatons que le plan tangent à ce cône directeur particulier suivant $o\alpha\, o'\alpha'$ contient les deux génératrices parallèles AA' A_1A_1'. Autrement dit, le plan tangent au cône directeur suivant $o\alpha\, o'\alpha'$ est un plan tangent à l'infini à la surface sur AA', A_1A_1'. C'est pour cette raison que le cône directeur particulier qui a pour sommet oo' s'appelle le cône asymptote de la surface.

Ainsi donc, le cône asymptote de la surface est engendré par les asymptotes de la méridienne principale en tournant autour de l'axe, il est tangent à la surface tout le long d'un parallèle à l'infini.

191. — Enfin, tout plan tangent au cône asymptote coupe l'hyperboloïde suivant deux génératrices parallèles à la génératrice de contact sur le cône, et à des distances de part et d'autre de cette génératrice de contact égales au rayon du cercle de gorge.

III. — PLANS TANGENTS.

192. — Plan tangent parallèle à un plan donné. — Nous allons reconnaître que la résolution de ce problème ne nécessite pas toujours la connaissance de la méridienne principale, comme nous l'avions supposé dans le cas d'une surface de révolution quelconque. A la place de la méridienne, nous utiliserons les propriétés des génératrice.

Le plan tangent inconnu doit en effet contenir deux génératrices de la surface. Nous déterminerons d'abord les directions

de ces génératrices, et ensuite leur position. Il nous restera à combiner deux de ces génératrices de système différent, de façon à former avec elles un plan parallèle au plan donné.

193. — Soit A (fig. 92, pl. 17), une génératrice d'un hyperboloïde, cette droite étant définie par son échelle, le plan horizontal 0 étant le plan du cercle de gorge. Soit aussi o le pied de l'axe de révolution que nous supposons vertical. Soit enfin D l'échelle de pente du plan donné.

Commençons par construire le cône asymptote, pour cela, nous menons par le centre o une parallèle à A, elle a pour trace sur le plan horizontal de cote 5 le point α, $a\alpha$ étant parallèle à a_1o. On en déduit la base du cône asymptote dans le plan horizontal 5, c'est une circonférence de centre o, ayant pour rayon $o\alpha$.

Menons ensuite par le sommet du cône asymptote un plan parallèle au plan donné. Son échelle de pente est Δ, sa trace sur le plan horizontal 5 est une perpendiculaire sur Δ menée par le point 5 de Δ, elle coupe la base du cône asymptote aux points β, γ ; donc $o\beta$, $o\gamma$, sont les génératrices du cône asymptote parallèles au plan donné.

194. — Les génératrices de l'hyperboloïde parallèles au plan donné auront leurs projections horizontales parallèles à $o\beta$, $o\gamma$ et tangentes au cercle de gorge. Leurs traces sur le plan horizontal 5, se trouvent sur le parallèle 5 de l'hyperboloïde, lequel passe par a ; elles sont en même temps sur les horizontales 5 des plans tangents au cône asymptote suivant $o\beta$, $o\gamma$, elles sont donc finalement en b, b_1, c, c_1.

195. — Il nous reste à combiner ces différentes génératrices, de façon à former avec elles un plan tangent parallèle au plan donné. Il faut donc prendre b avec c ou b_1 avec c_1, les horizontales bc, b_1c_1 des deux plans tangents étant parallèles à l'horizontale du plan donné.

196. — On peut dire aussi que l'on doit combiner b avec c par exemple, parce que le point de rencontre m des deux génératrices, c'est-à-dire le point de contact inconnu doit se trouver dans le plan méridien om perpendiculaire sur le plan donné.

En résumé, m, m_1 sont les deux points de contact cherchés, les traces des deux plans tangents sur le plan horizontal 5 étant les droites bc, b_1c_1.

On a de plus figuré dans l'épure les échelles de pente des deux plans tangents.

197. — Plan tangent par un point extérieur, le point de contact étant sur une génératrice. — Nous avons dit que par un point extérieur, on pouvait mener une infinité de plans tangents à une surface. Pour déterminer le problème, dans le cas d'une surface de révolution en général, nous avons jusqu'à présent assujetti le point de contact à se trouver sur un parallèle ou sur un méridien donné. Dans le cas particulier de la surface gauche de révolution, on peut aussi assujétir le point de contact à se trouver sur une génératrice donnée.

198. — Soit A (fig. 93, pl. 18), une génératrice d'un hyperboloïde, définie par son échelle de pente, en prenant comme plan horizontal 0 le plan du cercle de gorge. Soit de plus o le pied de l'axe de révolution, et enfin S le point extérieur défini par sa projection et sa cote 6 par exemple. Nous nous proposons de mener par S(6), un plan tangent à l'hyperboloïde, le point de contact étant sur la génératrice A.

Le plan tangent inconnu contiendra la génératrice A, sur laquelle doit se trouver le point de contact. Il est donc déterminé par le point S, et par la droite A.

Cherchons sur A, le point qui a la cote 6 du point S, soit *h*; S*h* sera une horizontale du plan tangent. Il en résulte que le plan tangent a pour trace sur le plan du cercle de gorge, une parallèle à S*h*, menée par *a*, et qui rencontre le cercle de gorge en un deuxième point *b*. Ce plan tangent coupe alors l'hyperboloïde suivant une deuxième génératrice tangente au cercle de gorge en *b*. Enfin, cette deuxième génératrice rencontre la première au point de contact inconnu *m*.

199. — On peut dire aussi que le point de contact inconnu *m* se trouve dans le plan méridien *om* perpendiculaire sur le plan tangent, ou, ce qui revient au même, dans le plan méridien perpendiculaire sur S*h*.

200. — Plan tangent parallèle à une droite, le point de contact étant sur une génératrice. — La résolution de ce problème est analogue à celle du précédent. Par la génératrice, on mène un plan parallèle à la direction donnée, c'est le plan tangent cherché. Pour trouver son point de contact, on

construit la deuxième génératrice d'intersection de ce plan avec la surface, son point de rencontre avec la première est le point de contact demandé. Ou bien, connaissant toujours le plan tangent, on figure le plan méridien perpendiculaire sur ce plan tangent connu, son point de rencontre avec la génératrice donnée est le point de contact cherché.

IV. — AXE DE FRONT.

201. — Détermination d'un point. — Soit XX' (fig. 94, pl. 18), l'axe de révolution, nous le supposons de front. Soit de plus AA', une génératrice quelconque de la surface. Nous nous proposons de trouver le point de la surface projeté verticalement en *m'*. Le raisonnement que nous allons faire serait applicable à une surface de révolution engendrée par une courbe quelconque qui ne serait pas la méridienne principale comme nous l'avions supposé précédemment (164).

Considérons tout d'abord le parallèle passant par le point *m'*, il se projette verticalement suivant la perpendiculaire abaissée de *m'* sur A'. Ce parallèle rencontre la ligne qui décrit la surface AA', au point μμ'. Faisons passer alors par le parallèle, une sphère qui aura son centre sur l'axe, et choisissons en particulier la sphère qui a son centre dans le plan horizontal μ', soit *oo'*. De cette manière, on n'aura aucune opération à effectuer pour mesurer le rayon de la sphère, ce rayon étant mesuré par *o*μ.

On considère alors le point demandé comme appartenant à cette sphère particulière *oo'*. On en déduit la projection horizontale *m* ou m_1 du point inconnu, en coupant la sphère *oo'* par le plan horizontal *m'*.

202. — Normale. — Pour construire la normale à la surface au point *mm'*, nous commençons par faire tourner ce point autour de l'axe, de façon à l'amener en μμ' sur la ligne AA' qui décrit la surface. En ce point μμ', la normale à la surface est aussi normale à la ligne AA' elle est donc contenue dans le plan normal à cette ligne AA' au point μμ' Dans le cas actuel, le plan normal à AA' est le plan perpendiculaire à AA' menée par μμ', il est déterminé par l'horizontale μ*h* μ'*h'* et par la ligne de front μ*f* μ'*f'*. La normale en μμ' étant dans le plan μ*hf* μ'*h'f'*, et d'autre part rencontrant l'axe, elle passe par le point de ren-

contre du plan normal $\mu h f \mu' h' f'$ avec l'axe de révolution XX'. Soit $\omega\omega'$ ce point que l'on a déterminé dans l'épure à l'aide du plan de front X, lequel coupe le plan normal suivant une parallèle à $\mu f \mu' f'$ menée par hh'.

Les normales à la surface aux différents points du parallèle considéré passent toutes par le point fixe $\omega\omega'$, en particulier $m\omega m'\omega'$ est la normale au point mm'.

203. — Contour apparent vertical. — Les constructions précédentes conduisent rapidement à la détermination du contour apparent vertical, lequel n'est autre chose ici que la méridienne principale, puisque l'axe de révolution est de front.

Le parallèle $m'\mu'$ (fig. 94, pl. 18), en projection verticale rencontre le contour apparent vertical de la sphère oo', aux deux points $M'M'_1$, qui sont deux points de la méridienne principale.

204.— Normale.— Les normales en ces deux points passent par le point fixe $\omega\omega'$, ce sont donc les droites $M'\omega'$, $M'_1\omega'$. Nous avons en même temps en $\omega\omega'$ le centre de la sphère inscrite tout le long du parallèle, le rayon de cette sphère étant mesuré par $\omega' M'$.

205. — Contour apparent horizontal.— Si nous figurons le contour apparent horizontal de la sphère inscrite tout le long du parallèle $m\mu$, l'enveloppe de ce contour apparent horizontal sera en même temps le contour apparent horizontal de la surface (59).

Pour trouver de plus le point de contact, construisons l'intersection du plan du parallèle de contact avec le plan du contour apparent horizontal de la sphère. Or, ce dernier n'est autre chose que le plan horizontal ω'. Il coupe le plan du parallèle suivant la ligne de bout p', qui rencontre le contour apparent horizontal de la sphère inscrite ω, aux points p, p_1.

En résumé, p, p_1 sont deux points du contour apparent horizontal, et en ces deux points, les normales sont ωp, ωp_1.

V. — EXERCICES.

1. Construire une sphère à des distances données de quatre plans donnés (nombre des solutions).

2. Mener par un point un plan faisant avec les deux plans de projection des angles donnés.

3. Mener à une sphère un plan tangent faisant avec les plans de projection des angles donnés.

4. Construire une sphère de rayon donné reposant sur trois sphères (pile de boulets triangulaire).

LIVRE VI

CHAPITRE PREMIER

I. — SECTION PLANE DU CONE DE RÉVOLUTION.

206. — THÉORÈME I. — *Toute section plane d'un cône ou d'un cylindre de révolution est une des courbes, ellipse, hyperbole ou parabole, ayant :*

1° Pour axe focal, l'intersection du plan sécant avec le plan méridien perpendiculaire au plan sécant ;

2° Pour foyers, les points de contact du plan sécant avec des sphères inscrites dans le cône et tangentes au plan sécant ;

3° Pour directrices, les droites d'intersection du plan sécant avec les plans des cercles de contact du cône et des sphères inscrites précédentes.

Supposons (fig. 64, pl. 10) l'axe du cône vertical et le plan sécant $P\alpha P_1$ perpendiculaire au plan vertical.

En inscrivant dans le triangle formé par les deux génératrices principales et la trace verticale du plan sécant une circonférence, cette circonférence sera le contour apparent vertical d'une sphère inscrite dans le cône tout le long du parallèle $khk'h'$, et tangente au plan sécant au point ff'.

Soit de plus dd' l'intersection du plan sécant $P\alpha P_1$ avec le plan du parallèle de contact $h'k'$.

Pour trouver un point quelconque de la section, il suffit de déterminer l'intersection d'une génératrice quelconque du cône avec le plan sécant. Soit donc $S\mu S'\mu'$ une génératrice du cône, $\mu\mu'$ étant un point du parallèle de contact $khk'h'$. Cette génératrice rencontre le plan sécant au point mm'.

Le plan de front m rencontre dd' en pp' ; menons ensuite par SS' une parallèle à $mpm'p'$, elle rencontre le plan horizontal $h'k'$ en $\delta\delta'$. Les trois droites $S\delta S'\delta'$, $S\mu m S'\mu' m'$, $mpm'p'$ sont alors dans un même plan, et par suite les trois points δ, μ, p sont en ligne droite. Nous formons ainsi les deux triangles semblables $S\delta\mu S'\delta'\mu'$, $m\mu p m'\mu' p'$ qui nous donnent :

$$\frac{(m\mu m'\mu')}{(mpm'p')} = \frac{(SmS'm')}{S\delta S'\delta'} = \frac{S'k'}{S'\delta'}.$$

Or $m\mu m'\mu'$ est tangente à la sphère, de même que $mfm'f'$, donc les longueurs $m\mu m'\mu'$, $mfm'f'$ sont égales entre elles, et par suite le rapport $\frac{(mfm'f')}{(mpm'p')}$ est égal au rapport constant $\frac{S'k'}{S\delta'}$.

Ainsi donc le rapport des distances d'un point quelconque de la section au point ff' et à la droite dd' est constant, et par suite, ff' est un foyer de la section, dd' étant la directrice correspondante.

Il existe une deuxième sphère inscrite dans le cône et tangente au plan sécant, elle définira le deuxième foyer et la deuxième directrice.

En résumé, aa', $a_1a'_1$ sont les deux sommets de l'axe focal, ff', $f_1f'_1$ les deux foyers.

Pour trouver un point quelconque de la section, on aurait pu couper le cône et le plan sécant par un plan horizontal quelconque. Cette deuxième construction va nous permettre de déterminer directement les deux autres sommets de la courbe, dans le cas où cette section est une ellipse.

Soit, par exemple, $\omega'\omega$, le milieu de $aa_1a'a'_1$, le plan horizontal mené par ce point qui est le centre de la section, nous donne en bb', $b_1b'_1$ les deux sommets du petit axe.

207. — Tangente. — *La tangente en un point quelconque de la section est l'intersection du plan tangent au point considéré et du plan sécant.*

Or, le plan tangent en mm' est déterminé par la génératrice $SmS'm'$ et par la tangente $\mu_1 t\mu'_1 t'$ à la base. Cette deuxième droite rencontre la trace horizontale du plan sécant en tt' qui sera un point de la tangente ; $mtm't'$ est donc la tangente cherchée.

II. — PROJECTION SUR UN PLAN PERPENDICULAIRE A L'AXE.

208. — THÉORÈME II. — *Toute section plane d'un cône de révolution se projette sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône, suivant une des courbes, ellipse, hyperbole ou parabole, ayant pour foyer la projection du sommet du cône, et pour directrice, la projection de l'intersection du plan sécant avec le plan perpendiculaire à l'axe du cône mené par le sommet du cône.*

Supposons (fig. 65, pl. 11) l'axe du cône vertical, et le plan sécant $P x P_1$ perpendiculaire au plan vertical. Soit DD' l'intersection du plan sécant avec le plan horizontal S'. Construisons un point quelconque mm' de la section, en cherchant l'intersection d'une génératrice quelconque du cône $SaS'a'$ avec le plan sécant. Menons ensuite par le point mm' un plan de front, qui coupe DD' en pp', et soit enfin $\mu\mu'$ le point de rencontre de la verticale m, avec le plan horizontal S'.

Dans le triangle $Sm\mu S'm'\mu'$, rectangle en $\mu\mu'$, nous avons

$$S\mu = \mu'm' \operatorname{tg} \theta,$$

en appelant θ le demi-angle au sommet du cône.

De même, dans le triangle $\mu mp\mu'm'p'$, rectangle en $\mu\mu'$, nous avons

$$\mu p = \mu'm' \operatorname{tg} \alpha,$$

en appelant α l'angle du plan sécant avec l'axe.

On en déduit, en divisant ces deux égalités membre à membre,

$$\frac{S\mu}{\mu p} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Donc, le lieu du point μ ou du point m en projection horizontale est bien une conique ayant pour foyer le point S et pour directrice D.

Les deux théorèmes que nous venons de démontrer sont tout à fait indépendants de la nature de la section, c'est-à-dire qu'ils sont vrais, que la section soit une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

III. — NATURE DE LA SECTION.

209. — Un point de la courbe étant toujours donné par l'intersection du plan sécant avec une génératrice du cône, ce point ne peut s'éloigner à l'infini, que si la génératrice devient parallèle au plan sécant.

Cherchons donc si le cône admet des génératrices parallèles au plan sécant, et pour cela, menons par le sommet du cône un plan parallèle au plan sécant.

210. — **Ellipse.** — Dans la figure 65, planche 11, $S'\delta'$ est la trace verticale de ce plan.

Nous constatons qu'il ne coupe pas le cône, et par suite la section est une ellipse; nous savons d'ailleurs trouver les quatre sommets de cette ellipse.

L'angle du plan sécant avec l'axe est alors plus grand que le demi-angle au sommet du cône, et le plan sécant ne rencontre qu'une seule nappe du cône.

211. — **Hyperbole.** — Supposons maintenant (fig. 66, pl. 11) que le plan parallèle au plan sécant mené par le sommet du cône coupe le cône suivant les deux génératrices $SpS'p'$, $SrS'r'$. Ces deux génératrices ne couperont donc plus le plan sécant, ou, comme on le dit, elles donneront deux points d'intersection à l'infini. On peut obtenir quand même la limite de la tangente, c'est-à-dire l'asymptote, en appliquant à ces génératrices particulières, la construction ordinaire.

Ainsi, les asymptotes de la section seront les droites d'intersection du plan sécant, avec les plans tangents au cône suivant les génératrices qui donnent les points à l'infini.

Le théorème relatif à la projection d'une tangente s'applique aussi lorsque le point de contact est à l'infini, donc les asymptotes de l'intersection se projettent suivant les asymptotes de la projection de la courbe.

Considérons, par exemple, la génératrice $SpS'p'$, le plan tangent suivant cette génératrice, a pour trace horizontale la tangente en p à la base du cône. Cette droite rencontre la trace horizontale du plan sécant au point $\pi\pi'$ qui est un premier point de l'asymptote cherchée. D'ailleurs, le plan tangent étant mené par $SpS'p'$ qui est parallèle au plan sécant, il coupe le plan sécant suivant une parallèle à $SpS'p'$; on obtiendra donc l'a-

symptote cherchée, en menant par $\pi\pi'$ une parallèle à $SpS'p'$.

De même, la deuxième asymptote est une parallèle à $SrS'r'$ menée par le point $\rho\rho'$.

Comme vérification, les deux asymptotes se coupent au centre de la section $\omega\omega'$.

212. — Parabole. — Supposons enfin (fig. 67, pl. 11) que le plan parallèle au plan sécant mené par le sommet du cône soit tangent au cône. En répétant le même raisonnement que dans le cas d'une section plane quelconque, on reconnait que la section dans l'espace est une parabole, parce que les distances d'un point quelconque de la courbe au foyer et à la directrice sont égales entre elles. On reconnait également que la projection horizontale de la courbe est aussi une parabole.

La construction ordinaire s'applique d'ailleurs ici pour déterminer le sommet et le foyer de chacune de ces paraboles.

IV. — GRANDEUR DE LA SECTION.

213. — Dans les différents exemples que nous venons d'examiner, on aura la grandeur de la section, en effectuant pour cette section le changement de plan horizontal x_1y_1.

Par exemple (fig. 64, pl. 10), le point mm' a pour nouvelle projection horizontale m_1 sur une perpendiculaire à x_1y_1 menée par m' et à une distance de x_1y_1 égale à l'ancien éloignement. La même opération donne suivant $m_1\theta_1$ la tangente à la nouvelle courbe.

En effectuant le changement de plan pour les sommets, les asymptotes et les foyers de la courbe de l'espace, on aura les éléments correspondants de la nouvelle courbe.

CHAPITRE II

I. — SECTION PLANE DU CYLINDRE DE RÉVOLUTION.

214. — Le théorème I (206) concernant la nature de la section dans l'espace est vrai dans le cas du cylindre. Quant au théorème II (208), il est vrai aussi, mais il est évident qu'alors la section se projette horizontalement suivant la base du cylindre.

Dans la figure 68, planche 11, mm' est donc un point quelconque de la section, $mtm't'$ est la tangente en ce point; AA', BB', CC', DD' seront les sommets de la section dans l'espace.

En effectuant le changement de plan horizontal x_1y_1 pour ces différents points, on aura les sommets de la courbe qui donne la grandeur de la section.

215. — Projection d'une circonférence. — Nous allons nous servir du théorème I (206) appliqué au cylindre, pour démontrer que la projection orthogonale d'une circonférence est une ellipse.

Soit mm' un point d'une section plane d'un cylindre (fig. 69, pl. 11); CC' étant un sommet du petit axe. Menons par CC' une perpendiculaire sur le plan de la section, et prenons sur cette droite un point $C_1C'_1$ tel que les longueurs $C_1\omega C'_1\omega'$ et $A\omega A'\omega'$ soient égales entre elles.

Le point $C_1C'_1$ ainsi obtenu détermine avec ABA'B' un certain plan. Proposons-nous de trouver le lieu des points de rencontre de ce plan avec des parallèles à CC C'C'$_1$ menées par les différents points de la section du cylindre. Soit $m\,m'_1$ l'un de ces points.

Les deux triangles $m\mu m_1 m'\mu' m'_1$, $c\omega c_1 c'\omega' c'_1$ sont semblables et donnent

$$\frac{(m_1\mu m'_1\mu')}{(m\mu m'\mu')} = \frac{(c_1\omega c'_1\omega')}{(c\omega c'\omega')} = \frac{A'\omega'}{A\omega} = \frac{A'\mu'}{A\mu}.$$

Donc la courbe contenue dans le plan C_1AB est une courbe semblable à la circonférence AmB, et par suite, cette courbe est elle-même une circonférence.

Ainsi l'ellipse, section plane du cylindre, peut être considérée comme la projection orthogonale d'une circonférence.

Pour démontrer la réciproque, il suffit de faire voir qu'une ellipse quelconque peut être considérée comme une section plane d'un cylindre de révolution.

En effet, soit AB, CD (fig. 70, pl. 11) les deux axes d'une ellipse ; dans le plan perpendiculaire au plan ABCD mené par AB, décrivons une circonférence sur $A\omega$ comme diamètre, et prenons la corde AO égale à $C\omega$.

Considérons alors le cylindre de révolution ayant pour axe ωo et pour rayon $C\omega$. Ce cylindre sera coupé par le plan ABCD suivant une ellipse ayant pour sommet ABCD et qui coïncide par conséquent avec l'ellipse donnée.

Cette détermination peut se faire, connaissant seulement les quatre points A, B, C, D. Donnons-nous alors une circonférence quelconque et projetons-la sur le plan ABCD, puis déterminons ces quatre points A, B, C, D, d'où nous déduisons le cylindre de révolution.

Les égalités précédentes nous prouvent encore que la circonférence de l'espace est semblable à la base du cylindre, et que les différents points de la circonférence se projettent sur la section plane du cylindre.

Donc la projection d'une circonférence est une ellipse.

II. — DÉVELOPPEMENT DE LA SURFACE LATÉRALE D'UN CYLINDRE.

216. — Le développement de la surface latérale d'un cylindre est la limite du développement de la surface latérale d'un prisme inscrit dans le cylindre, les côtés de la base du prisme diminuant indéfiniment.

Nous ne nous occuperons ici que du cylindre de révolution. La base du cylindre se développera suivant une ligne droite perpendiculaire aux transformées des génératrices.

Ouvrons, par exemple, le cylindre suivant la génératrice A, (fig. 71, pl. 12) et construisons le développement dans le plan

vertical, en plaçant la transformée de la base sur la ligne de terre. Soit A_1 la transformée de la génératrice A.

Pour trouver la transformée d'une génératrice quelconque M, il faut porter la longueur A_1M_1 égale à l'arc AM de la base. Si cet arc était très-petit, on pourrait faire ce transport, en remplaçant l'arc AM par la corde AM. Mais l'arc AM étant quelconque, on le décompose en un certain nombre de petits arcs que l'on remplace par leurs cordes ; on choisira les arcs assez petits pour que la différence entre l'arc et la corde soit négligeable graphiquement.

On arrivera à un résultat plus exact avec un cylindre de révolution, en calculant l'arc AM à l'aide de l'angle AOM mesuré au rapporteur.

On a en effet :

$$\text{arc AM} = 2\pi R \frac{(\text{angle AoM})^\circ}{360^\circ}.$$

Il suffit donc de calculer une fois pour toutes le rapport $\frac{2\pi R}{360}$, et de le multiplier chaque fois par le nombre de degrés correspondant à l'angle AoM.

217. — Transformée d'une section plane. — Soit maintenant $\mu\mu'$ le point de rencontre de la génératrice M avec un plan sécant, on aura le point correspondant dans le développement, en portant la longueur $M'\mu'$ suivant $M_1\mu_1$.

218. — Tangente. — Dans le développement d'une section plane d'un prisme, les angles des côtés de la section avec les arêtes du prisme ne changent pas, il en est donc de même à la limite, lorsque les côtés de la section droite diminuent indéfiniment.

Autrement dit, si nous considérons un élément infiniment petit de la section plane d'un cylindre, il fait avec la génératrice un angle qui ne change pas dans le développement. Or cet élément infiniment petit prolongé n'est autre chose que la tangente à la courbe, donc la propriété énoncée plus haut est applicable aussi à la tangente.

Soit donc $\mu t \mu' t'$ la tangente à la section au point $\mu\mu'$, elle rencontre la tangente à la base au point tt' ; portons alors sur la ligne de terre, à partir de M_1, dans le sens M_1A_1, une longueur M_1t_1 égale à Mt, en joignant μ_1t_1, nous aurons la tangente en μ_1 au développement de la section. En effet, il résulte de cette con-

struction que les triangles rectangles $Mt\mu M't'\mu'$, $M_1t_1\mu_1$ sont égaux, comme ayant les deux côtés de l'angle droit égaux chacun à chacun, et par suite les angles $t\mu Mt'\mu'M'$, $t_1\mu_1M_1$ sont aussi égaux.

219. — Points remarquables. — Comme points remarquables, nous avons les points $\alpha_1\beta_1\alpha_1$ correspondant aux sommets du grand axe de la section. En ces points, la tangente est perpendiculaire sur la génératrice. Aux deux points $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ qui sont les sommets du petit axe, la tangente dans l'espace est dirigée suivant la ligne de plus grande pente du plan sécant, elle fait donc avec la génératrice le plus grand angle possible. Il en résulte que les points correspondants γ_1, δ_1 sont des points d'inflexion du développement de la courbe, c'est-à-dire qu'en ces deux points, la tangente traverse la transformée. Il est facile d'ailleurs de se rendre compte de ce résultat de la manière suivante.

220. — Soit (fig. 72, pl. 12) un cylindre de révolution à axe vertical et un plan sécant perpendiculaire au plan vertical.

Construisons le développement de la section dans le plan tangent suivant $c\gamma c'\gamma'$. Soit $m\mu m'\mu'$, $n\nu n'\nu'$ deux génératrices voisines de $c\gamma c'\gamma'$. Pour commencer le développement, il suffit de faire tourner les deux faces $mc\gamma\mu$, $nc\gamma\nu$ d'un prisme inscrit dans le cylindre, autour de la verticale $c\gamma c'\gamma'$, de manière à les amener dans le plan de front c. Or, par cette rotation, le point μ' vient sur une perpendiculaire à $c'\gamma'$ et à une distance de $c'\gamma'$ plus grande que la distance de μ' à $c'\gamma'$. Ainsi, l'élément $\mu'_1\gamma'$ se trouve dans le développement au-dessus de $\mu'\nu'$. Le même raisonnement montre que l'élément $\nu'_1\gamma'$ se trouve dans le développement au-dessous de $\mu'\nu'$. Donc $\mu'\nu'$ traverse le développement de la courbe; mais $\mu'\nu'$ est la tangente en γ' à la section et en même temps au développement de la section.

III. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN CONE OU D'UN CYLINDRE.

221. — Par la droite et le sommet du cône, on mène un plan dont on cherche la trace sur le plan de base du cône. Cette trace rencontre la base du cône en un certain nombre de points que l'on joint au sommet du cône. Les points de rencontre de

ces génératrices avec la droite donnée sont les points demandés (fig. 73, pl. 12).

Si au lieu d'un cône on avait un cylindre, on emploierait comme plan auxiliaire passant par la droite, un plan parallèle aux génératrices du cylindre, les autres constructions sont les mêmes que dans le cas du cône.

CHAPITRE III

I. — SECTION ANTIPARALLÈLE DU CONE A BASE CIRCULAIRE.

222. — Étant donné un cône ayant pour base une circonférence, si l'on mène par la droite qui joint le sommet au centre de la base, un plan perpendiculaire au plan de base, ce plan s'appelle le *plan principal* du cône; il est en effet un plan de symétrie pour le cône.

Soit SA, SB (fig. 74, pl. 12) les deux génératrices d'intersection du plan principal avec le cône; menons une droite CD antiparallèle de AB par rapport à SA, SB, puis par cette droite CD, faisons passer un plan perpendiculaire au plan SAB; on dit que ce plan est *antiparallèle* du plan de base.

223. — **Théorème.** — *La section d'un cône à base circulaire par un plan antiparallèle du plan de base est une circonférence.*

En effet, coupons le cône et le plan sécant par un plan parallèle au plan de base; la section dans le cône sera une circonférence décrite sur A_1B_1 comme diamètre; d'ailleurs, le plan auxiliaire coupe le plan sécant suivant $M\mu$ perpendiculaire au plan principal SAB.

Or, dans la circonférence A_1MB_1, nous avons

$$\overline{M\mu}^2 = A_1\mu B_1\mu,$$

mais les droites A_1B_1 et CD étant antiparallèles, on a

$$A_1\mu \,.\, B_1\mu = C\mu \,.\, D\mu.$$

Donc

$$\overline{M\mu}^2 = C\mu \,.\, D\mu,$$

et par suite le lieu du point M est une circonférence décrite sur CD comme diamètre.

Il résulte de ce théorème que tout cône, ayant pour base une section plane d'une sphère, coupe la sphère suivant une deuxième circonférence.

En effet, prenons comme plan de projection le plan passant par le sommet du cône, le centre de la base et le centre de la sphère ; ce plan sera perpendiculaire au plan de base, et sera par suite le plan principal du cône. Les génératrices principales du cône SA, SB coupent le grand cercle de la sphère contenu dans le plan SAB (fig. 75, pl. 12), aux deux points C et D. Menons enfin par CD un plan perpendiculaire au plan SAB ; comme AB et CD sont antiparallèles, le plan que nous venons de construire coupera le cône et la sphère suivant deux circonférences décrites sur CD comme diamètre. Ces deux circonférences sont donc identiques, et constituent avec la première circonférence décrite sur AB comme diamètre, l'intersection du cône et de la sphère.

Tout ce que nous venons de dire s'applique évidemment à un cylindre qui n'est qu'un cas particulier du cône.

II. — OMBRES D'UN HÉMISPHÈRE.

224. — *On donne un hémisphère creux reposant par son pôle sur le plan horizontal : trouver toutes les ombres produites, en éclairant l'hémisphère par des rayons lumineux parallèles à une direction donnée* (fig. 76, pl. 12).

Les différentes questions que nous avons à résoudre ici sont :

1° L'ombre propre de l'hémisphère ;

2° L'ombre portée sur le plan horizontal ;

3° L'ombre portée par l'ouverture de l'hémisphère dans l'intérieur de l'hémisphère.

Pour résoudre ces différentes questions, nous allons effectuer un changement de plan vertical x_1y_1 ayant pour but de rendre les rayons lumineux parallèles au nouveau plan vertical.

Soit $o'_1d'_1$ la nouvelle projection verticale d'un rayon lumineux. L'ombre propre se projette verticalement dans le système x_1y_1 suivant la perpendiculaire à $d'_1o'_1$ menée par o'_1 ; nous déduisons de là en f, g, h les sommets de la projection horizontale de cette courbe.

Pour trouver les sommets de la projection verticale, nous remarquons que le grand axe est perpendiculaire à $d'o'$, mené

par o', et a pour demi-longueur le rayon de la sphère. Nous connaissons donc, de la projection verticale, le grand axe et les trois points f', g', h', ce qui permet de construire le petit axe.

Pour avoir ensuite l'ombre portée à l'intérieur de l'hémisphère, il faut considérer le cylindre parallèle à $dod'_1o'_1$ ayant pour directrice l'équateur de la sphère. Ce cylindre coupe la sphère suivant un deuxième grand cercle projeté verticalement dans le système x_1y_1, suivant k'_1, g'_1, h'_1. En projetant ces trois points horizontalement, nous avons en g, h, k les sommets utiles de la projection horizontale de cette ombre portée.

Soit $o'_1l'_1ol$ la ligne de front du plan de cette courbe, menée par le point oo', cette droite sera dans le système primitif le grand axe de la projection verticale. L'extrémité de ce grand axe se trouve d'ailleurs en m' sur le contour apparent vertical de la sphère. Nous connaissons donc encore une fois le grand axe et trois points g', h', k' de cette nouvelle courbe, ce qui permet d'en déterminer le petit axe.

Quant à l'ombre portée sur le plan horizontal, elle se compose de deux parties :

1° Ombre portée par la moitié de droite de l'équateur de l'hémisphère. Cette ombre est une demi-circonférence ayant pour centre d, l'ombre de oo', et pour rayon le rayon de la sphère; cette ombre est limitée au diamètre g_1h_1, ombre de $ghg'h'$ qui est par conséquent parallèle à gh.

2° Moitié de l'ombre de la sphère. Cette nouvelle ombre est une ellipse ayant pour foyer le point o, pour sommets du petit axe g_1h_1, et pour sommet du grand axe l'ombre f_1 du point ff'. Nous avons supposé le plan vertical transparent, pour n'avoir pas à déterminer l'ombre de l'équateur sur ce plan vertical.

III. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE SPHÈRE.

325. — Soit la droite AA′ et la sphère oo' (fig. 77, pl. 12). Considérons le plan projetant verticalement la droite, il coupe la sphère suivant le petit cercle $a'b'$, dont il faut trouver les points de rencontre avec la droite donnée.

Or, par ce petit cercle et le contour apparent horizontal de la sphère, on peut faire passer deux cônes, soit SS′ le sommet de l'un de ces cônes. La question primitive est donc ramenée à la suivante.

intersection de la droite avec le cône qui a pour sommet SS', et pour directrice le contour apparent horizontal de la sphère.

Pour résoudre cette question, par le sommet SS' et par la droite AA', on fait passer un plan qui coupe le plan de base suivant $\alpha\delta\alpha'\delta'$. Cette droite rencontre la base du cône aux deux points $\mu\mu'$, $\nu\nu'$ que l'on joint au sommet du cône. Enfin les deux génératrices $S\mu S'\mu'$, $S\nu S'\nu'$ rencontrent la droite donnée aux deux points demandés *mm'*, *nn'*.

IV. — SECTION PLANE D'UN CONE QUELCONQUE

226. Comme nous l'avons dit dans le cas du cône de révolution (206), pour trouver un point quelconque d'une section plane d'un cône, il suffit de déterminer l'intersection du plan sécant avec une génératrice quelconque de la surface. Nous emploierons par conséquent un plan auxiliaire passant successivement par toutes les génératrices du cône.

Il est avantageux, pour rendre les constructions symétriques, et plus simples en même temps, d'assujétir le plan auxiliaire à une condition de plus, par exemple, de le faire passer par une droite fixe menée par le sommet du cône.

Menons donc par le sommet du cône S (fig. 95, pl. 18), une droite arbitraire, dont nous déterminons à l'avance les points de rencontre σ, σ_1, avec le plan de base et avec le plan sécant. Soit de plus X X_1 l'intersection du plan de base et du plan sécant. Le dessin que nous figurons représente si l'on veut la projection horizontale, les données précédentes permettent de continuer les constructions sans le secours d'aucune autre projection.

Un plan auxiliaire quelconque mené par $S\sigma\sigma_1$, aura pour trace sur le plan de base, une droite telle que $\sigma a a'\alpha$. Sa trace sur le plan sécant sera $\sigma_1\alpha$. D'ailleurs, le plan auxiliaire coupe le cône suivant les génératrices Sa Sa', qui rencontrent $\sigma_1\alpha$ aux points a_1 a'_1. En résumé, $a_1a'_1$ sont deux points de l'intersection.

227. — Tangente. — La tangente au point a_1 est l'intersection du plan sécant $\sigma_1 XX_1$, avec le plan tangent au cône suivant la génératrice Saa_1 qui a donné le point d'intersection a_1.

Or, le plan tangent est déterminé par la génératrice Saa_1, et par la tangente at à la directrice, au point a où cette directrice est rencontrée par la génératrice de contact.

Nous connaissons déjà un point de la tangente, c'est le point de contact a_1 ; il suffit donc d'en trouver un deuxième, que nous obtiendrons en coupant le plan tangent et le plan sécant par l'un des plans auxiliaires. Cette façon de procéder revient à assimiler le plan tangent à un cône analogue au cône donné, ayant pour sommet S, et pour base at. Soit donc $\sigma\delta\sigma_1$ le nouveau plan auxiliaire, il coupe le plan de base suivant $\sigma\delta$, le plan sécant suivant $\sigma_1\delta$ et le plan tangent suivant St, ce qui donne en t_1 un deuxième point de la tangente. En résumé m_1t_1 est la tangente demandée.

228. — Points sur les contours apparents. — Nous citerons comme points remarquables, qu'il est urgent de déterminer les points sur les contours apparents du cône. On les obtient, en faisant passer le plan auxiliaire, successivement par toutes les génératrices de contour apparent du cône.

Soit Sb', une génératrice de contour apparent. Le plan auxiliaire passant par cette droite est le plan $\sigma bb'\beta\sigma_1$, il coupe le plan de base suivant $\sigma\beta$, le plan sécant suivant $\sigma_1\beta$, et le cône suivant les deux génératrices Sb, Sb', ce qui donne les deux points b_1, b'_1.

Des deux points ainsi obtenus, le point b'_1 seul est remarquable. En ce point b'_1, la projection de la courbe est tangente au contour apparent en projection Sb' (56).

Bien que le point b_1 ne soit pas un point remarquable comme nous l'entendons, nous profiterons quand même de sa présence pour dessiner la courbe, car on n'a jamais trop de points et surtout de tangentes pour bien dessiner ces courbes. Nous ne voulons pas dire par là que les points de la courbe doivent être excessivement rapprochés les uns des autres, mais il est indispensable d'avoir tous les points remarquables, puis dans l'intervalle un nombre suffisant de points avec les tangentes en ces points, pour qu'il n'y ait aucune hésitation dans le tracé de la courbe.

De même, le plan $\sigma\gamma\sigma_1$ passant par la génératrice du contour apparent Sc donne en c_1 le point de contact avec le contour apparent Sc, et en même temps le point courant c'_1.

229. — Plans limites. — Les plans auxiliaires menés par $S\sigma\sigma_1$ ne donnent pas tous des points d'intersection. Les plans limites $\sigma\delta\sigma_1$ $\sigma\varepsilon\sigma_1$ s'obtiennent en menant par σ des tangentes à la base. Les points correspondants sont d_1, e_1, et en ces points, les tangentes sont précisément $\sigma_1 d_1 \delta$, $\sigma_1 e_1 \varepsilon$, puisque ces droites sont les intersections du plan sécant avec les plans tangents au cône suivant les génératrices Sd, Se.

230. — Tracé de la courbe. — Lorsqu'on juge que le nombre des points est suffisant, il ne reste plus qu'à les joindre dans le même ordre que les points correspondants de la base. Cette opération est facilitée en donnant à chaque point de l'intersection le nom du point correspondant de la base, affecté d'un indice.

Ainsi sur la base, nous trouvons les points dans l'ordre:

$$a\,e\,a'\,b'\,c'\,d\,c\,b\,a,$$

il suffira donc de joindre les points dans l'ordre;

$$a_1\,e_1\,a'_1\,b'_1\,c'_1\,d_1\,c_1\,b_1\,a_1,$$

pour avoir la courbe.

231. — Ponctuation. — La ponctuation d'un point de la courbe sur le cône supposé seul et conservé tout entier, est la même que celle du point correspondant de la base, en supposant toutefois les deux points sur la même nappe du cône, c'est-à-dire d'un même côté du sommet.

Supposons que la région $c\,b\,a\,e\,a'\,b'$ de la base soit vue, la région correspondante $c_1\,b_1\,a_1\,e_1\,a'_1\,b'_1$ de l'intersection sera vue aussi, les limites entre les parties vues et cachées étant précisément les points c_1, b_1 sur les contours apparents.

232. — Cas du cylindre. — Tout ce que nous venons de dire relativement à la recherche d'une section plane d'un cône s'applique également à celle d'une section plane d'un cylindre, en ayant soin de remplacer la droite fixe $S\sigma\sigma_1$ par une parallèle quelconque aux génératrices du cylindre.

233. — Axes d'une section plane d'un cône à base circulaire. — Nous avons vu dans le cas d'un cône de révolution que pour trouver les directions des asymptotes d'une section plane, on menait par le sommet du cône un plan parallèle au

plan sécant, qui coupait le cône suivant les directions demandées.

Cette construction s'applique également dans le cas d'un cône quelconque. Soit donc (fig. 96, pl. 18), un cône défini par son sommet S et sa base que nous supposons circulaire. On a mené par le sommet du cône un plan parallèle au plan sécant, il a pour trace sur le plan de base une certaine droite YY_1. Cette droite coupe la base aux points a, b, donc Sa, Sb, seront les directions des asymptotes de la section.

En prenant les bissectrices de l'angle aSb, on aura les directrices des axes de la projection de la section. Ce sont ces bissectrices que nous nous proposons de trouver, même dans le cas d'une section elliptique.

Les génératrices Sa Sb qui donnent les directions infinies de la section coupent en projection horizontale la base circulaire du cône, aux points a_1b_1.

234. — La corde a_1b_1 fait avec la corde ab des angles dont les bissectrices sont parallèles aux bissectrices de l'angle aSb. Soit ωp la bissectrice de l'angle $a\omega b_1$, et Sq la bissectrice de l'angle aSb, il s'agit de démontrer que ces deux droites sont parallèles, c'est-à-dire que les angles $a\omega p$, aqr sont égaux.

Or l'angle $a\omega p$, a pour mesure :

$$\frac{ab_1}{4} + \frac{a_1b}{4}.$$

D'un autre côté l'angle aqr est égal à la somme $qaS + aSq$, il a donc pour mesure :

$$\frac{a_1b}{2} + \left(\frac{ab_1}{4} - \frac{a_1b}{4}\right) = \frac{ab_1}{4} + \frac{a_1b}{4}.$$

Donc si nous connaissions la droite a_1b_1, la bissectrice de l'angle ab, a_1b_1 serait parallèle à la bissectrice de l'angle aSb.

235. — Or les droites ab, a_1b_1 se coupent en un point ω qui appartient à la polaire P du point S par rapport à la base du cône. D'un autre côté, la droite $S\omega$ est conjuguée harmonique de P par rapport à ab, a_1b_1. Donc finalement a_1b_1 est la quatrième droite d'un faisceau harmonique dont on connait trois droites P, $S\omega$, et ab.

236. — Soit alors YY_1 (fig. 97, pl. 18), la trace sur le plan de base d'un cône à base circulaire, du plan parallèle au plan sécant mené par le sommet du cône. On construira 1° la polaire P du point S par rapport à la base, elle coupe YY_1 ou *ab* au point ω. On joint Sω, puis on figure 2° la quatrième droite du faisceau harmonique P_1, Sω, YY_1. Soit a_1b_1, cette droite qui a été obtenue en prenant le segment *np* égal au segment *mn* sur la corde *mn* parallèle à P.

En résumé D, D_1 bissectrices de l'angle *ab*, a_1b_1 sont les directions des axes de la section.

237. — Connaissant la direction des axes de la section, on trouvera les sommets eux-mêmes, en menant à la section des tangentes parallèles aux directions des axes DD_1. Les tangentes parallèles à D par exemple, seront les droites d'intersection du plan sécant avec les plans tangents au cône parallèles à la droite D.

V. — SECTION PLANE D'UN HYPERBOLOIDE.

238. — **Détermination d'un point.** — Pour trouver un point quelconque d'une section plane d'une surface gauche de révolution, on peut employer comme surface auxiliaire, des plans perpendiculaires à l'axe de révolution, c'est-à-dire des plans horizontaux, en supposant l'axe de révolution vertical.

239. — Soit la surface gauche de révolution engendrée par la ligne de front AA′ (fig. 98, pl. 18), en tournant autour de la verticale *o*, et le plan sécant $P\pi P_1$.

Un plan horizontal quelconque, déterminé par sa trace verticale H_1, coupe le plan $P\pi P_1$ suivant une horizontale déterminée par sa trace verticale *hh′*, et l'hyperboloïde suivant un parallèle dont on connait le centre *o*, et un point *aa′* sur AA′.

Nous avons ainsi en *mm′*, $m_1m'_1$, deux points de l'intersection.

240. — On peut encore trouver un point quelconque de la section, en prenant l'intersection d'une génératrice quelconque de la surface avec le plan sécant.

Soit *cdc′d′* (fig. 98, pl. 18), une génératrice quelconque de la surface obtenue à l'aide de son point de contact *cc′*, avec le cercle

de gorge, et de son point de rencontre *dd'* avec la trace horizontale de l'hyperboloide. Le plan projetant horizontalement cette génératrice coupe le plan sécant suivant *ef e'f'*, qui rencontre *cdc'd'* au point demandé *nn'*.

241 — Tangente. — La tangente au premier point *mm'* est l'intersection du plan sécant avec le plan tangent à la surface au même point. Nous connaissons déjà un point de la tangente, c'est le point de contact *mm'*, il suffit donc d'en trouver un second par exemple la trace horizontale. Les génératrices de l'hyperboloïde passant par *mm'* ont pour projections horizontales, des tangentes au cercle de gorge menées par *m*, leurs traces horizontales se trouvent en α, β sur la trace horizontale de l'hyperboloïde. La trace horizontale du plan tangent est donc $\alpha\beta$ qui coupe la trace horizontale du plan sécant au point *tt'*.

Finalement *mt m't'* est la tangente cherchée.

242. — Section elliptique. — Sommets. — La méthode des plans horizontaux pour trouver un point de l'intersection montre que les points de la section sont deux à deux symétriques par rapport au plan méridien perpendiculaire au plan sécant. Il en résulte que ce plan méridien perpendiculaire au plan sécant coupe le plan sécant suivant une droite qui est dans l'espace un axe de la section. La projection horizontale de cette ligne de plus grande pente du plan sécant sera en même temps un axe de la projection horizontale de la section.

243. — Soit donc un hyperboloïde défini par son cercle de gorge C et par sa trace horizontale H (fig. 99, pl. 18), puis un plan sécant déterminé par sa trace horizontale XX_1 et par sa trace sur le plan du cercle de gorge YY_1.

Le plan méridien OM perpendiculaire sur le plan sécant coupe le plan sécant suivant la droite *pq* définie par sa trace horizontale *p* et par sa trace *q* sur le plan du cercle de gorge. Si nous cherchons les points de rencontre de la droite *pq* avec la surface, nous aurons deux sommets de la section.

244. — Pour résoudre cette question, on emploie comme surface auxiliaire, le cône engendré par la droite *pSq* en tournant autour de la verticale *o*. Ce cône coupera l'hyperboloïde suivant des parallèles : si ces parallèles étaient connus, leurs points de rencontre avec la droite donnée seraient les points

demandés. Or, pour déterminer ces parallèles communs à l'hyperboloïde et au cône, il suffit de trouver sur chacun d'eux un point. On prendra par exemple le point de rencontre d'une génératrice quelconque de l'hyperboloïde avec le cône.

245. — Le cône engendré par la droite pSq a pour base dans le plan horizontal, la circonférence décrite de S comme centre, avec Sp pour rayon, il s'agit de trouver son intersection avec la génératrice mm_1 par exemple de l'hyperboloïde. On considère dans ce but, le plan Smm_1, sa trace sur le plan de base du cône passe par m, puis par la trace μ d'une parallèle à la génératrice mm_1 menée par le sommet S. Pour trouver ce point μ, considérons la parallèle à mm_1, menée par le point q dans le plan du cercle de gorge, elle a sa trace horizontal en r, qr étant égal à mm_1. Le plan $pSqr$ a donc pour trace horizontale pr, ce qui donne en μ la trace horizontale de la parallèle à mm_1 menée par S.

Il en résulte que le plan Smm_1 a pour trace horizontale $m\mu$ qui coupe la base du cône en ε, φ.

Donc le cône est coupé suivant $S\varepsilon$, $S\varphi$, qui rencontrent mm_1 en e et f.

En résumé, l'hyperboloïde et le cône se coupent suivant deux parallèles de centre o, et passant respectivement par les points e et f. Ces deux parallèles rencontrent l'axe ligne de plus grande pente pq, en deux points qui sont les sommets demandés a et b.

Il est à remarquer que le parallèle déterminé par le point e coupe la droite pq en projection horizontale en deux points, mais un seul de ces deux points convient. Le point e se trouvant sur la nappe inférieure du cône entre le sommet S et le point ε de la base, on doit prendre aussi le point a sur la nappe inférieure du cône, entre le sommet S et le point p de la base.

La même remarque s'applique au sommet b, qui lui, au contraire, se trouve dans notre épure sur la nappe supérieure du cône.

246. — Nous avons dit que la section était une courbe du second degré; nous aurons donc son centre ω, en prenant le milieu de ab. Le deuxième axe est alors horizontal, et pour trouver ses extrémités, il suffit de couper l'hyperboloïde par le plan horizontal ω. Dans ce but, remarquons que le plan horizontal a coupe la génératrice mm_1 au point e, ensuite, que le plan horizontal b coupe la même génératrice mm_1 en f. Donc, le plan horizontal ω, équidistant des deux précédents coupe mm_1

en g milieu de ef. On en déduit que le plan horizontal ω coupe l'hyperboloïde suivant un parallèle de centre o, passant par le point g. Ce parallèle rencontre l'horizontale ω du plan sécant, aux deux points c, d qui sont les deux derniers sommets de la section.

En résumé, a,b,c,d, sont les quatre sommets de la section dans l'espace, et en même temps les quatre sommets de la projection horizontale.

247. — Section hyperboloïque asymptotes. — Un point quelconque d'une section plane d'une surface gauche de révolution, étant toujours donné par l'intersection d'une génératrice de la surface avec le plan sécant, ce point ne peut s'éloigner à l'infini, que si l'une des génératrices de la surface devient parallèle au plan sécant.

248. — Il faut donc commencer par déterminer les directions des génératrices de la surface parallèles au plan sécant ; pour cela, il suffit de chercher les génératrices du cône directeur ou asymptote, qui sont aussi parallèles au plan sécant.

Ce raisonnement montre que la nature d'une section plane d'un hyperboloïde est la même que celle de l'intersection du plan sécant et du cône asymptote.

249. — Ayant déterminé sur le cône directeur une génératrice $S\alpha$, parallèle au plan sécant, on en déduira sur la surface les génératrices A,A_1 parallèles à $S\alpha$, et par suite parallèles au plan sécant, elles donneront un point d'intersection à l'infini. L'asymptote correspondante sera l'intersection du plan sécant avec le plan tangent à l'infini à l'hyperboloïde sur AA_1, c'est-à-dire avec le plan AA_1 lui-même. Or, nous savons que le plan AA_1 tangent à l'infini à l'hyperboloïde est en même temps le plan tangent au cône asymptote suivant la génératrice parallèle à AA_1. Nous pouvons donc dire en résumé que les asymptotes d'une section plane d'un hyperboloïde sont les mêmes que celles de l'intersection du plan sécant avec le cône asymptote.

250. — Soit l'hyperboloïde engendré par la ligne de front AA', en tournant autour de la verticale o, et le plan sécant $P\pi P_1$ que nous avons supposé de bout (fig. 100, pl. 18).

Le plan parallèle au plan sécant mené par le centre oo' de la surface, coupe le cône asymptote suivant les génératrices $o\lambda$, $o\mu$, qui sont les directions infinies de la section.

Les plans tangents au cône asymptote suivant $o\lambda\ o'\lambda'$, $o\mu\ o'\mu'$, coupent le plan sécant suivant des parallèles à $o\lambda\ o'\lambda'$, $o\mu\ o'\mu'$ menées respectivement par des points ll', mm', et qui sont les asymptotes de la section.

Dans la même figure, on a construit de la même façon les asymptotes de l'intersection de l'hyperboloïde avec le plan de bout $R\rho R_1$ parallèle au premier $P\pi P_1$.

251. — Ayant trouvé les asymptotes de la section par le plan $P\pi P_1$, on en déduit le centre $\omega\omega'$, et par suite les positions des deux axes. L'un de ces axes est le diamètre horizontal, l'autre est le diamètre ligne de plus grande pente. Quand on ne connaît pas à l'avance la position de l'axe réel, on commence par déterminer les sommets sur l'axe horizontal, en coupant par le plan horizontal ω'. Si les sommets ainsi obtenus sont réels, l'épure est finie ; sinon, on détermine les sommets sur l'axe ligne de plus grande pente comme nous l'avons montré dans le cas des sections elliptiques (244).

Dans l'épure, on a choisi deux plans présentant ces deux espèces de sections hyperboliques. Pour le plan $P\pi P_1$ l'axe transverse est horizontal, et on a indiqué la construction pour trouver les sommets. Pour le plan $R\rho R_1$ l'axe transverse est dirigé suivant la ligne de plus grande pente, et pour marquer l'un des deux sommets, on s'est contenté de prendre l'intersection du plan sécant avec la méridienne principale supposée tracée exactement.

Enfin, on a figuré la portion de la surface supposée opaque, comprise entre les deux plans sécants et entre deux plans horizontaux.

252 — **Section parabolique.** — Une section plane d'une surface gauche de révolution en une parabole, lorsque le plan sécant fait avec l'axe, un angle égal à celui que font les génératrices de la surface avec le même axe.

Soit un hyperboloïde défini par une génératrice A dont on connaît l'échelle de pente (fig. 101, pl. 18), et par son axe *o*. On a compté les cotes à partir du plan du cercle de gorge. Soit de plus un plan sécant défini par sa ligne de plus grande pente D. Le module du plan est par hypothèse égal à celui de la génératrice.

253.—Pour avoir le sommet de la section, il suffit de prendre l'intersection de l'axe, ligne de plus grande pente D du plan

sécant avec la surface. Nous n'emploierons pas ici la méthode donnée dans le cas des sections elliptiques (244) mais nous profiterons de cette particularité que nous connaissons l'un des deux points d'intersection, c'est le sommet à l'infini. Cela résulte de ce que la ligne de plus grande pente D est parallèle à la génératrice A.

Considérons donc le plan mené par D et par la génératrice parallèle A, il a pour trace sur le plan du cercle de gorge, l'horizontale *ad*. Cette horizontale coupe le cercle de gorge en un deuxième point *b*; et par suite l'hyperboloïde est coupé par le plan AD suivant une deuxième génératrice tangente en *b*, au cercle de gorge. Cette deuxième génératrice rencontre enfin la droite D au point *m* qui est le sommet demandé.

Pour définir la parabole, il suffit d'en chercher un point à l'aide d'un plan horizontal. On a cherché dans l'épure les points *p* et *q* sur le cercle de gorge et les points dans le plan horizontal — 5.

Enfin, on a figuré la surface de l'hyperboloïde au-dessous du plan sécant et au-dessus du plan horizontal. — 5.

254. EXEMPLE. — Lignes de niveau d'un hyperboloïde à axe horizontal. — *Soit* oX *l'axe de l'hyperboloide* (*fig.* 102, *pl.* 18), *nous le supposons dans le plan horizontal, on a en* o *le centre, on connaît le rayon du cercle de gorge, et l'angle des génératrices avec l'axe.*

Nous figurons d'abord la méridienne principale qui servira de contour apparent horizontal, c'est une hyperbole ayant pour axe *o*X, pour asymptotes des droites A, B_1 menées par *o* et faisant avec l'axe l'angle connu, et ayant pour demi-axe transverse, le rayon connu du cercle de gorge.

Les lignes de niveau sont des hyperboles qui auront les mêmes asymptotes que la méridienne principale et dont il suffit de déterminer les sommets.

Le rayon du cercle de gorge étant égal à 5 unités, on a figuré les sections de la surface ayant pour cotes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Lorsque la cote du plan sécant est plus petite que le rayon du cercle de gorge, les sommets réels sont les points de rencontre du plan sécant avec le plan du cercle de gorge, on les détermine dans le système *xy*, où le plan vertical est perpendiculaire à l'axe de révolution.

Au contraire, si la cote du plan sécant est plus grande que le rayon du cercle de gorge, les sommets réels se trouvent sur le méridien vertical oX. On détermine ces différents points dans le système $x_1\, y_1$ en prenant comme plan vertical, un plan parallèle à l'axe, on symplific la construction, en utilisant la méridienne principale supposée tracée exactement.

Comme cas intermédiaire, la ligne de niveau 5 se compose des génératrices principales A, B_1.

255. — On a figuré les contours apparents verticaux de la surface dans un certain nombre de systèmes.

Dans le système xy, le contour apparent vertical est le cercle de gorge,

Dans le système x_1y_1, on a comme contour apparent vertical une hyperbole méridiennne principale.

Dans le système x_2y_2 le contour apparent vertical est une hyperbole dont les asymptotes s'obtiendraient en prenant le contour apparent vertical du cône asymptote, à l'aide d'une sphère inscrite.

Le sommet est le point le plus haut du cercle de gorge.

Dans le système x_3y_3, le contour apparent vertical se réduit à un point, qui est le point le plus haut du cercle de gorge.

Si la surface était complète, illimitée, dans ce système, le contour apparent se réduirait à deux points fixes, le point le plus haut et le point le plus bas du cercle de gorge, puis à la droite qui joint ces deux points. Cette droite ne joue plus dans l'épure aucun rôle, parce que la surface a été limitée à deux parallèles.

Dans chacune des projections verticales on a dessiné un certain nombre de génératrices, on remarquera que dans le système x_3y_3, les génératrices de même système que A, passent par le point fixe B_1, qui est le pied d'une génératrice de bout. De même, les génératrices marquées en gros trait de construction passent par un point fixe symétrique de B_1, par rapport au centre o'_3.

Enfin, dans le système x_4y_4, le contour apparent vertical est une ellipse ayant pour sommets du grand axe, le point le plus haut et le point le plus bas du cercle de gorge. Les deux sommets du petit axe s'obtiennent rapidement en menant à la méridienne principale horizontale, des tangentes de bout. La recherche des deux sommets du petit axe peut d'ailleurs

se traiter directement, sans le secours de la méridienne, en menant à la surface, des plans tangents parallèles à un plan donné, qui ici serait de profil.

Nous nous sommes proposé dans ce qui précède de montrer sous ses différents aspects, en utilisant la surface gauche de révolution, la forme de terrain qu'on appelle un *col* en topographie.

La ligne de *faite* se projette horizontalement suivant oX, la ligne de *thalweg* est le cercle de gorge.

Dans les différents systèmes on a figuré en trait mixte fin, et dans les régions vues seulement comme pour les génératrices ces deux lignes de faite et de thalveg.

256. — Les hachures que l'on emploie en topographie pour figurer les surfaces doivent être dessinées normales aux lignes de niveau. Dans le cas où la surface est un hyperboloïde, il est facile de trouver à quelles courbes appartiennent ces hachures, puisqu'il s'agit de trouver la trajectoire orthogonale des lignes de niveau.

En prenant comme origine le centre de l'hyperboloïde, pour axe des x la projection du cercle de gorge, comme axe des y l'axe de révolution oX, les équations des lignes de niveau sont de la forme :

$$x^2 - \frac{y^2}{m^2} = \alpha^2,$$

m étant le coefficient angulaire des génératrices principales A_1B_1.

Le coefficient angulaire de la tangente en un point d'une ligne de niveau est donné par la relation :

$$xdx - \frac{ydy}{m^2} = 0.$$

Le coefficient angulaire de la tangente à la trajectoire orthogonale sera donc défini par la relation.

$$m^2x\,dy + ydx = 0,$$

ou

$$\frac{dy}{y} = -\frac{m^2dx}{x}$$

d'où on déduit :

$$\mathrm{L}y = -m^2\mathrm{L}x + \mathrm{LC},$$

$$\mathrm{L}y\,x^{m^2} = \mathrm{LC} \qquad y\,x^{m^2} = \mathrm{C}.$$

Dans le cas particulier de $m = 1$, ce qui est le cas de notre épure, l'hyperbole méridienne est équilatère, et les hachures appartiennent aussi à des hyperboles équilatères ayant pour asymptotes les lignes de faite et de thalweg.

Dans notre épure, (fig. **102**, pl. **18**), on a figuré suivant T une branche de l'une de ces hyperboles.

257. — Dans le dessin rendu d'une surface topographique, on ne doit pas mettre de hachures dans le voisinage d'un col, et il en est de même dans toute la région de la surface pour laquelle la pente est plus petite que $\frac{1}{64}$. D'un autre côté, l'intensité des hachures doit être proportionnée à la pente, il est donc intéressant de connaître sur la surface les points pour lesquels la pente est la même.

A un autre point de vue, les hachures ont l'intention de figurer l'aspect de la surface, en la supposant éclairée par des rayons lumineux verticaux, parallèles aux rayons visuels.

Les hachures doivent donc être également sombres suivant les lignes d'égale teinte de la surface, or en tous les points d'une de ces lignes, la normale fait avec la verticale le même angle; ou bien, en tous les points d'une ligne d'égale teinte, le plan tangent à la surface est également incliné sur le plan horizontal.

Prenons les mêmes axes des x et des y que dans la question précédente, et pour axe des z la verticale o.

L'équation de la surface est alors

$$(1) \qquad x^2 + z^2 - \frac{y^2}{m^2} = a^2.$$

Le plan tangent en un point $x'y'z'$ a pour équation

$$xx' + zz' - \frac{yy'}{m^2} = a^2.$$

L'angle γ de ce plan avec l'axe des z, est donné par la relation

$$\cos\gamma = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + z'^2 + \dfrac{y'^2}{m^4}}}.$$

Les lignes d'égale teinte vérifient donc l'équation

$$(2) \qquad z^2 = K^2\left(x^2 + z^2 + \frac{y'^2}{m^4}\right).$$

En éliminant z entre les deux équations (1) et (2), on aura la projection horizontale des lignes d'égale teinte.

On obtient ainsi

$$\frac{y^2}{m^2} - x^2 + a^2 = K^2\left(a^2 + \frac{y^2}{m^2} + \frac{y^2}{m^4}\right)$$

où

$$x^2 + \frac{y^2}{m^2}\left(-1 + K^2\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)\right) = a^2(1 - K^2).$$

Ce sont des courbes du second degré ayant pour axes les axes de la méridienne principale.

Lorsque K est voisin de 1, elles ont pour limite dans le voisinage du point o une ellipse évanouissante dont les axes sont proportionnels à 1 et m^2.

Dans le cas de l'hyperbole équilatère $m = 1$, la limite de la ligne d'égale teinte au col est une circonférence.

Lorsque K est nul, la ligne d'égale teinte est la méridienne principale elle-même.

Comme cas intermédiaire, lorsque $K^2 = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{m^2}} = \dfrac{m^2}{1 + m^2}$ la ligne d'égale teinte se réduit à deux droites que l'on obtient en menant au cercle de gorge dans le système xy, des tangentes faisant avec la ligne de terre le même angle que A avec l'axe d révolution.

Dans le cas de notre épure, l'une de ces droites F s'obtient en menant au cercle de gorge dans le système xy, une tangente à 45° sur xy.

On a figuré suivant E, en trait de construction, l'une des ellipses d'égale teinte, ses sommets s'obtiennent en menant dans le systèmes xy et x_1y_1 des tangentes au cercle de gorge ou à la méridienne principale faisant avec la ligne de terre le même angle.

Tant que cet angle est plus petit que l'angle AoX, on trouve quatre sommets réels, et par suite la ligne d'égale teinte est une

ellipse, mais lorsque l'angle choisi est plus grand que AoX, on ne peut mener les tangentes correspondantes qu'au cercle de gorge, et on trouve alors des hyperboles. Les asymptotes seraient les génératrices de contact des plans tangents au cône asymptote faisant avec le plan horizontal l'angle choisi.

On peut enfin trouver par points ces lignes d'égale teinte avec des échelles de teinte comme dans la méthode de **M.** Pillet en prenant une sphère type dont les divisions seraient obtenues en coupant cette sphère par des plans horizontaux.

Dans l'épure, on a figuré un certain nombre de ces lignes d'égale teinte, et on a remplacé les teintes plates par des hachures parallèles et égales correspondant comme direction et intensité aux différentes lignes de teinte.

VI. — INTERSECTION D'UNE SURFACE ET D'UN POLYÈDRE.

258. — On peut naturellement, pour résoudre cette question, chercher directement les intersections de la surface avec toutes les faces du polyèdre et prendre ensuite les parties utiles de ces différentes courbes, mais il est préférable dans les examens d'employer la marche suivante.

On commence avant tout par déterminer les points de rencontre de la surface avec tous les arêtes du polyèdre, avec les deux tangentes en chacun de ces points. On a ainsi les extrémités des parties utiles des différentes courbes. On détermine ensuite les points sur les contours apparents de la surface. Ces quelques points suffisent dans bien des circonstances pour définir très exactement les parties utiles des courbes, ou au moins elles en donnent une première approximation. C'est seulement maintenant que l'on cherche des points courants, en faisant son possible pour en trouver seulement dans les régions mal définies des courbes en question. Si de plus l'arc à tracer est un peu trop grand, on détermine en outre quelques tangentes intermédiaires et c'est enfin dans le cas où la courbe est presque complète, comme une moitié d'ellipse par exemple, que l'on détermine les éléments de la courbe.

CHAPITRE IV

I. — HÉLICE.

259. — Soit un cylindre de révolution à axe vertical (fig. 78, pl. 12).

Développons ce cylindre sur le plan vertical, la base étant développée par exemple sur la ligne de terre.

En prenant la longueur A_1A_2 égale à la circonférence de base, la surface comprise entre les deux verticales A_1A_2 représente un premier développement de la surface latérale du cylindre.

De A_2 à A_3, nous avons un deuxième développement de la même surface, etc.

On sait que l'hélice se développe suivant une ligne droite.

Soit donc a_1a_2 cette droite, A_2a_2 étant la hauteur du pas. Proposons-nous de trouver un point quelconque de l'hélice, m_1 étant la position correspondante de ce point dans le développement. Nous traçons la génératrice m_1M_1 dans le développement, et en portant l'arc AM égale à A_1M_1, nous aurons suivant la verticale M la génératrice correspondante sur la surface du cylindre.

L'angle AoM est d'ailleurs donné par la relation

$$(\text{angle } AoM)^\circ = A_1M_1 \times \frac{360^\circ}{2\pi \times oA}.$$

Il ne reste plus qu'à porter sur la génératrice M, la longueur $M'm'$ égale à M_1m_1, et on aura en mm' un point quelconque de l'hélice.

260. — Tangente. — Les angles des tangentes avec les génératrices étant conservés dans le développement, on aura la tangente en mm' à l'hélice, en menant par ce point dans le plan tangent suivant $MmM'm'$, une droite $mtm't'$ faisant avec $MmM'm'$ l'angle $a_1m_1M_1$.

En appelant tt' la trace horizontale de la tangente inconnue les deux triangles rectangles $tMmt'M'm'$ et $a_1M_1m_1$ sont donc égaux, et par suite, le point t s'obtiendra en portant sur la tangente à la base du cylindre, la longueur Mt égale à M_1A_1, ou à l'arc MA; nous avons donc suivant $mtm't'$ la tangente cherchée.

Le lieu du point t est la *développante* de la base du cylindre.

261. — Points remarquables. — Comme points remarquables de la projection verticale de l'hélice, nous avons d'abord les points sur le contour apparent vertical du cylindre. Sur la génératrice A, ces points sont à des hauteurs au-dessus du plan horizontal égales à o, une fois, deux fois, etc. la hauteur du pas. Sur la génératrice B, les points de contact sont à des cotes égales à la hauteur du pas multipliée successivement par $\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{2}$, $2+\frac{1}{2}$, etc. En ces différents points, la projection de l'hélice est tangente au contour apparent du cylindre.

Ensuite, sur les génératrices C et D, nous avons des points dont les cotes sont égales à la hauteur du pas; multipliée successivement par $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}+\frac{2}{2}$, $\frac{1}{4}+\frac{3}{2}$, etc.

En ces points, la tangente étant parallèle au plan vertical, sa projection verticale fait avec la génératrice l'angle maximum $a_1a_2A_2$.

En reprenant un raisonnement analogue à celui que nous avons employé dans le cas d'une section plane du cylindre (178) on reconnait que ces derniers points sont des points d'inflexion de la projection verticale de l'hélice.

LIVRE VII

COMPOSITIONS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE DONNÉES A L'ÉCOLE DE SAINT-CYR

I. — CONCOURS DE 1873.

262. — *Deux cônes circulaires droits et égaux ont même sommet* S *et se touchent extérieurement suivant la génératrice* SA, *de manière à adhérer l'un à l'autre. Le rayon de base vaut* 38^{mm} *et la génératrice est double du rayon. La base de l'un des cônes est appliquée sur la partie antérieure du plan horizontal, sa circonférence touchant la ligne de terre, et la génératrice* SA *étant parallèle au plan vertical de projection.*

Cela posé, on demande :

1° *De construire les projections du solide formé par l'ensemble des deux cônes ;*

2° *De construire la partie invisible du plan vertical de projection supposé relevé, l'œil étant placé sur la perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point* A *et à une distance en avant de cette ligne de terre égale à deux fois le diamètre de base de l'un des cônes.*

Ombrer la partie invisible demandée, en n'y comprenant pas la projection verticale des cônes.

Solution. — Le premier cône a sa base dans le plan horizontal, c'est une circonférence tangente à la ligne de terre, ayant 38^{mm} de rayon ; le contour apparent vertical de ce cône se compose des deux droites S'A'SA, S'B'SB (fig. 73, pl. 13).

Le contour apparent vertical du deuxième cône est le triangle équilatéral S'A'B'$_1$ symétrique de S'A'B' par rapport à S'A'.

Pour trouver le contour apparent horizontal de ce deuxième

cône, on lui a mené deux plans tangents verticaux. La verticale S coupe le plan de base en $\sigma\sigma'$; en rabattant le plan de base sur le plan horizontal, $\sigma\sigma'$ vient en $\sigma_1\sigma'_1$; quant à la base du deuxième cône, elle vient coïncider avec la base du premier. On a mené les deux tangentes $\sigma_1 m_1$, $\sigma_1 n_1$ qui se relèvent suivant $\sigma\mu$, $\sigma\nu$; $S\mu S\nu$ seront donc les deux lignes de contour apparent horizontal, elles seront d'ailleurs tangentes à la projection horizontale de la base en m et n.

Le contour apparent horizontal contient en outre une partie de la projection horizontale de la base, parce que le cône est supposé limité. Cette base se projette horizontalement suivant une ellipse, dont les sommets du petit axe sont A et B_1 ; le grand axe est CD égal au diamètre du cercle de base.

La verticale A coupe le système au point AA′ et en un deuxième point sur la génératrice $SB_1S'B'_1$ au-dessus de AA′. Donc le point A des deux bases est caché. La base du premier cône est par suite cachée à l'intérieur du contour apparent du deuxième cône, et la base de ce deuxième cône est cachée aussi, à partir de A jusqu'au contour apparent en m et n.

Pour résoudre la deuxième question, il faut mener par le point oo' des plans tangents aux deux cônes. On a donc mené tout simplement par le point o, une tangente $op\pi$ à la base du premier cône ; en joignant le point π au point tt' trace verticale de $SoS'o'$, on a suivant $\pi t'$ la trace verticale du plan tangent au premier cône. Comme il y a symétrie par rapport au plan $oo'S'$, on en déduit suivant $t'\pi'_1$ la trace verticale du plan tangent au deuxième cône. La région $t'\pi'o'\pi'_1$ est donc la région demandée.

Il est à regretter que dans l'énoncé, on n'ait pas demandé de trouver les ombres produites, en supposant la source lumineuse en o. On rendait de cette manière la question plus intéressante, en lui donnant une signification tout à fait réelle. D'ailleurs, les additions à apporter ne sont pas considérables, puisqu'on n'avait qu'à marquer en trait plein les génératrices de contact, et à remplir de hachures les parties dans l'ombre, mais visibles, des deux cônes et du plan horizontal.

II. — CONCOURS DE 1874.

263. — *Un cylindre circulaire droit a sa base appliquée sur le plan horizontal de projection. La circonférence de cette base*

touche la ligne de terre et son rayon R *vaut 4 cent. La hauteur du cylindre est égale au rayon* R. *Un cône circulaire droit, de même base et de même hauteur que le cylindre, est superposé à ce dernier, de manière que la base du cône coïncide avec la base supérieure du cylindre. L'arête* SA *du cône,* S *étant le sommet, est parallèle au plan vertical de projection. Cela posé, on demande de construire :*

1° *Les projections de l'ensemble des deux solides ;*

2° *Les projections et la vraie grandeur de la section faite par un plan perpendiculaire à l'arête* SA *en son milieu ;*

3° *Les parties du plan horizontal de projection cachées par l'ensemble des deux solides, l'œil étant placé sur la verticale du point* A *au-dessus de ce point, d'une quantité égale à* $\frac{5}{3}$R.

Solution. — Nous ne parlerons pas de la construction du solide, cette construction étant évidente, passons immédiatement à la deuxième question. Soit $bb'a'$ le plan sécant (fig. 74, pl. 13).

L'intersection avec le cylindre se projette horizontalement suivant l'arc cbd de la base ; quant à l'intersection avec le cône, elle est une parabole, car le plan sécant est parallèle à un plan tangent au cône.

On a immédiatement en a le sommet de la projection horizontale, et en S le foyer. De plus, c et d sont les points limites de la partie utile de cette parabole. Dans la parabole, la sous-tangente étant double de l'abscisse, on remarque que tc et td sont les tangentes à la parabole aux deux points c et d.

On a déterminé un point quelconque de la section à l'aide du plan horizontal $m'\mu'$. La même remarque que précédemment donne suivant μm la tangente.

Pour trouver la grandeur de la section, on a effectué le changement de plan horizontal x_1y_1. Les points bb', cc', dd' donnent en b_1, c_1, d_1 les sommets utiles de la section dans le cylindre. Le point nn' devient n_1, et la tangente, qui avait pour projection $npn'p'$ dans le système primitif, devient n_1p_1.

Pour la section du cône, nous avons en a_1 le sommet, et en f_1 le foyer qui dans l'espace se projette verticalement en f' au milieu de $a'\omega'_1$; les tangentes aux deux points c_1 et d_1 sont c_1t_1, d_1t_1.

Enfin, on a effectué le même changement de plan pour le point

quelconque mm' qui a pour nouvelle projection horizontale m_1, avec la tangente $m_1\theta_1$.

Passons enfin à la troisième question. On a d'abord déterminé l'ombre de la base du cône sur le plan horizontal, c'est une circonférence ayant pour centre le point ee' trace de $o\omega_1 o\omega'_1$ et passant par le point o. On en déduit l'ombre du cône, en menant par le point $\sigma\sigma'$ ombre du sommet, des tangentes à l'ombre de la base. La région $\sigma\pi o\rho\sigma$ est la région demandée, ou bien la région dans l'ombre, en remplaçant le point de vue par une source lumineuse.

Pour éviter d'avoir à tenir compte du plan vertical, ce qui nécessitait la construction d'une section plane d'un cône à base circulaire, on a supposé le plan vertical transparent, et marqué la ligne de terre en ligne de construction. Enfin, nous n'avons représenté l'ombre qu'en projection horizontale.

III. — CONCOURS DE 1875.

264. — *Un tronc de cône droit s'appuie par sa grande base circulaire sur le plan horizontal de projection. Le rayon* R *de cette grande base vaut* 7^{cm} *et son centre* C *est à une distance de* 8^{cm} *de la ligne de terre. L'arête latérale du tronc a une longueur égale au rayon* R, *et fait un angle de* 45° *avec le plan horizontal. Dans l'intérieur de ce tronc de cône, et sur le même axe, est placé un petit cône renversé, dont le sommet est au point* C *et dont la base coïncide avec la base supérieure du tronc.*

Soit AB *l'arête latérale du tronc de cône qui est parallèle au plan vertical de projection, le point* A *étant sur la grande base et le point* B *sur la petite base ; on demande :*

1° *De construire les projections de l'ensemble des deux corps;*

2° *De construire les projections des sections faites dans les deux corps par un plan perpendiculaire à l'arête* AB, *au point* B ;

3° *De mener, par le point où la verticale du point* A *perce le plan, une tangente à la section faite dans le petit cône;*

4° *De trouver le point où cette tangente perce le tronc de cône.*

Solution. — Nous remarquerons que la première question

est incomplète, et qu'on ne doit pas se contenter de dire l'ensemble des deux corps, parce que dans l'exemple actuel, cet énoncé n'a aucun sens.

Dans la figure 75, planche 14, nous avons représenté la partie solide du tronc de cône extérieure au petit cône.

Il résulte de cette hypothèse, qu'en projection horizontale, on voit complétement la surface latérale du tronc de cône, ainsi que la surface intérieure du petit cône. En projection verticale, on voit la partie antérieure de la surface latérale du tronc de cône, mais on ne voit pas la surface du petit cône; aussi le contour apparent vertical $C'B'C'B'_1$ de ce petit cône est-il marqué en petits points.

Le plan sécant est parallèle au plan $A_1A'_1S'$; donc il coupe la surface latérale du tronc de cône suivant une parabole ayant pour sommet BB', et dont le foyer de la projection horizontale est en S; mBn est la partie utile de cette parabole.

Le même plan sécant $P\alpha P_1$ coupe la surface latérale du petit cône suivant une ellipse ayant pour sommets B, D, et pour foyer S. Dans l'épure, on a déterminé les deux autres sommets, à l'aide du plan horizontal p' passant par le milieu de $B'D'$.

Dans la troisième question, on demande de mener par le point aa' une tangente à la section dans le petit cône. Cette tangente est l'intersection du plan sécant avec un plan tangent au cône mené par aa'. Or le plan tangent mené par aa' est déterminé par la tangente $bcb'c'$ et la génératrice $CcC'c'$. Ces deux droites coupent le plan sécant en β et $\gamma\gamma'$. Donc $a\beta\gamma$ est la tangente demandée, son point de contact étant $\gamma\gamma'$.

Enfin, pour trouver l'intersection de cette droite avec la surface latérale du tronc de cône, par le sommet SS' et par la droite on a mené un plan dont la trace horizontale est $\delta\iota$. Le plan auxiliaire coupe donc la surface du tronc de cône suivant la génératrice $S\varphi$ qui rencontre la droite $a\iota a'\iota'$ au point demandé ff'.

Comme vérification, le point ff' doit se trouver sur la parabole. En résumé, la droite $a\iota a'\iota'$ perce le solide que nous avons représenté en ff', puis elle lui est tangente intérieurement en $\gamma\gamma'$, enfin elle sort du solide par le point $\iota\iota'$.

IV. — CONCOURS DE 1877.

265. — *On donne un point* S *dans l'espace, situé à* 45mm *au-dessus du plan horizontal, et à* 6cm *en avant du plan vertical de projection. Ce point est le sommet de deux cônes droits à base circulaire. Le premier de ces deux cônes repose par sa base sur le plan horizontal de projection, son axe est en conséquence vertical; le second cône a son axe perpendiculaire au plan vertical de projection, contre lequel il s'appuie par sa base. Le rayon de base de chacun de ces deux cônes est* 36mm. *On donne aussi un point* O *sur l'axe du second cône, entre la base et le sommet* S *et à* 17mm *de ce sommet. Cela posé, on demande :*

1° *De construire la projection de l'ensemble des deux corps;*

2° *De mener par le point* o *un plan vertical faisant un angle de* 45° *avec le plan vertical de projection, et de construire les sections faites dans les deux cônes par ce plan ;*

3° *De mener par l'un des points où la trace horizontale du plan sécant rencontre la base du premier cône, un plan tangent à ce cône ;*

4° *Enfin, de mener un plan tangent au second cône perpendiculaire à ce premier plan tangent.*

Solution. — En représentant, comme l'indique l'énoncé, la partie solide de chaque cône comprise entre le sommet et la base, la portion de base du premier cône à l'intérieur du contour apparent horizontal du deuxième cône est cachée en projection horizontale ; de même, la base du deuxième cône à l'intérieur du contour apparent vertical du second cône est cachée en projection verticale (fig. 76, pl. 14).

Soit $P\alpha P_1$ le plan sécant, il coupe le premier cône suivant une hyperbole dont on a déterminé les asymptotes. Pour cela, on a mené par le sommet SS′ un plan parallèle au plan sécant, qui coupe le cône suivant $SmS'm'$, $Sm_1S'm'_1$; puis, on a mené les plans tangents au cône suivant ces deux génératrices, ils coupent le plan sécant suivant $\mu\omega\mu'\omega'$, $\mu_1\omega\mu'_1\omega'$, qui sont les asymptotes demandés.

On a mené ensuite le plan méridien Sr perpendiculaire au plan sécant, il coupe le cône suivant la génératrice $SrS'r'$ qui

rencontre le plan sécant en cc'. Ce point cc' est un sommet de l'hyperbole.

Comme points remarquables, on a marqué le point sur le contour apparent vertical, nn', ainsi que le point oo'_1 symétrique de nn' par rapport au plan de symétrie $SrS'r'$. On a marqué aussi les deux points limites dans le plan horizontal pp', $p_1p'_1$.

Le plan sécant coupe le deuxième cône suivant une ellipse ayant pour sommets aa', $a_1a'_1$. S' est le foyer de la projection verticale, et on a déterminé les deux sommets du petit axe, à l'aide du plan de front bb_1 passant par le centre de la section.

Pour la troisième question, nous avons choisi le point p. Le plan tangent en ce point au premier cône a pour trace horizontale $p\beta$, sa trace verticale $Q_1\beta$ est parallèle à la ligne de front $SfS'f'$. On a profité de la construction de ce plan tangent, pour dessiner la tangente $p'\iota'$ à l'hyperbole.

Enfin, pour résoudre la quatrième question, on a mené par le sommet SS' une perpendiculaire $S\nu S'\nu'$ sur le plan $Q\beta Q_1$, puis par le point ν' on a mené une tangente à la base du deuxième cône; $\nu'l'k'$ est donc la trace verticale de ce deuxième plan tangent; quant à sa trace horizontale, c'est une parallèle à l'horizontale $SkS'k'$ menée par la trace horizontale hh' de $S\nu S'\nu'$.

Ici encore, on a profité du plan tangent au deuxième cône, pour dessiner la tangente $\lambda\pi\lambda'\pi'$ au point correspondant de l'ellipse.

V. — CONCOURS DE 1879.

266. — *On donne deux points* α *et* β *situés sur la ligne de terre* xy, *distants entre eux de* 175mm *et deux plans passant par ces points. (Placer le point* α *à droite du point* β, *du côté du point* y.)

Le plan $P\alpha P'$ *a pour traces deux droites telles que l'angle* $P\alpha x = 36°$, *et* $P'\alpha x = 48°$. *Le plan* $Q\beta Q'$ *est perpendiculaire au plan vertical, sa trace verticale fait avec la ligne de terre un angle* $Q'\beta y$. *Cela posé, on demande :*

1° *De prendre dans le plan* $P'\alpha P$ *un point* S_1 *situé à* 100mm *au-dessus du plan horizontal, et à* 42mm *en avant du plan vertical de projection ;*

2° *Construire les projections d'un cône circulaire droit*

ayant le point S *pour sommet, et s'appuyant par sa base sur le plan* QβQ', *le diamètre de ce cône étant égal à sa hauteur;*

3° *Mener les plans tangents à ce cône, parallèles à l'intersection des deux plans* P'αP *et* Q'βQ (fig. 77, pl. 15).

Solution. — Pour trouver le point SS', on a déterminé l'intersection du plan PαP$_1$ avec une parallèle à la ligne de terre située à 100^{mm} au-dessus du plan horizontal, et à 42^{mm} en avant du plan vertical, à l'aide du plan horizontal S'*h'*.

On a ensuite mené l'axe du cône et rabattu le plan de base, de manière à montrer le rabattement o_1 de la base ; cette base se projette horizontalement suivant une ellipse ayant pour sommets du petit axe *a* et *b*, et pour longueur du grand axe *a'b'*.

Pour trouver le contour apparent horizontal du cône, on lui a mené des plans tangents verticaux, contenant par conséquent la verticale SσS'σ'. On a donc rabattu le point $\sigma\sigma'$ en σ_1, puis mené par ce point des tangentes à la base rabattue, et enfin, on a relevé ces tangentes $\mu\sigma_1 m_1$, $\nu\sigma_1 n_1$ suivant $\mu\sigma m$, $\nu\sigma n$.

Pour résoudre la troisième question, on commence par chercher l'intersection des deux plans P et Q, en remarquant que cette droite doit passer par le point *oo'*, parce que les deux plans donnés sont rectangulaires.

Soit *codc'o'd'* la direction trouvée, on l'a rabattue sur le plan horizontal suivant co_1d_1, puis on a mené des tangentes parallèles à cette droite au rabattement de la base. Ces tangentes πp_1, εr_1 sont relevées suivant $\pi p\pi'p'$, $\varepsilon r\rho'r'$; S*p*S'*p'*, S*r*S'*r'* sont donc les génératrices de contact. Comme les deux plans tangents doivent contenir la parallèle à *cdc'd'* menée par le sommet du cône, on s'est servi de la trace verticale de cette droite, pour déterminer les traces des deux plans tangents.

Ainsi RγR$_1$ est le plan tangent suivant S*r*S'*r'*, tandis que TθT$_1$ est le plan tangent suivant S*p*S'*p'*.

267. — Remarque. — Au lieu d'employer le rabattement de la base, on aurait pu résoudre la question en se servant d'une sphère inscrite dans le cône.

VI. — CONCOURS DE 1880.

268. — *On donne :* 1° *un plan* PαP' *dont les traces font avec la ligne de terre des angles* Pαy = 45°, P'αy = 36°, *et* 2° *un point* S *situé dans ce plan, à* 42^{mm} *en avant du plan vertical*

de projection, et à 54^{mm} *au-dessus du plan horizontal. Et l'on demande :*

1° *De construire les projections d'une pyramide* SABC, *ayant pour sommet le point* S, *et s'appuyant sur le plan horizontal par sa base* ABC *(le point* A *étant le plus éloigné de la ligne de terre), au moyen des données suivantes :*

Le plan de la face ASC *est perpendiculaire au plan* PαP' *et fait un angle de* 72° *avec le plan horizontal; la face* ASB *est située dans le plan* PαP'. *L'angle plan* ASC = 75°; *l'angle plan* ASB = 66°;

2° *De mener par le centre de gravité* G *de la pyramide un plan perpendiculaire à la droite* SG, *qui joint ce centre de gravité au sommet* S, *et de construire les projections de la section faite par ce plan dans le solide* (fig. 78, pl. 15).

Solution. — On a d'abord construit le point SS', comme dans l'exemple précédent, à l'aide du plan de front S*f*, puis on a déterminé le plan SAC. Pour cela, par SS' on mène S*p*S'*p*' perpendiculaire sur le plan PαP$_1$, par cette droite, on mène un plan tangent à un cône de révolution ayant pour sommet SS', pour axe la verticale S, et pour angle à la base 72°; soit *p*A la trace horizontale de ce plan. On en déduit l'arête SAS'A'.

Ensuite, on a rabattu le plan PαP$_1$ sur le plan horizontal. La droite SAS'A' prend la position S$_3$A, d'où on déduit le rabattement S$_3$B de l'arête SB. Enfin, on a rabattu le plan SA*p* sur le plan horizontal; SAS'A' prend la position S$_2$A, d'où on déduit le rabattement S$_2$C de l'arête SC.

Pour trouver le centre de gravité du tétraèdre, on a tracé une médiane de la base ABC, dont on a pris le tiers à partir de la base; puis on a joint SωS'ω', dont on a pris le quart à partir de la base.

On a alors effectué le changement de plan vertical x_1y_1, la ligne de terre étant parallèle à SG. Dans ce système, le plan sécant est perpendiculaire au plan vertical, et on en déduit immédiatement la section $mnqrm'_1n'_1q'_1r'_1$ qui se projette verticalement suivant $m'n'q'r'$ dans le système primitif.

L'énoncé ne faisant aucune hypothèse sur l'objet à représenter, on a dessiné tout simplement le polygone sur le tétraèdre, en supposant le plan sécant transparent.

VII. — CONCOURS DE 1881.

269. — *On donne un plan* $P\alpha P_1$ *incliné de* 40° *sur le plan horizontal, et dont la trace horizontale fait avec la ligne de terre un angle de* 36°. *Un cercle, situé sur ce plan, dans le premier dièdre, est tangent aux deux traces* αP *et* αP_1, *et a pour diamètre* 54mm. *Ce cercle est la base d'un cône droit, situé au-dessus du plan* $P\alpha P_1$, *et dont la hauteur égale* 108mm. *On demande :*

1° *De construire les projections de ce cône;*

2° *De trouver les points de rencontre de ce cône avec la parallèle à la ligne de terre menée par le milieu de la hauteur ;*

3° *De mener le plan tangent au cône par le point de rencontre situé à droite* (fig. 79, pl. 16).

Solution. — Pour construire le plan de base, nous avons effectué le changement de plan vertical x_1y_1 ayant pour but de rendre le plan inconnu perpendiculaire au plan vertical. Ce changement de plan nous servira aussi pour la construction du cône. Soit $a'_1\alpha$ la trace verticale du plan de base dans le système x_1y_1, en choisissant le point aa'_1 dans le plan vertical primitif, nous en avons déduit suivant $a'\alpha$ la trace verticale inconnue $P_1\alpha$, et suivant $a_2\alpha$ le rabattement de cette trace verticale sur le plan horizontal.

La base du cône a donc pour rabattement une circonférence inscrite dans l'angle $P\alpha a_2$ et ayant pour rayon 27mm.

Soit o_2 le centre de cette circonférence, on a relevé ce point en oo' dans le plan $P\alpha P_1$.

En menant par le point oo' une perpendiculaire sur le plan $P\alpha P_1$, on a l'axe du cône, sur lequel on a porté 108mm dans le système x_1y_1, pour déterminer le sommet SS'_1, et par suite SS'.

Dans le système x_1y_1, $S'_1\alpha$ étant une génératrice principale du cône, on a mené par α une perpendiculaire sur cette génératrice, et son point de rencontre avec l'axe donne en $\omega\omega'_1\omega'$ le centre de la sphère inscrite dans le cône, et tangente à ce cône tout le long de sa base. D'ailleurs, le rayon de cette sphère est mesuré par $\alpha\omega'_1$. On s'est servi de cette sphère pour construire les contours apparents du cône, ces contours apparents étant composés des tangentes issues des projections du sommet aux contours apparents de même nom de la sphère inscrite (59).

Pour représenter le cône, il reste encore à dessiner les deux projections de la base.

En projection horizontale, la base se projette suivant une ellipse ayant pour centre le point o, pour grand axe l'horizontale du plan menée par ce point o, la longueur de ce grand axe étant égale à 54^{mm}. L'un des sommets du petit axe est le point de contact b de la circonférence de base avec la trace horizontale $P\alpha$ du plan.

En projection verticale, la base se projette aussi suivant une ellipse ayant pour centre le point o', pour grand axe la ligne de front menée par o', la longueur de ce grand axe étant encore 54^{mm}.

L'un des sommets du petit axe est le point de contact c' de la circonférence de base avec la trace verticale $P_1\alpha$ du plan; ce point c' se trouve en même temps sur la projection verticale de l'axe du cône.

Pour résoudre la deuxième question, par le sommet SS' et la droite DD', on a mené un plan dont on a cherché la trace sur le plan de base. Cette trace passe d'abord par le point oo', et ensuite par le point hh' qui est le point de rencontre des traces horizontales des deux plans, en remarquant que la trace horizontale du plan SDS'D' est la parallèle à la ligne de terre menée par la trace horizontale kk' de l'axe du cône.

La droite $oho'h'$ rencontre alors la base en deux points rabattus en $\mu_2\nu_2$, et relevés en $\mu\mu'$, $\nu\nu'$; le plan SDS'D' coupe donc le cône suivant les deux génératrices $S\mu S'\mu'$, $S\nu S'\nu'$ qui rencontrent DD' aux deux points demandés mm', nn'.

Enfin, pour répondre à la troisième question, on remarque que le plan tangent en mm' est le même que le plan tangent en $\mu\mu'$, il contient donc la tangente en $\mu\mu'$ à la directrice; or cette tangente se rabat suivant $\mu_2 t$, donc la trace horizontale du plan tangent passe par le point t qui est la trace horizontale de la tangente à la directrice. De plus, le plan étant en même temps tangent à la sphère inscrite, il est perpendiculaire sur le rayon $\omega\mu\omega'\mu'$, ce qui permet de trouver les deux traces $T\theta, T_1\theta$.

Nous avons établi la ponctuation en supposant les plans de projection et le plan de base opaques; le cône solide, limité à son sommet et à sa base; et enfin, la droite DD' de même substance que le cône.

VIII. — PROBLÈME.

270. — *On donne, dans le plan horizontal, une circonfé-rence ayant son centre* o *sur le grand axe de la feuille, à* 8^c *en avant du plan vertical, cette circonférence passe par le point* aa' *à* 5^{cm} *à gauche du centre de la feuille, et* 13^{cm} *en avant du plan vertical. La circonférence ainsi définie sert de base à un cône droit dont le demi-angle au sommet est de* 3… (fig. 80, pl. 16).

On demande : 1° *De mener la normale au cône par le milieu* mm' *de la génératrice* SaS'a' ;

2° *De mener par cette normale deux plans à* 45° *sur le plan méridien* Soa ;

3° *De construire les sections faites dans le cône par ces deux plans ;*

4° *De représenter la partie solide du cône contenue dans les deux dièdres opposés formés par les plans précédents, ces dièdres opposés devant contenir également l'axe du cône. On supposera d'ailleurs le cône limité à son sommet et à sa base.*

Solution. — Pour mener la normale au point mm', milieu de la génératrice $SaS'a'$, on a fait tourner ce point autour de l'axe, de manière à l'amener en $m_1m'_1$ sur la génératrice principale ; on a alors mené la normale en ce point $m_1m'_1$, elle rencontre l'axe au point fixe $\omega\omega'$; donc $m\omega m'\omega'$ est la normale demandée.

Comme vérification, cette normale rencontre la base du cône au point $\mu\mu'$, cette vérification tient à ce que la section méridienne du cône est un triangle équilatéral.

On a profité de l'opération précédente pour résoudre la deuxième question ; il suffit, en effet, après la rotation, de mener par la droite $m_1\omega m'_1\omega'$ deux plans faisant avec le plan vertical l'angle de 45°. On a donc effectué le changement de plan horizontal x_2y_2 qui a pour but de rendre $\omega m_1\omega' m'_1$ verticale.

Dans ce système, le plan inconnu a pour trace horizontale $m_2\alpha_2$ qui fait avec la ligne de terre l'angle donné 45° ; en effectuant le changement de plan inverse pour le point $\alpha_2\alpha'_1$, nous aurons suivant $\gamma_1\alpha_1$ la trace horizontale de l'un des plans après la rotation. Il faut donc enfin faire tourner cette trace horizon-

tale de l'angle $\mu_1 S\mu$, ce qui donne suivant $\mu\alpha$ la trace horizontale de l'un des plans dans le système primitif; la trace horizontale du deuxième plan, $\mu\beta$, est symétrique de $\mu\alpha$ par rapport au plan méridien S*oa*.

Pour résoudre la troisième question, on emploie comme plans auxiliaires, des plans passant par l'axe du cône.

De tels plans coupent le cône suivant des génératrices, et les deux plans sécants suivant des droites passant par le point fixe $\omega\omega'$.

Soit, par exemple, *cod* la trace horizontale de l'un des plans auxiliaires, ce plan coupe le cône suivant les deux génératrices $ScS'c'$, $SdS'd'$, et les deux plans sécants, suivant les deux droites $\omega\gamma\omega'\gamma'$, $\omega\delta\omega'\delta'$.

Nous obtenons en tout quatre points, mais nous n'avons marqué que les points utiles, c'est-à-dire les points compris entre le sommet et la base, soit $c_1c'_1$, $d_1d'_1$ ces deux points.

La tangente au point $d_1d'_1$ est l'intersection du plan sécant $\omega\mu\delta\omega'\mu'\delta'$ avec le plan tangent suivant la génératrice $SdS'd'$. Les traces horizontales de ces deux plans se rencontrent au point tt' qui est la trace horizontale de la tangente; $d_1td_1't'$ est donc la tangente demandée.

Comme points remarquables, on a déterminé les sommets des deux sections, en employant comme plan auxiliaire le plan méridien perpendiculaire au plan sécant; $c_1c'_1$ est l'un de ces sommets; en ce point, la tangente est parallèle à la trace horizontale du plan sécant.

Les points sur le contour apparent vertical du cône ont été obtenus en coupant par le plan méridien principal, on a ainsi trouvé les trois points utiles ee', ff', gg'.

Les deux sections passent par le point mm', et les tangentes en ce point sont précisément les deux droites $m\alpha m'\alpha'$, $m\beta m'\beta'$.

On a en outre marqué les tangentes au point $\mu\mu'$ qui appartient également aux deux courbes, on pourra vérifier que l'une de ces tangentes est dans un plan de profil, tandis que l'autre est de front.

Enfin, les points limites de la partie utile de la courbe sont avec le point $\mu\mu'$ les deux points $\nu\nu'$ et $\pi\pi'$; dans chacun des deux plans sécants, les tangentes en ces deux points sont symétriques des deux tangentes en $\mu\mu'$, par rapport aux axes des deux sections.

271. — Ponctuation. — On établit la ponctuation de la courbe sur le cône solide et conservé tout entier. La courbe est donc vue tout entière en projection horizontale; en projection verticale, les régions $e'm'd'_1g'$, $\nu'm'f'$ sont seules vues.

Chaque génératrice du cône sera conservée à partir du sommet jusqu'à son premier point de rencontre avec l'un des plans sécants, et enlevée à partir de ce point jusqu'au point de rencontre avec le deuxième plan sécant, ou avec le plan horizontal.

Les régions $e'f'$, $g'\mu'_1$ sont donc enlevées, et par suite, la région $g'\mu'_1$ de l'intersection redevient vue comme contour apparent.

La génératrice Sma étant conservée complétement, il en résulte que la région $\pi a \nu$ de la base est aussi conservée.

Les portions de traces horizontales des deux plans sécants à l'intérieur de la base du cône étant des arêtes du solide, elles sont conservées dans les régions $\pi\mu$ et $\nu\mu$, mais elles ne sont vues qu'à partir des deux points π et ν, jusqu'à la courbe, comme contours apparents.

Enfin, la normale $m\mu m'\mu'$ est conservée entre les deux points mm', $\mu\mu'$ comme arête du solide.

En projection horizontale, cette droite est cachée, puisque le sommet du cône qui se trouve au-dessus est conservé.

En projection verticale, cette même normale est vue, parce que les génératrices qui sont en avant sont enlevées.

On a indiqué les portions conservées et vues des deux plans sécants, avec des hachures dirigées suivant des horizontales, pour la projection horizontale, et suivant des lignes de front, pour la projection verticale.

IX. — CONCOURS DE 1883.

272. — *Construire la pyramide triangulaire SABC, dont la base ABC est appliquée sur la partie antérieure du plan horizontal. Le dièdre AB vaut* 69°; *le sommet B est sur la ligne de terre* xy, *et l'arête AB est perpendiculaire à* xy. *On donne en millimètres :*

$AB = 111$, $BC = 125$, $AC = 141$, $SB = 118$, $SA = 126$.

Un cercle situé sur le plan vertical dans l'angle Bs'c' *est tangent aux deux côtés de cet angle et a pour rayon* 0m036. *Ce cercle est la base d'un cylindre dont les génératrices sont*

perpendiculaires au plan vertical. Construire l'intersection de ce cylindre avec la pyramide. On indiquera les tracés effectués pour obtenir un point quelconque de l'intersection et de la tangente en ce point.

Dans la mise à l'encre, on représentera la pyramide supposée pleine et existant seule, en supprimant la portion de ce corps comprise dans le cylindre.

X. — CONCOURS DE 1884.

273. — *On donne dans le plan vertical de projection, un cercle tangent à* xy, *dont le rayon égale* 31^{mm}. *Le pentagone régulier inscrit dans ce cercle, et dont un sommet A est sur* xy, *est la base d'un prisme droit. Un cône droit, dont le sommet est situé dans le plan de profil du point A, à* 84^{mm} *au-dessus du plan horizontal et à* 69^{mm} *en avant du plan vertical, a pour base, sur le plan horizontal, un cercle dont le rayon est de* 60^{mm}. *On demande l'intersection du cône et du prisme. On indiquera le tracé des constructions effectuées pour trouver un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.*

Dans la mise à l'encre, on représentera la portion du prisme qui est contenue dans le cône.

XI. — CONCOURS DE 1885.

274. — *On donne dans le premier dièdre un point A dont la cote* $\alpha a'$ *est* 19^{mm} *et dont l'éloignement* αa *est* 22^{mm}, *et un point G dont la cote* $\gamma g'$ *est* 53^{mm}, *dont l'éloignement* γg *est* 48^{mm} *et dont la distance au plan du profil A vers la droite est de* 52^{mm}. *La droite AG est une diagonale du parallélipipède rectangle dont une face est horizontale, une autre parallèle au plan vertical. Trouver : 1° les projections du parallélipipède ; 2° celles de la sphère qui lui est circonscrite.*

Par les milieux M, N, P des trois arêtes DH, BC, EF (ABCD est la face inférieure, EFGH en tournant dans le même sens la face supérieure du parallélipipède) on fait passer un plan; trouver les intersections de ce plan avec le parallélépipède avec la sphère, et les vraies grandeurs de ces sections.

Pour la mise à l'encre, on supprimera la portion de la sphère située au-dessus du plan sécant, et la portion du parallélépipède située au-dessous.

XII. — CONCOURS DE 1886.

275. — *On donne un point A sur la ligne de terre, un point* S *distant du plan horizontal de* 78^{mm}, *du plan vertical de* 51^{mm} *et du point A de* 124^{mm}. *Construire le tétraèdre SABC, dont la base ABC est sur le plan horizontal de projection, sachant que le plan BSC est perpendiculaire à l'arête SA, et que les angles dièdres AB et AC valent chacun* 68°. *On aura soin de placer le point A le plus à gauche possible.*

Construire l'intersection de cette pyramide avec le cylindre de révolution qui a SA pour axe et pour rayon 55^{mm}.

Dans la mise à l'encre, on supposera que le tétraèdre est seul et que le solide commun au cylindre et à la pyramide est enlevé.

XIII. — CONCOURS DE 1887.

276. — *Un tétraèdre SABC a sa base ABC sur le plan horizontal* $aa' = 84^{mm}$, $a'b' = 99^{mm}$ (*vers la droite*) $ab = 112^{mm}$ ($bb' < aa'$), $bc = 144^{mm}$, $ac = 171^{mm}$. (*Le sommet* c *est à droite de* a), *L'arête SA parallèle au plan vertical égale* 136^{mm} *et fait avec l'arête AB un angle de* 62°. *On demande : 1° de construire le tétraèdre ; 2° de mener la droite DE perpendiculaire commune aux deux arêtes opposées SA et SC.*

Du point O, milieu de DE, comme centre, on décrit une sphère avec un rayon égal à 22^{mm} ; *mener à cette sphère deux plans tangents perpendiculaires à l'arête SC, et construire l'intersection de ces deux plans avec le tétraèdre.*

Dans la mise à l'encre, on ne conservera que la partie du tétraèdre comprise entre les deux plans.

XIV. — CONCOURS DE 1888.

277. — *Un tétraèdre SABC dont la face ABC est située sur le plan horizontal, est déterminé de la manière suivante : le sommet S a pour cote* 70^{mm} *et pour éloignement* 30^{mm}. *L'arête SA est dans un plan de profil est le point A a pour éloignement* 115^{mm}. *La face SBC (B à gauche) est parallèle au plan vertical. Les faces SAB et SAC font chacune avec le plan qui contient l'arête SA un angle de* 45°. — *Sur l'arête SB on*

prend, entre S et B, un point D à 20mm du sommet S, et par ce point D on mène un plan perpendiculaire à l'arête SB; ce plan coupe SC en E et SA en F.

1° *Construire les projections du triangle DEF;*

2° *On considère la sphère qui a DE pour diamètre; représenter le solide commun à cette sphère et au tétraèdre.*

XV. — CONCOURS DE 1889.

278.— *On donne un plan PαP', dont les traces font avec la ligne terre* xy (x *à gauche*, y *à droite) deux angles P*αy *et P'*αy *égaux chacun à 45°; sur la trace horizontale un point A dont l'éloignement est 40mm, et sur la trace verticale un point B dont la côte est 62mm. Là droite AB est le côté d'un carré situé dans le plan PαP', à droite de AB; ce carré est la base d'un cube situé au-dessus du plan.*

Construire l'intersection de ce cube avec le cylindre droit ayant pour trace verticale un cercle de 65mm de rayon, situé au dessus de la ligne de terre et tangent à cette ligne de terre au point a', *projection verticale du point A.*

On représentera la partie du solide cubique comprise dans le cylindre.

XVI. — CONCOURS DE 1890.

279.—*Un cône de révolution a pour base sur le plan horizontal un cercle O de 50mm de rayon, tangent à la ligne de terre et il a une hauteur de 112mm. On mène : 1° par le milieu A de la génératrice de front (celle de gauche), le plan parallèle au plan tangent au cône suivant la génératrice opposée; 2° la normale au cône en A qui rencontre le plan horizontal en B, les tangentes BC et BD au cercle O et enfin les plans ABC et ABD.*

On demande de représenter par ses projections le solide commun au cône et au tétraèdre que forment le plan horizontal et les trois plans précédents.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE I

LIVRE II

LIVRE III. — PLANS TANGENTS AUX CONES ET AUX CYLINDRES

LIVRE IV. — SURFACES DE RÉVOLUTION

LIVRE V. — DE LA SPHÈRE

LIVRE VI

LIVRE VII. — COMPOSITIONS DONNÉES A L'ÉCOLE DE SAINT-CYR.

FIN DE LA TABLE.

5812. — ABBEVILLE, TYP. ET STÉR. A. RETAUX.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

GÉOMÉTRIE COTÉE

COURS COMPLET
DE
Mathématiques Élémentaires

A L'USAGE DES CANDIDATS

Aux Baccalauréats et aux Écoles du Gouvernem

PAR MM. **E. COMBETTE**
Ancien élève de l'École normale supérieure, ancien professeur de mathématiques au lycée Saint-Louis, Inspecteur général

J. CARON
Ancien élève de l'École normale supérieure, professeur au lycée St-Louis

P. PORCHON
Ancien élève de l'École normale supérieure, prof. au lycée de Versailles

A. REBIÈR
Ancien élève de l'École
superieure,
professeur au lycée St-L

Cours d'arithmétique, par E. COMBETTE. 1 vol. in-8, 8ᵉ édition... 6 fr.
Cours abrégé d'arithmétique, par *le même*. 1 vol. in-8, 4ᵉ éd. 2 fr. 80
Cours d'algèbre élémentaire, par *le même*. 1 vol. in-8, 6ᵉ édition. 10 fr.
Cours abrégé d'algèbre élémentaire, par *le même*. 1 volume in-8, 5ᵉ édition................. 4 fr. 50
Cours de géométrie élémentaire, par *le même*. 1 vol. in-8, avec 572 figurés, 6ᵉ édition.............. 10 fr.
Cours abrégé de géométrie élémentaire, par le *même*. 1 vol. in-8, avec 425 figures........... 4 fr. 50
Cours de mécanique élémentaire, à l'usage des candidats aux écoles du Gouvernement, par *le même*. 1 vol. in-8, avec 235 figures, 5ᵉ édition.... 5 fr.
Cours de statique, à l'usage des classes de mathématiques élémentaires, par *le même*. 1 vol. in-8, av. fig., 2ᵉ édit. 3 fr.
Cours de trigonométrie, à l'usage des aspirants au baccalauréat ès lettres mathématiques, suivi de compléments pour les candidats aux grandes Écoles de l'État (Saint-Cyr, École navale, École centrale, École polytechnique), par E. COMBETTE. 1 v. in-8, av. fig., 2ᵉ éd. 4 fr.

Cours de trigonométrie élé[men]taire, par A. REBIÈRE. 1 vol. in-8, figures, nouvelle édition.... 3 [fr.]
Cours de cosmographie, par P[OR]CHON. 1 vol. in-8, avec 174 fig[ures], 4 planches hors texte, 4ᵉ édition.
Cours de géométrie descri[ptive] (*ligne droite et plan*), par J. CA[RON]. 1 volume in-8, avec atlas de 18 [plan]ches, 6ᵉ éd. revue et augmentée.
Cours de géométrie descri[ptive] (*cônes, cylindres, sphères*), par J. [CA]RON. 1 vol. in-8, avec un atlas [de] 18 planches gravées sur cuivre, 2ᵉ [éd.] Broché......................
Cours de géométrie descri[ptive] (*géométrie cotée*), par J. CARON. 1 [vol.] in-8, avec 208 figures dans le texte, à l'usage des candidats à l'École spé[ciale] militaire de Saint-Cyr.........
Cours de cosmographie et topographie, par E. COMBE[TTE et] P. PORCHON. 1 vol. in-8, avec 17[.] dans le texte et 6 planches lithogra[phiées] hors texte, 2ᵉ édit. Broché.. 3 [fr.]
Compléments du Cours d'algè[bre] et Notions de géométrie [ana]lytique, par E. COMBETTE. 1 vol. i[n-8,] avec 124 figures dans le texte.

Tous ces ouvrages en cartonnage anglais, 1 fr. de plus par volume.

Autres ouvrages à l'usage
DES ÉLÈVES DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES
(*Préparation à l'École militaire de Saint-Cyr.*)

Précis de géographie physique, politique et militaire, à l'usage des [can]didats aux écoles militaires et aux baccalauréats, par M. Louis BOUGIER, profe[sseur] agrégé d'histoire au collège Rollin. 1 vol. in-12, 4ᵉ édit., avec 72 cartes da[ns le] texte et hors texte. Cartonné..................................... 7

Précis d'histoire des temps modernes (1589-1889), à l'usage des cand[idats] aux écoles militaires et aux baccalauréats, par M. DHOMBRES, proviseur du l[ycée] de Versailles. 1 vol. in-12, 4ᵉ édition. Broché, 3 fr. 50. Cartonné.......... 4

Lectures sur l'Histoire contemporaine, par H. SALOMON, profes[seur au] lycée Henri IV. 1 vol. in-12, cartonné à l'anglaise.............................. 3 fr.

Éléments de philosophie scientifique et de philosophie morale, s[uivis] de sujets de dissertation, par P.-F. THOMAS, docteur ès lettres, professeur de [philo]sophie au lycée de Versailles. 1 vol. in-8. Broché, 3 fr. 50. Cartonné...... 4 fr.

6624. — L.-Imprimeries réunies, rue Mignon, 2 Paris.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

GÉOMÉTRIE COTÉE

A L'USAGE

DES CANDIDATS A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE DE SAINT-CYR

(Programme de 1896)

PAR

J. CARON

Ancien élève de l'Ecole normale supérieure
Agrégé des sciences mathématiques
Directeur des travaux graphiques à l'Ecole normale supérieure
Professeur de géométrie descriptive

Avec 208 figures dans le texte

PARIS

ANCIENNE LIBRAIRIE GERMER BAILLIÈRE ET C[IE]

FÉLIX ALCAN, ÉDITEUR

108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 108

1898

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

GÉOMÉTRIE COTÉE

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1. — La géométrie descriptive, dont la géométrie cotée n'est qu'une forme particulière, a pour but l'étude des figures de l'espace, en ramenant cette étude à celle des figures planes.

La méthode de transformation employée pour arriver à ce résultat s'appelle la méthode des *projections*.

2. — **Définitions.** — *On appelle projection conique d'un point* A *sur un plan* P, *par rapport à un centre de projection* O, *le point de rencontre* a *du plan* P *avec la projetante* Oa *qui joint le point donné au centre de projection.*

Le point *a* s'appelle aussi la *perspective aérienne* du point A, en prenant comme point de vue le point O et pour plan du tableau le plan P.

3. — *On appelle projection oblique d'un point* A *sur un plan* P, *parallèlement à une direction donnée* D, *le point de rencontre* a *du plan* P *avec la parallèle à la direction donnée* D *menée par le point* A.

Cette projection oblique s'appelle aussi *perspective cavalière* du point A sur le plan P.

4. — Enfin, *on appelle projection orthogonale d'un point* A *sur un plan* P *le pied* a *de la perpendiculaire abaissée du point* A *sur le plan* P.

5. — Ainsi les projections orthogonales sont un cas particulier des projections obliques, qui à leur tour sont un cas particulier des projections coniques.

6. — **Ombres.** — Les définitions précédentes s'appliquent également aux ombres. Ainsi, l'ombre portée par un point A éclairé par une source lumineuse placée en O, dans le cas de l'ombre au flambeau, sur un plan P, c'est le point de rencontre *a* du plan P avec le rayon lumineux O*a* qui passe par le point donné.

De même, dans le cas de l'ombre au soleil, l'ombre portée par un point A sur un plan P, c'est la trace *a* sur le plan P de la parallèle aux rayons lumineux menée par le point de l'espace A.

7. — Les définitions des projections montrent que la projection d'un point est toujours déterminée; mais, inversement, étant donnée en *a* la projection conique d'un point de l'espace, on sait tout simplement que le point se trouve sur la projetante O*a*; il est donc nécessaire, pour déterminer complètement le point, de se donner une condition de plus.

On peut, par exemple, définir le point à l'aide d'une deuxième projection dans un deuxième système différent du premier. Dans ce cas le point de l'espace sera à l'intersection des deux projetantes déterminées par ses deux projections connues.

On peut aussi définir le point à l'aide d'une seule projection et de sa distance au plan de projection, comptée sur la projetante, distance que l'on inscrit en chiffres à côté de la projection du point, et que l'on appelle la cote du point lorsqu'on emploie des projections orthogonales.

8. — De là deux méthodes distinctes pour définir un point de l'espace : 1° la méthode des deux plans de projection; 2° la méthode des plans cotés. Mais il faut bien se mettre dans l'esprit que ces deux méthodes ont plus d'un point commun, les théorèmes de géométrie dont nous aurons à nous servir dans l'une ou

l'autre méthode étant absolument indépendants de la façon de les appliquer. Certaines constructions peuvent être plus simples en géométrie cotée que dans la méthode des deux plans de projection ou réciproquement. Le mieux est donc de s'exercer à passer arbitrairement d'un système à l'autre, ce qui permettra dans la suite, suivant la nature de la question, d'employer le procédé le plus avantageux.

C'est donc à ce point de vue que nous chercherons à nous placer dans la suite de ce livre, tout en donnant plus d'importance à la méthode des plans cotés, comme semblent l'indiquer la lettre et l'esprit du programme.

LIVRE I

POINT — DROITE — PLAN

CHAPITRE PREMIER

I. — REPRÉSENTATION DU POINT.

9. — Dans la méthode des deux plans de projection, on emploie généralement deux plans de projection rectangulaires, et pour les distinguer l'un de l'autre on les appelle : le premier, plan horizontal ; l'autre, le plan vertical.

L'intersection des deux plans de projection est la ligne de terre, que l'on représente par les lettres x, y, écrites de droite à gauche, pour un observateur placé debout sur le plan horizontal et regardant le plan vertical.

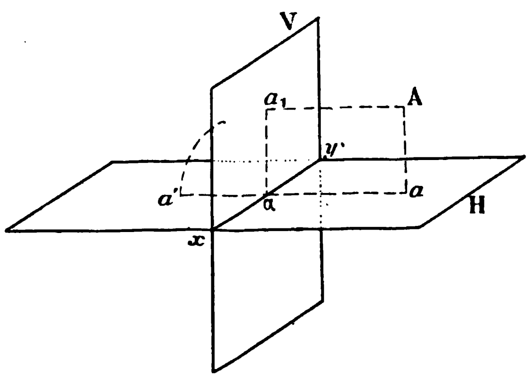


Fig. 1.

Soit A un point de l'espace (fig. 1), nous le projetons orthogonalement en a sur le plan horizontal et en a_1 sur le plan vertical.

En répétant la même opération successivement pour tous les points d'une figure de l'espace, on a donc substitué à cette figure de l'espace deux figures planes.

Pour obtenir une seule figure plane qui constitue l'épure, il ne reste plus qu'à rabattre le plan vertical sur le plan horizontal, c'est-à-dire que nous faisons tourner le plan vertical autour de xy d'un angle droit, de façon à le faire coïncider avec le plan horizontal. Après ce rabattement, le point a_1 est venu en a', de sorte que l'épure d'un point se compose d'une ligne droite, la ligne de terre xy, et de deux points a, a' placés de part et d'autre de xy (fig. 2).

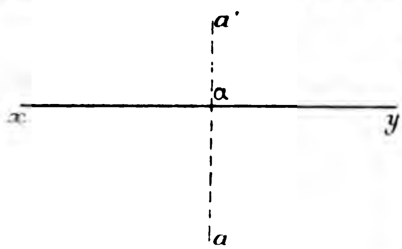


Fig. 2.

Ce qui précède montre que nous donnons aux deux projections d'un point le même nom, en accentuant la projection verticale, et pour désigner le point dans l'épure on nomme ses deux projections a, a'.

Ajoutons que, le rabattement précédent pouvant s'effectuer de deux façons différentes, on est convenu d'amener la partie supérieure du plan vertical à coïncider avec la région postérieure du plan horizontal.

10. — THÉORÈME. — *Dans toute épure les deux projections d'un point sont sur une même ligne de rappel, c'est-à-dire sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

En effet, les deux projetantes Aa, Aa_1 (fig. 1) étant perpendiculaires sur les deux plans de projection, elles forment un plan A$a\alpha a_1$ perpendiculaire simultanément sur les deux plans de projection, et par suite sur leur intersection xy.

Donc les deux droites $a\alpha$, $a_1\alpha$ sont perpendiculaires sur xy. Il en est de même après le rabattement du plan vertical sur le plan horizontal, et par suite, dans l'épure, $a\alpha$ et $a'\alpha$ forment une seule droite perpendiculaire sur xy.

11. — Réciproque. — *Étant donnés, dans une épure, deux points* a, a' *sur une même ligne de rappel* (fig. 2), *on peut toujours considérer ces deux points comme les projections d'un point unique et parfaitement déterminé dans l'espace.*

En effet, relevons le plan vertical, de façon à reconstituer l'objet. La droite $a'\alpha$ vient prendre la position $a_1\alpha$ (fig. 1) en restant perpendiculaire sur la ligne de terre. Nous formons ainsi le plan $a\alpha a_1$ perpendiculaire sur la ligne de terre, et par suite sur les deux plans de projection. Il en résulte que les deux projetantes déterminées par les deux projections connues sont contenues toutes deux dans le plan $a\alpha a_1$, et par suite elles se rencontrent en un point unique et parfaitement déterminé A.

12. — THÉORÈME. — *Dans toute épure, la distance de la projection verticale d'un point à la ligne de terre représente la distance du point au plan horizontal, c'est-à-dire la cote du point.*

En effet (fig. 1), le quadrilatère $Aa\alpha a_1$ est un rectangle, car les angles en a et a_1 sont droits, puisqu'on emploie des projections orthogonales; de même, l'angle en α est droit aussi, puisque les deux plans de projection sont rectangulaires.

On a donc : $a'\alpha = a_1\alpha = Aa$.

Ainsi, dans l'épure, $a'\alpha$ représente la hauteur du point au-dessus du plan horizontal; autrement dit, $a'\alpha$ est la cote du point. Quand le point est au-dessus du plan horizontal, sa projection verticale est au-dessus de la ligne de terre, et l'on dit qu'il a une cote positive. Si le point était au-dessous du plan horizontal, sa projection verticale serait au-dessous de la ligne de terre, et sa cote serait négative.

On appelle de même éloignement d'un point sa distance au plan vertical Aa_1 (fig. 1). Un raisonnement analogue au précédent montre que, dans l'épure, l'éloignement est mesuré par la distance $a\alpha$ (fig. 2) de la projection horizontale du point à la ligne de terre.

13. — En géométrie cotée, comme nous l'avons dit, on définit le point de l'espace par sa projection horizontale et sa cote, que l'on inscrit en chiffres auprès de la projection du point. Ainsi (fig. 3), le point a (5) se trouve sur la verticale a à une distance au-dessus du plan horizontal égale à 5 unités de l'échelle du dessin. Remarquons donc que toute épure de plans cotés doit être accompagnée d'une échelle, que l'on figure au bas du dessin et sur laquelle sont comptées les cotes de tous les points.

Presque toujours on suppose le plan horizontal de comparaison

suffisamment bas au-dessous de l'objet à représenter pour que tous les points de cet objet aient des cotes positives.

14. — Si nous voulons maintenant passer de la méthode des plans cotés à celle des deux plans de projection, il suffit de figurer une ligne de terre quelconque *xy*, et de porter sur la perpendiculaire à *xy* menée par *a* (fig. 3), à partir de *xy* et au-dessus de *xy*, une longueur *a'α* égale à 5 unités de l'échelle du dessin.

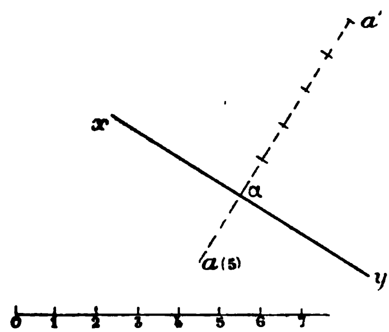


Fig. 3.

Réciproquement, étant donné le point *aa'* dans le système de plans de projection *xy*, pour déterminer ce point en plans cotés, il suffira d'inscrire près de *a* la valeur 5 de *a'α* mesurée sur l'échelle du dessin.

II. — POINTS REMARQUABLES.

15. — En géométrie cotée, les points remarquables sont ceux qui sont contenus dans le plan horizontal ; ils sont caractérisés par leur cote qui est nulle.

Si l'on avait deux plans de projection, un tel point du plan horizontal aurait sa projection verticale sur la ligne de terre. Il y aurait de plus ici à considérer, comme points remarquables, les points du plan vertical qui se projettent horizontalement sur la ligne de terre, parce que leurs éloignements sont nuls.

On aurait aussi les points dans les plans bissecteurs des dièdres formés par les plans de projection, pour lesquels la cote est égale à l'éloignement ; de telle sorte que, si le point se trouve dans le premier plan bissecteur, ses deux projections sont symétriques par rapport à la ligne de terre, tandis que, s'il est dans le second plan bissecteur, ses deux projections sont confondues.

III. — POINTS A COTE RONDE.

16. — On appelle points à cote ronde ceux dont la cote est figurée par un nombre entier : *a* (5), *b* (22), etc., sont des points à cote ronde.

CHAPITRE II

I. — REPRÉSENTATION DE LA DROITE.

17. — On appelle projection d'une ligne le lieu des projections de tous les points qui composent la ligne. Les projetantes des différents points de la ligne forment un cône dans le cas des projections coniques, ou un cylindre dans le cas des projections obliques ou orthogonales, qu'on appelle le cône ou le cylindre projetant de la ligne. En résumé, la projection d'une ligne est la trace sur le plan de projection de son cône ou de son cylindre projetant.

18. — **THÉORÈME.** — *La projection d'une droite est généralement une ligne droite.*

En effet, le cône projetant d'une droite, étant engendré par une ligne droite passant par un point fixe qui est le sommet du cône, et s'appuyant sur une droite fixe, se réduit généralement à un plan dont la trace sur le plan de projection est toujours une ligne droite.

Ce théorème est en défaut lorsque la droite passe par le centre de projection. Dans ce cas, les projetantes des différents points de la droite coïncident toutes avec la droite elle-même et, par suite, la projection de la droite se réduit à un point qui est la trace de la droite sur le plan de projection.

La même exception se présente dans le cas des projections obliques ou orthogonales, lorsque la droite est parallèle à la direction suivant laquelle on projette. Ainsi, toute verticale a sa projection horizontale réduite à un point.

19. — *Dans l'espace, une droite est toujours déterminée par deux de ses points.*

Soit donc aa', bb' les deux points qui définissent une droite ;

le théorème précédent nous donnera pour projection horizontale de la droite *ab* et pour projection verticale *a'b'*.

Autrement dit, les deux projections d'une droite s'obtiennent en joignant par deux droites les projections de même nom des deux points qui la déterminent.

De même, soit en projection cotée les points *a* (15), *b* (36) les deux points qui déterminent une droite. La projection horizontale de cette droite est la ligne droite *ab*.

20. — Cas particulier. — Lorsque les deux points qui définissent la droite ont la même projection horizontale *ab*, la droite est alors verticale, et sa projection horizontale (18) se réduit au point unique *a*, *b*, tous les autres points de la droite se projetant horizontalement au même point *a*, *b*.

21. — PROBLÈME. — *Déterminer un point d'une droite.*

Soit, dans une épure ordinaire, AA' les deux projections d'une droite et *m* la projection horizontale d'un point de cette droite, proposons-nous de trouver sa projection verticale.

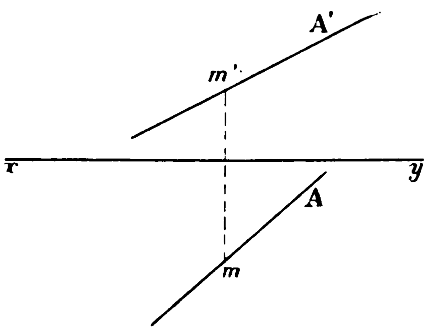


Fig. 4.

Il suffit pour cela de mener la ligne de rappel passant par *m* (10), elle coupe A' au point demandé *m'* (fig. 4).

Une méthode identique permet de résoudre la même question en géométrie cotée.

Soit *a* (5), *b* (2,25) les deux points qui définissent une droite et *m* la projection horizontale d'un point de cette droite (fig. 5). Bien entendu, le point *m* se trouve sur *ab*. Nous nous proposons de déterminer la cote du point *m*. Pour cela, nous prenons comme ligne de terre *xy* la droite *ab*, par exemple. Les points *a*, *b* se projettent verticalement en *a'*, *b'* sur les lignes de rappel *aa'*, *bb'*, à des distances au-dessus de *xy*, *aa'*, *bb'* égales respectivement à 5 et à 2,25 unités de l'échelle du dessin; *a'b'* est donc la projection verticale auxi-

liaire de la droite et, par suite, le point m se projette verticalement en m' sur $a'b'$.

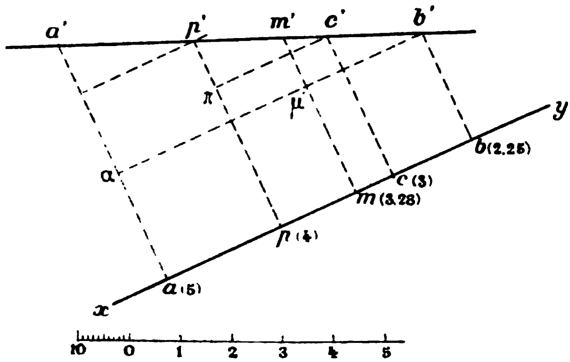


Fig. 5.

En résumé, la cote de m est mesurée par mm' sur l'échelle du dessin.

Il est bon de remarquer que la valeur numérique de la cote ainsi obtenue est indépendante de l'unité employée pour former l'échelle du dessin.

On peut aussi arriver au même résultat de la façon suivante : les triangles semblables $b'm'\mu$, $b'a'\alpha$ donnent :

$$\frac{m'\mu}{a'\alpha} = \frac{b'\mu}{b'\alpha};$$

d'où :

$$m'\mu = \frac{a'\alpha}{b'\alpha} \times b'\mu,$$

et par suite :

$$mm' = bb' + \frac{a'\alpha}{b'\alpha} \times b'\mu,$$

ou :

$$mm' = bb' + \frac{a'\alpha}{b'\alpha} \times mb = 2,25 + \frac{2,75}{6,50} \times 2,45 = 3,28.$$

22. — PROBLÈME. — *Trouver sur une droite un point de cote donnée.*

Soit, comme dans l'exemple précédent, a (5), b (2,25) les deux points qui déterminent la droite (fig. 5), et proposons-nous de déterminer le point de cette droite ayant pour cote (4). En prenant

toujours comme plan vertical de projection le plan vertical xy, il suffit, pour trouver le point, de prendre l'intersection de la projection verticale $a'b'$ de la droite avec une parallèle à xy à une distance au-dessus de xy égale à 4 unités de l'échelle du dessin. On obtient ainsi le point p' qui se projette horizontalement en p.

La formule précédente permet aussi d'arriver au même résultat en évitant de tracer la projection verticale et en remplaçant cette projection verticale par un calcul numérique. Pour le point m, on avait :

$$\frac{b'\mu}{b'\alpha} = \frac{m'\mu}{a'\alpha};$$

d'où :

$$b'\mu = b'\alpha \times \frac{m'\mu}{a'\alpha} = ab \times \frac{mm' - bb'}{aa' - bb'} = bm.$$

Pour le point p on aura également :

$$bp = ab \times \frac{pp' - bb'}{aa' - bb'} = \frac{6{,}5 \times 1{,}75}{2{,}75} = 4{,}1.$$

La construction ou le calcul précédents permettent de trouver sur la droite les points à cote ronde ; p, par exemple, étant le point de cote (4). L'ensemble des points à cote ronde constitue l'échelle de la droite. Cette échelle permet de trouver approximativement un point de cote donnée, cette cote n'étant pas mesurée par un nombre entier. Dans l'exemple actuel, la différence de cote entre les deux points a et p étant 1, on aura le point ayant pour cote (3) en portant la longueur ap à partir de p une fois dans le sens pb, ce qui donne le point c (3).

II. — INTERVALLE-MODULE. — PENTE.

23. — INTERVALLE-MODULE. — On appelle intervalle ou module d'une droite la distance comptée sur la projection horizontale avec l'échelle du dessin entre deux points successifs à cote ronde.

Autrement dit, l'intervalle est la distance que décrit la projection horizontale d'un point de la droite lorsque sa cote augmente d'une unité.

Ainsi (fig. 5), pc est l'intervalle ou le module de la droite ; il vaut 2,4.

24. — PENTE. — *On appelle pente d'une droite la tangente de l'angle que fait cette droite avec le plan horizontal, c'est-à-dire avec sa projection horizontale.*

Dans le système xy (fig. 5), la droite $aba'b'$ est dans le plan vertical ; sa projection horizontale coïncide avec la ligne de terre ; donc l'angle de la droite $aba'b'$ avec le plan horizontal est mesuré par l'angle de sa projection verticale avec la ligne de terre. Autrement dit, c'est l'angle $a'b'\alpha$ ou $p'c'\pi$.

La tangente de cet angle $b'c'\pi$ est égale à $\frac{p'\pi}{c'\pi}$.

Or $p'\pi$ est égale à 1 ; $c'\pi$ est le module de la droite ou l'intervalle ; donc la pente p est l'inverse du module m ou de l'intervalle i :

$$p = \frac{1}{i} = \frac{1}{m}.$$

III. — DROITES PARALLÈLES.

25. — THÉORÈME. — *En employant des projections obliques ou orthogonales seulement, deux droites parallèles ont leurs projections sur un même plan parallèles entre elles.*

En effet, les plans projetants des deux droites, étant menés respectivement par les deux droites qui sont parallèles et parallèlement à une même direction, sont eux-mêmes parallèles entre eux, et par suite les traces de ces deux plans sur le plan de projection, c'est-à-dire les projections de même nom des deux droites, sont parallèles.

26. — Réciproque. — *Deux droites ayant leurs projections de même nom parallèles entre elles dans deux systèmes différents sont elles-mêmes parallèles entre elles.*

En effet, si nous considérons d'abord les projections horizontales des deux droites, par hypothèse elles sont parallèles ; donc les plans projetant horizontalement les deux droites sont eux-mêmes parallèles entre eux. Il en est de même pour les plans projetant verticalement les deux droites. Il en résulte que les

quatre plans projetants des deux droites forment un prisme dont les quatre arêtes latérales sont parallèles.

Or les deux droites données sont précisément deux des arêtes de ce prisme; elles sont donc bien parallèles.

Cette réciproque suppose, bien entendu, que chaque droite est déterminée par ses deux projections.

27. — THÉORÈME. — *Deux droites parallèles ont leurs projections horizontales parallèles; elles ont de plus le même module, les échelles des deux droites étant comptées dans le même sens.*

La première partie de ce théorème a déjà été démontrée précédemment. De plus, les deux droites font évidemment le même angle avec le plan horizontal; donc leurs pentes sont égales, et par suite leurs modules sont aussi égaux en valeur numérique et algébrique.

IV. — DROITES REMARQUABLES.

28. — Les droites remarquables sont les droites parallèles ou perpendiculaires aux plans de projection.

Une *horizontale*, c'est-à-dire une parallèle au plan horizontal, a tous ses points à la même distance au-dessus du plan horizontal; donc la projection verticale d'une horizontale est parallèle à la ligne de terre.

En géométrie cotée, une horizontale a sa projection horizontale quelconque, et tous ses points ont la même cote.

De même une *ligne de front*, c'est-à-dire parallèle au plan vertical, a sa projection horizontale parallèle à la ligne de terre.

Une *verticale* a sa projection horizontale réduite à un point et sa projection verticale perpendiculaire sur la ligne de terre. En géométrie cotée, une telle droite a sa projection horizontale réduite aussi à un point sans cote.

Enfin une *ligne de bout*, c'est-à-dire perpendiculaire au plan vertical, a sa projection verticale réduite à un point et sa projection horizontale perpendiculaire à la ligne de terre.

V. — INTERSECTION DE DEUX DROITES.

29. — Pour que deux droites définies par leurs projections se rencontrent, il faut et il suffit que les points de rencontre des projections de même nom se trouvent sur une même ligne de rappel. Quand la vérification ne peut pas se faire, on joint un point quelconque de la première droite à un point quelconque de la seconde, ce qui donne une nouvelle droite s'appuyant sur les deux premières. On répète la même construction une deuxième fois, et les deux droites ainsi obtenues doivent se rencontrer.

30. — En géométrie cotée, pour reconnaître si deux droites se coupent, il suffit de vérifier que les points des deux droites qui se projettent horizontalement au point de rencontre de leurs projections horizontales ont la même cote.

On peut aussi remplacer les deux droites données par deux autres droites s'appuyant sur les deux premières. On choisit, par exemple, deux horizontales qui s'obtiennent en joignant par des droites les points de même cote des deux droites données. Ces horizontales, devant se trouver dans le même plan, doivent être parallèles.

31. — **Cas particulier**. — Lorsque les deux droites données ont la même projection horizontale *ab*, *cd*, on est alors certain qu'elles se rencontrent, puisqu'elles sont contenues dans le même plan vertical. Pour trouver le point de rencontre, on peut prendre comme ligne de terre *xy* la droite *abcd*. Dans ce système, les points *a*,*b*,*c*,*d*, se projettent verticalement sur des perpendiculaires à *xy*, menées par *a*,*b*,*c*,*d*, à des distances *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'* au-dessus de *xy* égales aux cotes connues des points.

Ces cotes peuvent être mesurées avec l'échelle du dessin ou avec une échelle quelconque.

Les projections verticales *a'b'*, *c'd'* se coupent au point *m'*, que l'on projettera horizontalement sur *abcd* au point demandé *m*. Quant à la cote du point *m*, elle sera mesurée par *mm'*, en ayant soin d'employer la même échelle qui a servi pour les points *a*, *b*, *c*, *d*.

VI. — PONCTUATION.

32. — Étant donné un point M appartenant à un objet quelconque, pour reconnaître si ce point est vu par un observateur

placé en O, on doit figurer le rayon visuel OM passant par le point; déterminer ensuite tous les points de rencontre de ce rayon visuel OM avec l'objet à représenter. En général, celui de tous ces points de rencontre qui est le plus rapproché de l'œil de l'observateur O est le seul vu et cache tous les autres.

Lorsque l'objet à représenter est une surface, la règle précédente est toujours vraie; mais il n'en est pas toujours de même lorsque l'objet à représenter est un solide.

On appelle intersection d'une droite et d'un solide les points de rencontre de cette droite avec la surface du solide.

Ces points déterminent, sur la droite, des segments qui sont alternativement à l'intérieur du solide ou à l'extérieur.

Soit, par exemple, M, N, P, R ces différents points et soit, de plus, O, M, N, P, R l'ordre dans lequel on rencontre ces différents points en se déplaçant de gauche à droite sur le rayon visuel OM.

La droite peut alors se trouver dans le solide depuis M jusqu'à N et de P à R. Dans ce premier cas, le point M est vu par l'observateur placé en O et cache tousles autres points.

Ou bien, la droite se trouve dans le solide de l'infini à gauche jusqu'à M, puis de N à P et enfin de R jusqu'à l'infini à droite.

Dans ce deuxième cas tous les points évidemment sont cachés, puisque l'observateur lui-même se trouve dans le solide.

Pour établir la ponctuation d'une projection horizontale, on suppose l'observateur à l'infini au-dessus du plan horizontal.

33. — EXEMPLE. — Étant donnée une droite A par sa projection et son échelle, représenter le système formé par cette droite illimitée et le plan horizontal réduit à sa surface opaque illimitée.

Le plan horizontal est évidemment vu tout entier, et l'on a à établir uniquement la ponctuation de la droite. La limite entre les parties vues et cachées de cette droite par le plan horizontal est l'intersection de la droite avec ce plan horizontal *h* (fig. 6). Considérons sur la droite un point

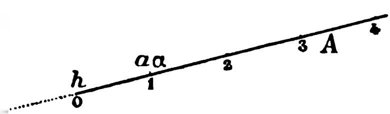


Fig. 6.

quelconque, par exemple *a* de cote (1). La verticale, ou bien le rayon visuel passant par ce point, coupe la droite au point *a* de

cote 1 et le plan horizontal au point *α* de cote (0); donc le point *a* est vu et par suite la droite est vue en projection horizontale depuis le point limite *h* jusqu'à l'infini dans le sens des cotes positives *ha*. Au contraire, de l'autre côté de *h*, la droite est cachée au-dessous du plan horizontal.

34. — Si le plan horizontal était la limite d'un sol d'épaisseur infinie, il faudrait de plus tenir compte de la nature de la droite.

En supposant d'abord la droite de substance différente du sol, elle existerait matériellement à l'intérieur du sol, mais serait cachée dans cette région comme dans l'exemple précédent.

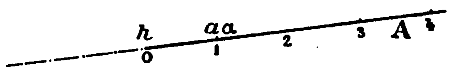


Fig. 7.

Enfin, supposons la droite de même substance que le sol, alors rien ne la distingue plus dans l'intérieur du sol du milieu environnant; on dit que dans cette région elle est enlevée, et on la marque (fig. 7) en traits mixtes.

CHAPITRE III

I. — DU PLAN.

35. — *Un plan est toujours déterminé par trois points, ou par une droite et un point, ou enfin par deux droites qui se coupent.*

Dans le premier cas, si l'on joint les trois points deux à deux par deux droites, on aura encore deux droites qui se coupent. Il en est de même dans le deuxième cas, en joignant par une ligne droite le point donné à un point quelconque de la droite donnée.

Pour construire une droite quelconque d'un plan défini par deux droites, il suffit de joindre un point quelconque de la première droite à un point quelconque de la seconde.

II. — DÉTERMINER UNE DROITE, UN POINT D'UN PLAN.

36. — PROBLÈME. — *Déterminer une droite d'un plan, connaissant l'une des projections de cette droite.*

Soit AA′, BB′ (fig. 8) les deux droites qui définissent le plan et c la projection horizontale d'une droite du plan.

Nous dirons : la droite inconnue cc' étant contenue dans le plan, elle rencontre toutes les droites du plan, et en particulier les deux droites qui définissent le plan. Ainsi, la droite inconnue rencontre AA′ en aa' et BB′ en bb', donc la droite demandée a pour projection verticale $a'\,b'$ ou c'.

La construction peut toujours réussir, car on est toujours libre de remplacer les deux droites AA′, BB′ à l'aide desquelles on avait défini le plan par d'autres droites du plan.

37. — Si les deux droites étaient définies par leurs échelles (fig. 9), on dirait : la droite inconnue C rencontre A en *a* (1,5)

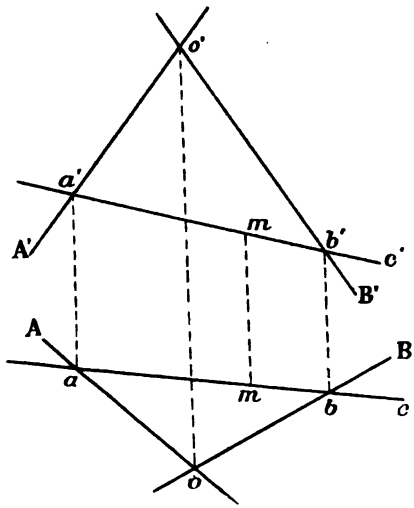


Fig. 8.

et B au point *b* (2). Cette droite est bien définie et nous pouvons déterminer son échelle.

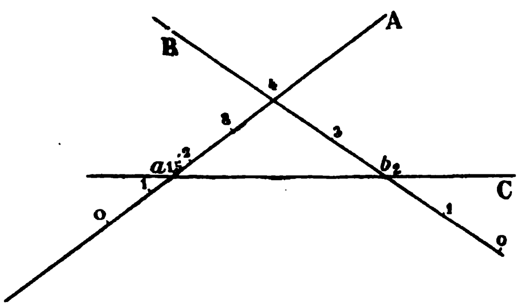


Fig. 9.

On arrive plus rapidement à ce dernier résultat, en substituant aux droites A et B qui définissent le plan d'autres droites du plan mieux choisies.

Joignons par exemple (fig. 10) le point *m* (9) de A au point *n* (9)

de B. La droite ainsi obtenue A_1 est une horizontale du plan, dont tous les points auront pour cote 9.

De même, joignons le point *p* (8) de A au point *q* (8) de B et nous obtenons la nouvelle horizontale B_1 (8) du plan.

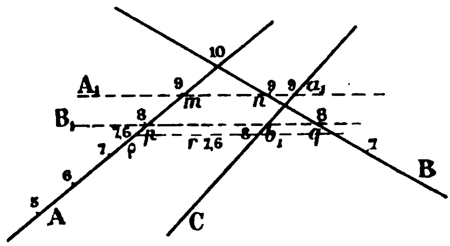


Fig. 10.

Nous dirons alors : la droite inconnue C rencontre les deux horizontales A_1, B_1 aux points a_1 (9), b_1 (8), qui définissent la droite. Cette façon de procéder présente donc l'avantage de donner immédiatement l'échelle de la droite.

38. — PROBLÈME. — *Déterminer un point d'un plan, connaissant l'une des projections de ce point.*

On fera passer par ce point, dans le plan, une droite quelconque et alors le point appartiendra à cette droite.

Par exemple (fig. 8), soit le plan ABA′B′ et le point *m* du plan dont on connaît seulement la projection horizontale. Nous menons par *m* en projection horizontale une droite quelconque *c* que l'on projette verticalement en *c′* à l'aide de ses deux points de rencontre *aa′*, *bb′* avec les deux droites qui définissent le plan. Finalement, le point inconnu se projette verticalement en *m′* sur *c′*.

39. — En géométrie cotée, il sera plus avantageux, comme nous l'avons fait précédemment, d'employer comme droite particulière l'horizontale du plan passant par le point.

Soit (fig. 10) le plan AB et le point *r*. Nous commencerons par déterminer la direction A_1 d'une horizontale du plan et nous ferons passer par *r* une parallèle à A_1 ; elle rencontre A au point ρ (7,6); donc le point cherché a aussi pour cote (7,6).

III. – DROITES REMARQUABLES D'UN PLAN.

40. — *On appelle droites remarquables d'un plan les horizontales et les lignes de front de ce plan, en particulier les traces.*

La détermination de ces droites est une application immédiate des problèmes précédents.

Ainsi, pour trouver une horizontale d'un plan, on se donne arbitrairement sa projection verticale, parallèle à la ligne de terre, puis on la projette horizontalement à l'aide de ses points de rencontre avec deux des droites du plan donné.

De même, pour trouver une ligne de front d'un plan, on se donne sa projection horizontale parallèle à la ligne de terre, puis on la projette verticalement à l'aide de ses points de rencontre avec les deux droites qui définissent le plan.

En particulier, la trace horizontale, c'est-à-dire l'intersection du plan donné avec le plan horizontal, a pour projection verticale la ligne de terre.

De même, la trace verticale a pour projection horizontale la ligne de terre.

En résumé, les traces d'un plan s'obtiennent en joignant par deux droites les traces de même nom des deux droites qui le déterminent.

41. — En géométrie cotée nous n'aurons à considérer à ce point de vue que les horizontales du plan et en particulier la trace horizontale du plan.

Nous avons eu déjà l'occasion (fig. 10) de figurer une horizontale d'un plan; elle s'obtient simplement en joignant deux points *m*, *n* de même cote (9) des deux droites qui définissent le plan.

42. — Il est bon de remarquer que toutes les horizontales d'un plan sont parallèles; il suffira donc, pour définir une autre horizontale du plan, de s'en donner seulement un point.

La trace horizontale, par exemple, sera la parallèle à la direction des horizontales du plan mené par le point de cote (0) de l'une des droites du plan.

Nous voyons ainsi que, pour définir un plan en géométrie cotée, il suffirait, avec la direction des horizontales du plan, de se donner une seule droite du plan avec son échelle.

IV. — ÉCHELLE DE PENTE. — INTERVALLE-MODULE.

43. — Échelle de pente du plan. — On choisit généralement, pour définir le plan d'après ce qui précède, sa ligne de plus grande pente, c'est-à-dire la droite du plan perpendiculaire sur les horizontales du même plan. De cette façon on a à la fois une droite du plan et la direction de ses horizontales. Cette ligne de plus grande pente étant graduée, elle forme l'échelle de pente du plan; on la représente généralement à l'aide de deux droites parallèles distantes d'environ 1 millimètre.

44. — Intervalle-module. — Pente. — Par analogie à ce qui se passe pour la droite (23), on appelle intervalle ou module d'un plan la distance comptée sur l'échelle de pente du plan, avec l'échelle du dessin, entre deux points successifs dont les cotes diffèrent d'une unité.

De même, la pente du plan sera la tangente de l'angle que fait ce plan avec le plan horizontal. La pente du plan n'est donc autre chose que la pente de son échelle de pente. La pente du plan est l'inverse du module du plan.

45. — Étant donnée alors en *m* la projection horizontale d'un point d'un plan défini par son échelle de pente A (fig. 11), pour

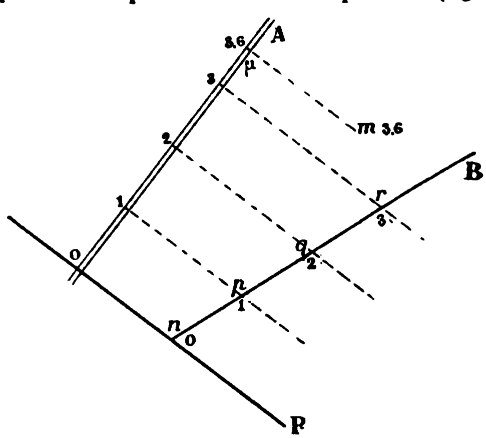


Fig. 11.

trouver sa cote, il suffira de mener par *m* une perpendiculaire sur A représentant l'horizontale du plan passant par le point *m*.

Cette horizontale rencontre l'échelle A du plan au point μ, dont la cote (3,6) est en même temps celle du point m.

De même, pour graduer une droite du plan A dont on connaît la projection horizontale B, il suffit de marquer les points de rencontre n, p, q, r de cette droite B avec les horizontales du plan menées par les points à cote ronde de l'échelle de ce plan.

46. — Ponctuation. — Si l'on veut représenter le système de deux plans, il suffit de dessiner leur intersection vue tout entière. Proposons-nous (fig. 11) de représenter le système formé par le plan A opaque, illimité, et par le plan horizontal également opaque et illimité. Nous n'aurons, pour arriver à ce résultat, qu'à figurer la trace horizontale du plan, c'est-à-dire l'horizontale (0) ou P en trait plein.

Du côté de m par rapport à P, le point m du plan ayant une cote positive, on voit le plan A ; de l'autre côté, on voit le plan horizontal.

V. — PLANS REMARQUABLES.

47. — On entend par plans remarquables les plans perpendiculaires ou parallèles aux plans de projection.

48. — THÉORÈME. — *Tout plan vertical a sa trace verticale perpendiculaire à la ligne de terre.*

En effet, le plan donné et le plan vertical de projection étant perpendiculaires tous deux sur le plan horizontal, il en est de même de leur intersection, c'est-à-dire de la trace verticale du plan $P_1\alpha$. Cette droite $P_1\alpha$ étant perpendiculaire sur le plan horizontal, elle est aussi perpendiculaire sur la ligne de terre qui passe par son pied dans le plan horizontal (fig. 12).

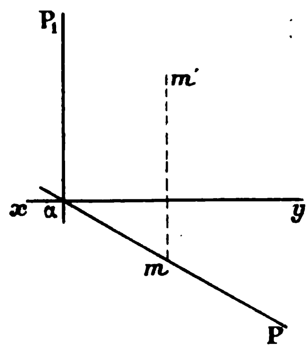


Fig. 12.

49. — Réciproque. — *Tout plan ayant sa trace verticale perpendiculaire sur la ligne de terre est vertical.*

En effet, les deux plans de projection étant rectangulaires, si dans le plan vertical on mène une droite $P_1\alpha$ perpendiculaire sur leur intersection xy, elle est perpendiculaire à l'autre plan, c'est-

à-dire au plan horizontal. Ainsi la trace verticale $P_1\alpha$ est verticale, et par suite tout plan $P\alpha P_1$ passant par cette droite est lui-même vertical (fig. 12).

50. — Propriété. — *Tout point d'un plan vertical* $P\alpha P_1$ *se projette horizontalement sur la trace horizontale* $P\alpha$ *du plan.*

En effet, les projetantes sur le plan horizontal des différents points du plan étant toutes perpendiculaires sur le plan horizontal, elles sont toutes contenues dans le plan donné ; donc leurs traces horizontales se trouvent sur la trace horizontale du plan donné.

Ainsi (fig. 12) $P\alpha P_1$ est un plan vertical, mm' appartient à ce plan.

De même $R\beta R_1$, dont la trace horizontale est perpendiculaire sur xy, est un plan de bout, c'est-à-dire perpendiculaire au plan vertical ; tout point mm' de ce plan se projette verticalement sur la trace verticale (fig. 13).

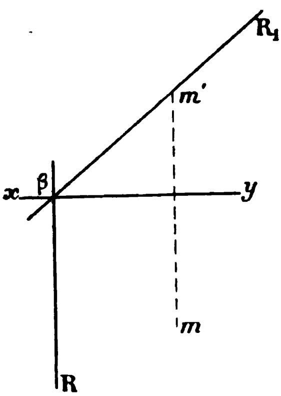


Fig. 13.

Comme cas particulier, un plan de front, c'est-à-dire parallèle au plan vertical aura sa trace horizontale F parallèle à la ligne de terre (fig. 14) et sa trace verticale rejetée à l'infini. Tous les points mm' de ce plan de front se projetteront horizontalement sur la trace horizontale.

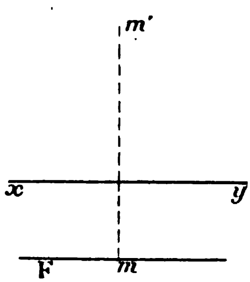


Fig. 14.

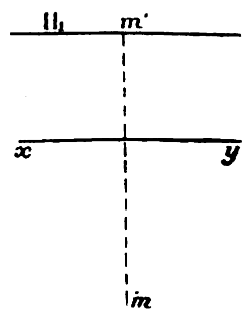


Fig. 15.

De même, un plan horizontal a sa trace verticale H_1 parallèle à la ligne de terre, et sa trace horizontale à l'infini ; tout point de ce plan mm' (fig. 15) se projette verticalement sur la trace verticale.

51. — En géométrie cotée, nous n'aurons à considérer parmi ces plans remarquables que les plans verticaux et les plans horizontaux.

Un plan vertical sera représenté et défini uniquement par sa trace horizontale sur laquelle se projetteront tous les points du plan.

Un plan horizontal sera défini simplement par sa cote.

VI. — PLANS PARALLÈLES.

52. — Pour mener par un point un plan parallèle à un plan donné, il suffit de mener par ce point deux parallèles à deux droites de directions différentes du plan donné.

Si, par exemple, le plan est défini par ses traces, il suffira de mener par le point une horizontale parallèle à la trace horizontale du plan donné, puis une ligne de front parallèle à la trace verticale du plan donné.

En géométrie cotée, il suffira de mener par le point une ligne parallèle à la ligne de plus grande pente du plan donné, ce sera la ligne de plus grande pente du plan inconnu, puisque les directions des horizontales des deux plans doivent être parallèles. Ou, si l'on veut, deux plans parallèles ont le même module et leurs échelles de pentes parallèles, égales et de même sens.

LIVRE II

INTERSECTIONS DE DROITES ET DE PLANS

CHAPITRE PREMIER

53. — Pour trouver généralement l'intersection d'une ligne et d'une surface, on fait passer par la ligne une surface auxiliaire, dont on détermine l'intersection avec la surface donnée; on obtient ainsi une nouvelle ligne dont le point de rencontre avec la première est le point cherché.

I. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN.

54. — Généralement, dans le cas d'une droite et d'un plan, on choisit comme surface auxiliaire passant par la droite un plan, et de préférence l'un des plans projetants de la droite, en utilisant la propriété fondamentale que tout point d'un plan vertical se projette horizontalement sur la trace horizontale du plan.

Soit le plan ABA′B′ et la droite CC′ (fig. 16).

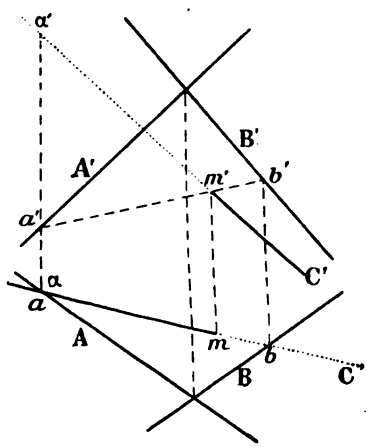


Fig. 16.

Prenons comme plan auxiliaire le plan vertical C qui projette horizontalement la droite, il coupe le plan donné suivant une droite dont on peut immédiatement déterminer deux points; ce sont les points

de rencontre du plan auxiliaire avec les deux droites qui définissent le plan donné.

Ainsi, le plan vertical C coupe AA′ en aa', BB′ en bb'. Donc le plan auxiliaire coupe le plan donné suivant $aba'b'$, qui à son tour rencontre la droite donnée au point mm'.

Le même procédé ne serait pas avantageux en géométrie cotée, parce que, tous les points d'un plan vertical se projetant horizontalement sur la trace horizontale du plan, il est impossible de voir directement en projection ce qui se passe dans un plan vertical.

Aussi, nous reviendrons sur cette question après avoir traité le problème de l'intersection de deux plans.

55. — La construction indiquée précédemment pour trouver l'intersection d'une droite et d'un plan doit toujours réussir, parce qu'on est toujours libre de remplacer les droites AA′, BB′ par d'autres droites mieux choisies dans le plan pour que les points correspondants aa', bb' soient, dans les limites de l'épure, distincts et bien déterminés au point de vue de l'exactitude du tracé.

II. — PONCTUATION.

56. — Proposons-nous de représenter dans cet exemple le système composé de la droite CC′ illimitée et du plan ABA′B′ opaque et illimité.

La limite entre les parties vues et cachées de la droite par le plan, c'est son point de rencontre mm' avec le plan. Il suffit donc d'établir la ponctuation d'un seul point de la droite.

Pour arriver à ce résultat le plus rapidement possible sans constructions auxiliaires, considérons la verticale a qui s'appuie sur la droite donnée CC′ et sur l'une des droites du plan AA′ par exemple.

Cette verticale rencontre AA′ et par suite le plan en aa', puis la droite donnée CC′ en $\alpha\alpha'$ qui se trouve au-dessus de aa'. Donc, en projection horizontale, la droite C est vue depuis le point limite m jusqu'à l'infini à gauche en passant par α. Au contraire, à droite de m, elle est cachée jusqu'à l'infini.

Pour la projection verticale, on considère la ligne de bout qui s'appuie sur CC′ et sur une droite AA′ du plan. Sans prendre la

peine de tracer cette ligne qui se projette verticalement à l'intersection de C′ et de A′, on reconnaît que son point de rencontre avec CC′ est en arrière de son point de rencontre avec AA′; donc, en projection verticale, la droite C′ est cachée de m' jusqu'à l'infini à gauche, tandis qu'elle est vue à droite de m' jusqu'à l'infini.

57. — Le problème intersection d'une droite et d'un plan ne présente qu'un seul cas particulier, en entendant par cas particulier celui dans lequel on n'a pas besoin d'appliquer la méthode générale consistant à mener par la droite un plan auxiliaire. Ce cas particulier unique est celui où le plan donné est perpendiculaire sur l'un des plans de projection, parce qu'alors le point inconnu se projette sur ce plan de projection à l'intersection de la projection de la droite avec la trace de même nom du plan.

CHAPITRE II

I. — INTERSECTION DE DEUX PLANS.

58. — Pour trouver un point de l'intersection de deux surfaces, on les coupe par une troisième surface auxiliaire quelconque. On obtient ainsi deux lignes, dont le point de rencontre est le point demandé.

Dans le cas de deux plans, l'intersection est une ligne droite; donc, pour la déterminer, il suffit d'en chercher deux points. Comme surface auxiliaire, on choisira un plan.

Parmi les plans qu'il est bon d'employer, nous citerons avant tout des plans perpendiculaires sur les plans de projection, par exemple des plans projetant des droites qui déterminent les plans donnés ; on peut aussi employer des plans parallèles aux plans de projection, ou encore les plans de projection eux-mêmes. Quand les circonstances le permettent, le deuxième plan bissecteur convient aussi très avantageusement pour donner immédiatement un point.

En géométrie cotée, et en dernière analyse, on ne choisit finalement que des plans horizontaux, les plans verticaux devant être rejetés pour la raison que nous avons déjà donnée (54).

59. — Soit les deux plans AA'BB', CC'DD', définis chacun par deux droites qui se coupent (fig. 17).

Prenons comme premier plan auxiliaire le plan vertical C, il coupe AA' en aa', BB' en bb'. Le plan auxiliaire coupe donc le plan ABA'B' suivant $aba'b'$; il coupe ensuite le plan CDC'D' suivant la droite CC' elle-même. Ces deux droites $aba'b'$, CC' se rencontrent en $\gamma'\gamma$ qui est un premier point de l'intersection des deux plans.

De même le plan vertical D coupe le plan ABA'B' suivant $a_1b_1a'_1b'_1$ et le plan CDC'D' suivant DD'. Ces deux droites $a_1b_1a'_1b'_1$,

DD′ se rencontrent en δδ′ qui est un deuxième point de l'intersection.

En résumé, l'intersection des deux plans est γδγ′δ′. Comme vérification, cette droite étant contenue dans les deux plans, elle doit rencontrer toutes les droites des deux plans. Ainsi γδγ′δ′

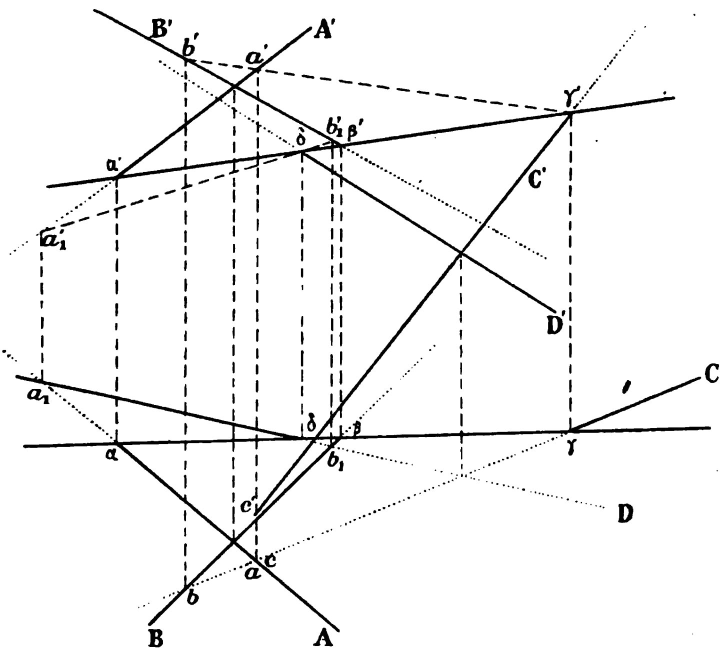


Fig. 17.

rencontre AA′ en αα′ et BB′ en ββ′. Il est bien entendu que, si les plans employés ne convenaient pas, on serait toujours libre d'en choisir d'autres, et au besoin de remplacer les droites AA′, BB′, CC′, DD′ par d'autres droites des deux plans.

En s'astreignant à employer les constructions les plus simples possible, on courrait le risque de ne pas obtenir des résultats suffisamment exacts; aussi est-il toujours préférable d'avoir à sa disposition des procédés généraux pouvant s'adapter à toutes les circonstances et qui employés de plusieurs manières permettent de contrôler l'exactitude des résultats.

II. — PONCTUATION.

60. — Proposons-nous, dans l'exemple précédent (fig. 17), de représenter le système des deux plans opaques et illimités, les plans de projection étant transparents.

L'intersection sera dans ces conditions vue tout entière dans les deux projections. D'un côté de cette droite, on voit l'un des plans, de l'autre côté l'autre plan.

Pour la projection horizontale, considérons une verticale s'appuyant sur une droite AA′ du premier plan et CC′ du second; soit la verticale *a*. Elle rencontre AA′ en *aa′* et CC′ en *cc′*; or *aa′* est au-dessus de *cc′*, donc *aa′* est vue en projection horizontale, par conséquent le plan AB est vu dans toute la région qui est du même côté que *a* par rapport à $\alpha\beta\gamma\delta$. A, en particulier, est vue depuis le point limite α jusqu'à l'infini à droite en passant par *a*, mais cachée à gauche de α jusqu'à l'infini.

De même B est vue depuis le point limite β jusqu'à l'infini à gauche et cachée à droite de β.

Au contraire, la droite C est vue à droite de γ et D à gauche de δ.

Une opération analogue donnera la ponctuation en projection verticale, en prenant une ligne de bout s'appuyant sur les deux droites. Nous reconnaîtrons de cette façon que le plan AB est vu au-dessus de $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, tandis qu'au-dessous de l'intersection on voit le plan CD.

61. — Comme nous l'avons dit à propos de l'intersection d'une droite et d'un plan, le problème intersection de deux plans ne présente qu'un seul cas particulier, c'est celui où l'un des plans donnés est perpendiculaire sur l'un des plans de projection, parce qu'alors on a immédiatement ses points de rencontre avec deux droites du plan, et par suite avec le plan sans le secours d'aucun plan auxiliaire.

CHAPITRE III

I. — INTERSECTION DE DEUX PLANS COTÉS.

62. — Nous avons dit que, en géométrie cotée, on n'employait généralement comme plans auxiliaires que des plans horizontaux.

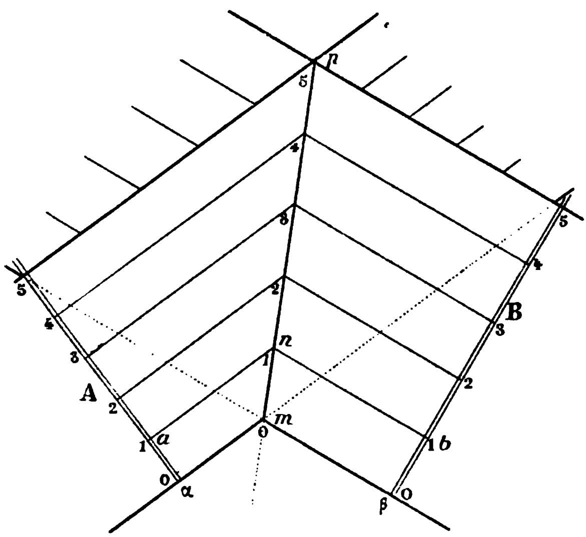


Fig. 18.

Soit donc deux plans déterminés par leurs échelles de pente A, B (fig. 18).

Le plan horizontal 0 coupe les deux plans donnés suivant les horizontales 0 des deux plans menées respectivement par α, β perpendiculaires à A, B. Ces deux horizontales se rencontrent en un point *m* (0) qui est un premier point de l'intersection des deux plans.

Répétons le même raisonnement avec le plan horizontal (1) : nous trouvons les deux horizontales *na* (1), *nb* (1), qui se rencontrent en *n* (1). En résumé, *mn* est l'intersection demandée.

La construction employée donne en même temps la graduation de la droite. Pour l'exactitude des résultats, il est avantageux de déterminer deux points de l'intersection dont les différences de cote sont les plus grandes possible dans les limites du dessin, en employant d'autres plans horizontaux que ceux que nous avions choisis.

II. — PONCTUATION.

63. — Proposons-nous de représenter dans cette épure le système des deux plans opaques, le plan horizontal étant également opaque. Si l'on ne représentait que le système des deux plans, l'intersection serait vue tout entière; mais, à cause du plan horizontal, c'est seulement la région au-dessus du plan horizontal qui est vue. Ainsi l'intersection est vue depuis le point limite *m*, dans toute la région *mnp*. D'un côté de cette droite on voit le plan A, de l'autre le plan B. La verticale β coupe le plan B en un point de cote nulle et le plan A en un point dont nous n'avons pas besoin de déterminer exactement la cote; mais il nous suffit, à l'aide de l'horizontale de A passant par β, de reconnaître que cette cote est négative.

Donc en β on voit le plan B, et par suite la trace horizontale du plan B est vue depuis le point limite *m* dans la région *m*β, mais elle est cachée de l'autre côté de *m*.

A gauche de *mnp*, on voit le plan A, donc la trace horizontale de ce dernier plan est vue depuis le point limite *m* jusqu'à l'infini à gauche. Dans la figure 18, nous avons, de plus, supposé que les deux plans n'étaient conservés que dans la région au-dessous du plan horizontal (5). L'intersection est alors limitée au point *p* (5). Ensuite, les horizontales (5) des deux plans sont figurées vues. Enfin, les traces de chaque plan dans leurs régions cachées primitivement redeviennent vues, quand l'autre plan n'existe plus pour les cacher.

Nous avons, de plus, dessiné les horizontales (1), (2), (3), (4) de chaque plan dans les régions vues de chacun d'eux.

64. — L'obligation dans laquelle nous nous trouvons, en géométrie cotée, de n'employer finalement comme plans auxiliaires

que des plans horizontaux fait que la construction précédente peut ne pas toujours réussir; c'est ce qui arrive lorsque les lignes de plus grande pente des deux plans sont sensiblement parallèles en projection horizontale; ou, ce qui revient au même, lorsque les horizontales des deux plans sont sensiblement parallèles.

Lorsqu'il en est ainsi, on emploie comme plan auxiliaire un nouveau plan quelconque défini par son échelle de pente C, et dont on détermine les intersections avec les deux plans primitifs à l'aide de deux plans horizontaux.

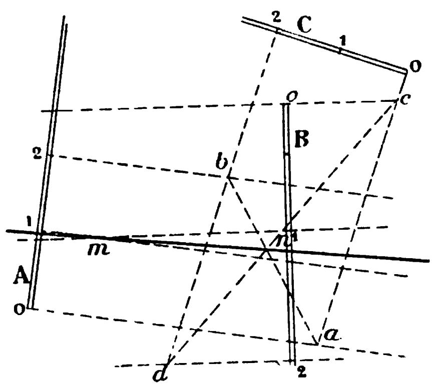


Fig. 19.

Ainsi (fig. 19), les horizontales (1) des deux plans A, B se coupent bien dans les limites de l'épure en *m*, mais les horizontales (0), (2) ne se coupent pas dans les limites de l'épure. Nous employons donc le plan C, qui coupe A suivant *ab* et B suivant *cd*. Ces deux dernières droites se rencontrent en *n*, et finalement *mn* est l'intersection cherchée.

III. — ÉCHELLES PARALLÈLES.

65. — Cas particulier. — Supposons que les échelles de pente des deux plans soient rigoureusement parallèles, ou que les horizontales des deux plans soient parallèles.

L'intersection des deux plans est alors parallèle elle-même aux horizontales des deux plans; de sorte que, pour la déterminer, il suffit d'en chercher un seul point.

Un plan auxiliaire quelconque permettrait, comme dans l'exemple précédent, d'arriver au résultat; mais on peut l'obtenir plus rapidement à l'aide de la remarque suivante.

66. — THÉORÈME. — *Toutes les horizontales s'appuyant sur deux droites dont les projections horizontales sont parallèles passent en projection horizontale par un même point.*

Considérons, en effet, les deux horizontales $a(9)$, $b(9)$, a_1 (12), b_1 (12) (fig. 20), qui s'appuient sur les deux droites A, B, et soit ω le point de rencontre de leurs projections horizontales. Ce point ω partage ab dans un rapport $\frac{\omega a}{\omega b}$, qui est égal au rapport $\frac{aa_1}{bb_1}$ ou $\frac{am}{bn}$, c'est-à-dire égal au rapport des intervalles des deux droites. Donc, le point ω sur ab est indépendant de l'horizontale variable s'appuyant sur les deux droites; autrement dit, il est fixe pour toutes ces horizontales.

On peut dire aussi que toutes les horizontales s'appuyant sur deux droites dont les projections horizontales sont parallèles rencontrent toutes une même verticale.

67. — Soit maintenant deux plans définis par leurs échelles de pente A, B (fig. 20), ces deux échelles de pente étant parallèles,

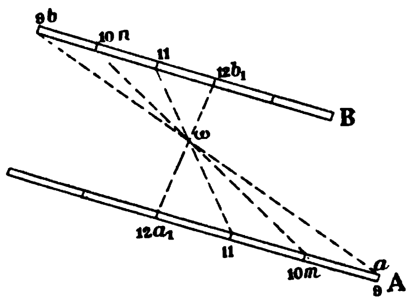


Fig. 20.

en projection horizontale. L'intersection des deux plans est l'une des horizontales s'appuyant sur les deux droites A, B ; elle passe donc par le point fixe ω, et comme, de plus, elle est perpendiculaire sur les lignes de plus grande pente A, B, on l'obtient en menant par ω une perpendiculaire sur A et B.

En résumé, étant donnés deux plans dont les échelles de pente A, B sont parallèles, pour trouver leur intersection, il suffit de joindre par deux droites les points de même cote et de mener par le point de rencontre ω de ces droites une perpendiculaire sur les deux lignes de plus grande pente.

CHAPITRE IV

I. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN.

68. — La méthode générale pour trouver l'intersection d'une droite et d'un plan consiste à faire passer par la droite donnée un plan auxiliaire, dont on construit l'intersection avec le plan donné. Cette nouvelle droite rencontre la droite donnée au point cherché. Quand on a à sa disposition deux projections distinctes, il est avantageux d'employer comme plan auxiliaire l'un des plans projetants de la droite; mais, en géométrie cotée, comme il est impossible de savoir ce qui se passe dans un plan vertical, nous prendrons un plan quelconque passant par la droite, et jamais le plan projetant horizontalement cette droite.

Soit donc la droite A et le plan P définis par leurs échelles de pente (fig. 21).

Prenons comme plan auxiliaire passant par la droite le plan admettant comme horizontale $a\mu$, et cherchons l'intersection de ce nouveau plan avec le plan P.

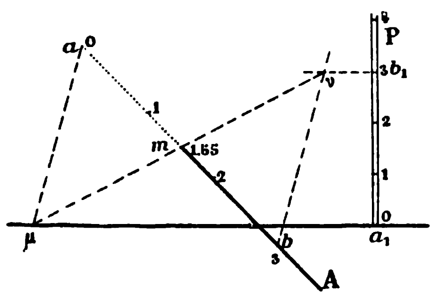


Fig. 21.

Le plan horizontal (0) coupe P suivant une perpendiculaire à P menée par a_1 (0), et le plan auxiliaire suivant $a\mu$; d'où le point μ. Puis, le plan horizontal (3) coupe P suivant une perpendiculaire à P menée par b_1 (3), et le plan auxiliaire suivant une parallèle à $a\mu$ menée par b (3). Ces deux horizontales se coupent en ν; donc $\mu\nu$ est l'intersection du plan auxiliaire avec le plan donné; elle rencontre A au point m, qui est le point cherché.

La cote de ce point m est donnée par l'échelle de la droite ωu, à volonté, par l'échelle du plan P.

II. — PONCTUATION.

69. — Représentons ici le système formé par la droite illimitée, le plan donné et le plan horizontal de projection, tous deux opaques et illimités.

La trace horizontale du plan $a_1\mu$ est vue tout entière. Il ne reste qu'à établir la ponctuation de la droite A.

En ne tenant compte que du plan horizontal, cette droite A serait cachée à partir de la trace horizontale a dans toute la région où les cotes des points de A sont négatives. Si, de plus, on tient compte du plan, la limite entre la région vue et la région cachée de la droite, c'est son point de rencontre m avec le plan.

Or la verticale a coupe la droite A en un point dont la cote est nulle, puis le plan R en un point dont la cote serait positive; donc, en résumé, la droite est vue à droite de m et cachée à gauche.

III. — SYSTÈME DE TROIS PLANS.

70. — **Exemple.** — *Représenter un système de plans* P, R, S *définis par leurs échelles de pente.*

Dans une pareille question, la première chose à faire est de déterminer les intersections de tous les plans deux à deux, ces intersections devant servir de limite entre les parties vues et cachées de chaque plan.

Nous avons donc à déterminer successivement les intersections de P et de R, de R et de S, de S et de P; enfin, nous devons aussi dessiner les traces horizontales des différents plans, si, en même temps, nous supposons le plan horizontal opaque.

Nous avons utilisé (fig. 22) comme plans auxiliaires les plans horizontaux (0) et (5), qui donnent : 1° dans le plan P, les horizontales p, π, dans le plan R, les horizontales r, ρ, et enfin, dans le plan S, les horizontales s, σ.

L'intersection de P et de R est donc $a\alpha$, a étant l'intersection de p et r, et α l'intersection de π et ρ. De même, $b\beta$ est l'intersection de P et S, enfin, $c\gamma$ est l'intersection de R et de S.

Comme vérification, les trois droites $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ se coupent en un point m, qui est le point commun aux trois plans P, R, S.

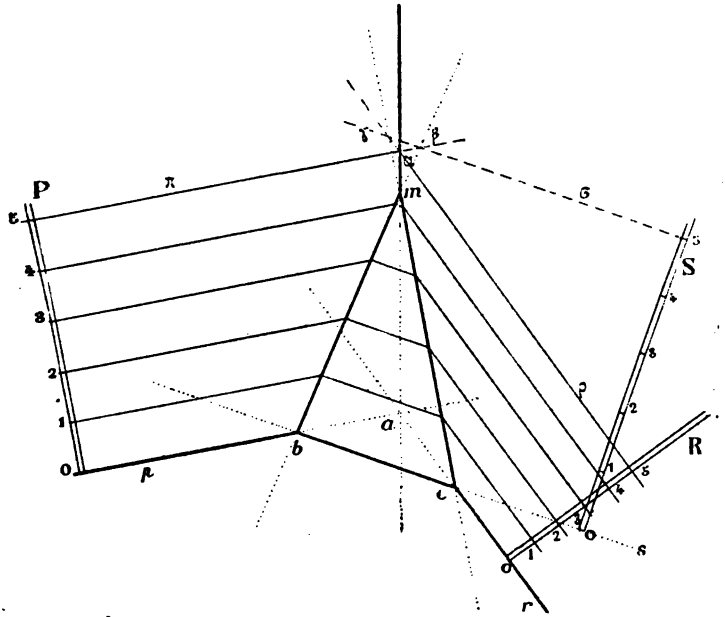


Fig. 22.

71. — Ponctuation. — Nous représenterons le système des trois plans et du plan horizontal opaques et illimités.

1° Si l'on ne représentait que le système des plans P, R, la droite $a\alpha$, leur intersection serait vue tout entière; mais, à cause du plan horizontal, elle est cachée, à partir de a, dans la région opposée à α, au-dessous du plan horizontal. Tenons compte ensuite du plan S. La nouvelle limite entre les parties vues et cachées sera le point m. D'ailleurs, la verticale a coupe $a\alpha$ en un point de cote nulle et le plan S en un point de cote positive. Donc, en résumé, $a\alpha$ est vue de m jusqu'à l'infini, dans la direction $m\alpha$.

2° La droite $b\beta$ se trouve à gauche de b au-dessous du plan horizontal, et en b au-dessus du plan R; donc l'unique région vue se réduit à bm.

3° La droite $c\gamma$ se trouve dans la région $c\gamma$ au-dessus du plan horizontal, et en c au-dessus du plan P; elle n'est donc vue que dans la région mc.

4° La droite *abp*, dans le plan horizontal, est cachée à droite de *a* par le plan R et à droite de *b* par le plan S ; elle n'est donc vue qu'à gauche de *b*.

5° La droite *acr* est cachée à gauche de *a* par le plan P, à gauche de *c* par le plan S ; elle n'est donc vue qu'à droite de *c*.

6° Enfin, la droite S est cachée à gauche de *b* par le plan P, à droite de *c* par le plan R ; elle n'est donc vue que dans la région *bc*.

En résumé, à l'intérieur du contour *pbmα* on voit le plan P ; le plan R est vu dans le contour *rcmα* et enfin le plan S n'est vu que dans le triangle *mbc*.

Nous avons figuré dans chacun de ces contours les horizontales vues (2), (3), (4), (5) de chacun des plans.

Cette ponctuation peut s'établir beaucoup plus rapidement et cela avec un nombre quelconque de plans à l'aide des considérations qui vont suivre.

IV. — PONCTUATION D'UN SYSTÈME DE SURFACES.

72. — Soit à représenter un système de surfaces P, Q, R, S, T, etc., en nombre quelconque ; nous devons, pour cela, couper ces différentes surfaces par un certain nombre de verticales. Soit *p*, *q*, *r*, *s* les points de rencontre d'une même verticale A avec les différentes surfaces, en donnant à chaque point le même nom qu'à la surface correspondante. Supposons de plus que *pqrs* soit l'ordre dans lequel on rencontre les différents points en descendant sur la verticale A ; c'est-à-dire que, si *p*, *q*, *r*, *s* représentent en même temps les cotes des différents points, on a $p > q > r > s$, autrement dit le point *p* est vu et cache tous les autres. Si dans l'objet à représenter la portion de la surface P à laquelle appartient le point *p* était enlevée dans le voisinage du point *p*, le point *q* y redeviendrait vu et cacherait à son tour les points *r*, *s*.

Nous établirons d'abord comme principe que, si la verticale se déplace, de façon à venir en A_1, après avoir traversé uniquement la ligne (PQ), intersection des deux surfaces P et Q, il se produit une inversion dans l'ordre des points *p* et *q*, c'est-à-dire que, sur la verticale A_1, l'ordre des points est maintenant *qprs* au lieu de *pqrs*.

73. — **Remarque I.** — Une inversion ne peut se produire

qu'entre deux lettres successives. En effet, au moment où se produit une inversion, c'est que deux des points dans l'espace coïncident ou que deux cotes deviennent égales; or ces cotes p, q, r, s étant rangées dans leur ordre de grandeur, ce sont deux cotes successives qui deviennent égales.

74. — Remarque II. — Quand l'inversion se produit sur les premières lettres, la ligne traversée est vue; dans tous les autres cas, elle est cachée.

75. — THÉORÈME. — *Soit* m *un point commun à trois surfaces; en supposant ce point* m *vu, simple, et n'appartenant à aucun contour apparent, les intersections des trois surfaces deux à deux forment six rayons alternativement vus et cachés.*

En effet, soit m (fig. 23) un point commun à trois surfaces.

Les intersections des trois surfaces deux à deux passent par m. Le point est vu, donc l'une des intersections α est vue avant d'arriver au point m. Il est ensuite simple, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'un seul arc d'intersection de deux surfaces passant par

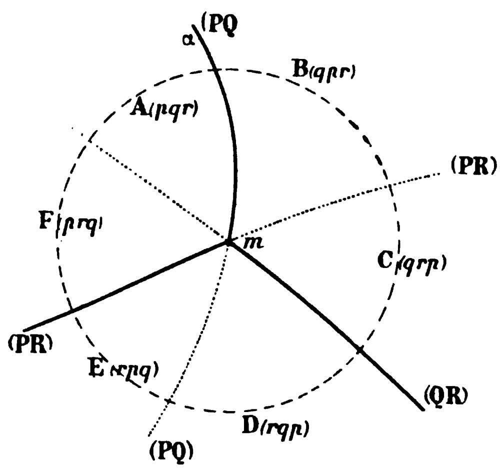


Fig. 23.

le point m, soit en tout trois arcs formant six rayons. Enfin, le point m n'appartient à aucun contour apparent, c'est-à-dire qu'une verticale dans le voisinage de m ne coupe chaque surface qu'en un seul point voisin de m; les autres points d'intersection

n'étant pas voisins du point m dans l'espace, nous les négligerons. Dessinons autour du point m un contour suffisamment petit pour qu'une verticale ne coupe chaque surface qu'en un seul point voisin de m dans l'espace et négligeons les autres points.

Puis, faisons marcher une verticale tout le long de ce contour.

Prenons, par exemple, la verticale A, et admettons que sur cette verticale l'ordre des points soit pqr.

Passons alors de A en B après avoir traversé la ligne vue α. Il se produira une inversion entre deux lettres consécutives qui seront nécessairement les deux premières, puisque la ligne traversée est vue. Ceci prouve que : 1° l'inversion se produit entre p et q; 2° que la ligne traversée est la ligne (PQ), intersection des deux surfaces P et Q; 3° qu'en B l'ordre des points est qpr.

Si nous passons en C, il doit se produire une nouvelle inversion entre deux lettres consécutives. Or les lettres consécutives sont maintenant q et p ou bien p et r. Donc, la nouvelle intersection est nécessairement l'intersection de P et de Q ou bien celle de P et de R.

Si la nouvelle inversion se produisait entre P et Q, c'est que la nouvelle intersection serait encore l'intersection de P et de Q; or cela n'est pas possible, puisque le point m est simple, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'un arc (PQ) passant par m. Donc, nécessairement, la nouvelle inversion a lieu entre P et R. Ce qui prouve: 1° qu'en C l'ordre des lettres est qrp; 2° que la ligne traversée s'appelle (PR); 3° que cette ligne traversée est cachée.

Plus généralement, si l'inversion précédente se produit sur les premières lettres, la suivante se produit sur les dernières, et inversement, lorsque l'inversion primitive se produit sur les dernières lettres, la suivante se produit sur les premières; autrement dit, après un rayon vu vient un rayon caché, et après un rayon caché vient un rayon vu.

Il ne reste plus qu'à vérifier ces résultats sur la figure. Le rayon suivant est (QR); donc, quand on arrive en D, l'ordre des points est rqp, et la ligne traversée est vue. Pour passer de D en E on traverse la ligne (PQ), en E l'ordre des points est rpq, et la ligne traversée est cachée.

De E en F on traverse (PR), la ligne traversée est vue, l'ordre des points étant maintenant prq. Enfin, en passant de F en A, on traverse (QR), inversion entre q et r; l'ordre des points devient pqr et la ligne traversée est cachée.

76. — Pour utiliser ce théorème dans la ponctuation d'un nombre quelconque de plans, il suffira donc de trouver, par un moyen quelconque, une intersection certainement vue. On se déplacera alors sur cette droite jusqu'à un point commun à trois plans, que l'on reconnaît par la présence de trois droites passant par ce point. En ce point commun, on appliquera le théorème, puis on se déplacera sur les nouveaux rayons vus jusqu'à de nouveaux points communs à trois plans où l'on appliquera de nouveau le théorème, et ainsi de suite tant que l'on rencontrera de nouveaux points communs. Quand on pourra aller jusqu'à l'infini sans rencontrer de nouveaux points communs à trois plans, on pourra affirmer que les intersections restantes sont cachées.

77. — Appliquons ces raisonnements à la figure 22.

La verticale α coupe $a\alpha$ en un point dont la cote est (5), et le plan S en un point dont la cote est plus petite que (5), donc le point α est assurément vu. Il existe une intersection passant par ce point qui est également vue, c'est la droite $a\alpha$ que nous dessinons vue jusqu'en m, point commun à trois plans.

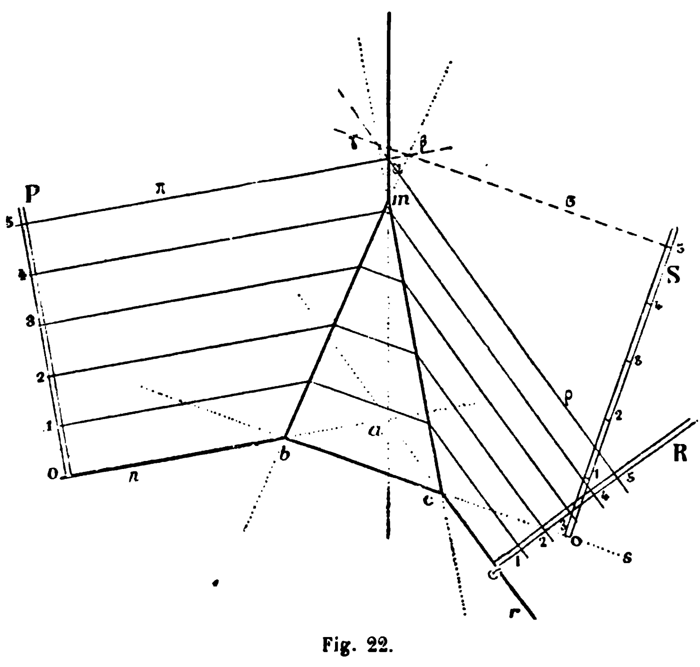


Fig. 22.

Le théorème donne donc *ma* vue à droite, cachée à gauche de *m*, *mc* vue à droite, cachée à gauche, *mb* vue à gauche, cachée à droite.

Marchons ensuite, sur la ligne vue *mb*, jusqu'en *b*, point commun au plan horizontal, au plan P et au plan S.

Le théorème donne *bm* vue à droite, cachée à gauche, *bc* vue à droite, cachée à gauche, et *ba* vue à gauche, cachée à droite.

Enfin, au point *c* qui est également commun à trois plans, nous avons *cb* vue à gauche, cachée à droite, *ca* vue à droite, cachée à gauche, et, enfin, *cm* vue à gauche, cachée à droite.

LIVRE III

INTERSECTION DES POLYÈDRES

CHAPITRE PREMIER

I. — DÉFINITIONS.

78. — Un polyèdre est un solide limité par des plans. Chacun de ces plans, qu'on appelle aussi faces du polyèdre, est limité à un contour polygonal, dont les côtés, qui sont les arêtes du polyèdre, sont les intersections des faces deux à deux, et dont les sommets, qui sont aussi les sommets du polyèdre, sont les points communs à trois faces au moins.

La surface d'un polyèdre est l'ensemble des surfaces de toutes les faces. Enfin, l'intersection de deux polyèdres est la ligne commune, ou plus généralement la région commune aux surfaces des deux polyèdres.

L'intersection de deux polyèdres est donc un polygone, dont les côtés sont les intersections des faces de l'un des polyèdres avec les faces de l'autre, et dont les sommets sont les points de rencontre des arêtes de chaque polyèdre avec les faces de l'autre.

Il résulte de là deux méthodes pour trouver l'intersection de deux polyèdres: dans la première on détermine les côtés du polygone, dans la seconde on cherche ses sommets.

En général, on utilise la première méthode lorsqu'on a des polyèdres quelconques, et l'on n'emploie la seconde que dans le cas particulier des prismes et des pyramides.

II. — DÉTERMINATION DES COTÉS.

79. — On commence par former un tableau contenant les combinaisons de toutes les faces du premier polyèdre avec toutes les faces du second.

Pour cela, on inscrit sur une ligne horizontale les noms des faces du premier polyèdre *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, ce qui détermine un certain nombre de colonnes verticales; puis, dans une même colonne verticale, on inscrit les noms des faces du second polyèdre α, β, γ, δ, ε, φ, ce qui donne un certain nombre de tranches horizontales.

Une case quelconque de ce tableau représente une combinaison d'une face du premier polyèdre avec une face du second, et l'on est de cette manière certain de les avoir toutes sans répétition.

80. — On supprime ensuite de ce tableau toutes les combinaisons que l'on peut reconnaître à l'avance inutiles, sans pour cela effectuer aucune construction.

Pour qu'une combinaison soit utile, il faut nécessairement que les deux faces admettent une partie commune en projection horizontale, puis une partie commune en projection verticale, et plus généralement dans une projection quelconque. Il faut de plus que ces parties communes se correspondent par des lignes de rappel. Ces conditions sont évidemment nécessaires, mais elles ne sont pas suffisantes; c'est-à-dire que, si elles sont remplies, la combinaison correspondante n'est pas nécessairement utile.

Dans le tableau suivant, nous avons marqué avec le signe × les combinaisons manifestement inutiles :

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
α	*mn*	×	*no*	×	×	1
β	×	×	×	×	3	2
γ	*tm*	*st*	×	5	4	×
δ	×	*rs*	7	6	*qr*	×
ε	*xy*	9	8	*zw*	*yz*	*vx*
φ	11	10	*op*	*wu*	*pq*	*uv*

81. — Choisissons maintenant l'une quelconque des combinaisons qui restent, par exemple la combinaison *a*α. Nous déterminerons l'intersection de ces deux faces, en les considérant comme des plans illimités, déterminés chacun par les arêtes qui

limitent ces faces, ces arêtes pouvant à leur tour être prolongées indéfiniment. C'est le problème général d'intersection de deux plans définis chacun par des droites.

Soit I (fig. 24) l'intersection de ces deux plans. Cette droite I ne convient pas tout entière pour le polygone d'intersection.

La partie utile est la portion de cette droite contenue simultanément à l'intérieur des deux faces a, α; elle se réduit par conséquent à mn. En résumé, mn est un premier côté du polygone d'intersection, m et n en sont deux sommets consécutifs.

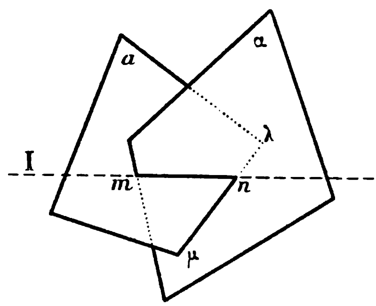


Fig. 24.

On a soin d'écrire le résultat trouvé mn dans la case correspondante du tableau.

Proposons-nous maintenant de déterminer le second côté du polygone. En disant le second côté, il ne s'agit pas de trouver un nouveau côté quelconque du polygone, ce qui ne présenterait aucun intérêt, mais bien le second côté que l'on rencontrerait en marchant sur le polygone dans le sens mn par exemple. Nous utiliserons les deux remarques suivantes.

82. — Remarque I. — Tout mobile assujetti à rester constamment sur la surface d'un polyèdre, et se trouvant à un moment donné à l'intérieur d'une face, se trouvera encore dans la même face un certain temps après l'instant considéré.

83. — Remarque II. — Tout mobile assujetti à rester constamment sur la surface d'un polyèdre, et se trouvant à un moment donné sur une arête, peut alors passer arbitrairement dans l'une ou l'autre des deux faces qui se coupent suivant l'arête considérée.

La notion du temps ne devrait pas intervenir évidemment dans une question telle que celle qui nous occupe, mais de ce que nous ne trouvons, malgré tout, les côtés que successivement, il résulte qu'en parlant de mobiles, le raisonnement nous semble plus clair et plus facile à entrer dans l'esprit; c'est pourquoi nous continuerons d'employer cette expression de mobiles.

Donc, le mobile qui parcourt le polygone d'intersection, ét assujetti à rester constamment sur les surfaces des deux polyèd devra obéir aux deux remarques précédentes.

Or, 1° on arrive en n à l'intérieur de la face α, donc le mol restera encore un certain temps dans la face α; autrement dit second côté du polygone d'intersection est contenu dans la face

2° Nous arrivons en n sur le contour de la face a, et en par culier sur l'arête $\lambda\mu$; donc, relativement à l'autre polyèdre, no pouvons, ou bien rester dans la face a, ou bien passer dans face adjacente à a, l'arête commune étant l'arête $\lambda\mu$ sur laque se trouve le dernier sommet connu n. Soit c cette face, qui généralement unique et parfaitement déterminée.

Nous avons donc actuellement deux combinaisons possibles, a αc. Or la combinaison αa a déjà été employée, puisque c'est el qui a donné le premier côté du polygone d'intersection mn; il reste donc plus qu'une combinaison possible, $c\alpha$; c'est celle- qui donnera le second côté.

84. — En résumé, le deuxième côté du polygone est donn par la combinaison de la face α, à l'intérieur de laquelle se trouv le dernier sommet, avec la face c adjacente à celle que l'on quitte a l'arête commune $\lambda\mu$ passant par le dernier sommet connu n.

Nous avons dit à ce sujet que la face c était généralement unique et parfaitement déterminée. Il est même possible, à l'aide du tableau, de désigner cette face, connaissant les noms complets de la face a et de l'arête $\lambda\mu$.

Remarquons d'abord que le nom a est remplacé dans la pratique par l'ensemble des lettres qui sont aux différents sommets de la face a; de même pour b, c, etc.

Ainsi, λ étant le nom d'un sommet du polyèdre abc, la lettre λ doit se trouver au moins dans trois colonnes, car un sommet d'un polyèdre appartient au moins à trois faces. De même, la lettre μ se trouve au moins dans trois colonnes. Mais les deux lettres λ et μ ne peuvent se trouver réunies que dans deux colonnes représentant les faces a et c qui se coupent suivant l'arête $\lambda\mu$. La face a étant connue, on peut désigner la face c à l'inspection seule du tableau.

85. — Ayant ainsi défini la combinaison $c\alpha$ qui donne le deuxième côté du polygone, on déterminera l'intersection de ces deux faces c, α; on prendra la partie utile de cette droite no, en

inscrivant le résultat trouvé *no* dans la case correspondante du tableau, puis on en déduira la combinaison qui donne le côté suivant et ainsi de suite.

86. — Lorsqu'on a trouvé le premier côté du polygone *mn*, en se proposant de le parcourir dans le sens *mn*, il peut être avantageux de savoir à l'aide de quelle combinaison on fermera le polygone, de façon à pouvoir dire au moment où l'on rencontre cette combinaison que le polygone se ferme.

Il suffit, pour arriver à ce résultat, de marcher sur le polygone dans le sens *nm*, en sens contraire du sens précédent; la nouvelle combinaison que l'on définira ainsi sera bien la dernière du sens primitif.

87. — Lorsqu'on a fermé le polygone *mnopqrstm*, il peut rester dans le tableau un certain nombre de combinaisons non employées. Il convient d'essayer l'une quelconque des combinaisons qui restent, et l'on peut former ainsi de nouveaux polygones d'intersection. Ainsi, dans le tableau du numéro 80, nous avons un nouveau polygone *uvxyzwu*. En général, on doit essayer toutes les combinaisons qui restent, parce que, autrement, on pourrait oublier un ou même plusieurs polygones d'intersection.

Il est cependant des circonstances où il est permis de supprimer certaines combinaisons qui restent sans prendre la peine de les essayer. Remarquons d'abord que le passage d'une case à une autre dans le tableau est analogue à la marche de la tour dans le jeu d'échecs, c'est-à-dire que l'on reste dans une même tranche horizontale ou bien dans une même colonne verticale.

Soit en effet un polygone *mnop*, ce polygone peut être parcouru dans le sens *mnop* ou bien dans le sens *ponm*, donc on peut arriver à la case *no* par le chemin (n° 80) *mn*, *no* dans une tranche horizontale ou par le chemin *po*, *on* dans une colonne verticale. Autrement dit, une case vide ne peut donner lieu à un résultat utile que s'il existe deux chemins permettant d'y arriver. Ainsi considérons la case 1 (n° 80), dans la tranche horizontale il n'y a plus de cases vides, et dans la colonne il n'y en a qu'une, donc la case 1 est inutile. On en déduit que la case 2 est également inutile, et ainsi de suite successivement jusqu'à la case 11.

Cependant de pareilles suppressions ne peuvent se faire que si l'on est certain que le polygone d'intersection ne présente pas de polygones ouverts, comme nous le verrons plus loin.

88. — Remarque I. — Pour trouver le premier côté du polygone, il est nécessaire d'en trouver deux points; mais, pour trouver un côté intermédiaire, un seul point suffit, puisque chaque nouveau côté doit passer par le dernier sommet connu. De plus, pour trouver le dernier côté, il est inutile d'en déterminer un seul point, ce dernier côté devant passer à la fois par le dernier et par le premier sommet connus. Cependant, dans la pratique, il peut être utile de vérifier les positions des côtés intermédiaires par des points supplémentaires, pour éviter l'accumulation des erreurs.

89. — Remarque II. — Il est avantageux de conserver les mêmes plans auxiliaires pour toutes les combinaisons successives, car deux combinaisons successives contiennent toujours une face commune, donc l'opération effectuée pour la face α dans la combinaison $a\alpha$ sera toute faite pour la même face α dans la combinaison suivante $c\alpha$.

90. — Remarque III. — Il est inutile d'employer un plan auxiliaire dans toute combinaison contenant une face perpendiculaire sur l'un des plans de projection, car on sait trouver immédiatement l'intersection d'un plan quelconque avec un plan projetant.

91. — Cas particulier. — Il peut arriver qu'une arête du premier polyèdre rencontre une arête du second, il y a alors en ce point quatre combinaisons possibles. Soit a, b les faces du premier polyèdre, α, β celles du second. Les quatre combinaisons possibles sont alors $a\alpha$, $a\beta$, $b\alpha$, $b\beta$. On essaye l'une de ces combinaisons, et l'on ferme le polygone; puis on reprend l'une de celles qui restent et l'on ferme de nouveau le polygone.

Il peut arriver aussi qu'un sommet du premier polyèdre coïncide avec un sommet du second; on a alors en ce point $p \times \pi$ combinaisons possibles, en appelant p et π les nombres des faces qui aboutissent au sommet commun dans chaque polyèdre.

92. — Il peut se faire encore que le polygone d'intersection soit ouvert, bien que le nombre des côtés du polygone soit limité, puisqu'il est au maximum le produit du nombre des faces du premier polyèdre par celui des faces du second.

Ce fait se présente, en laissant de côté le cas où le polygone a

des branches infinies, lorsque les deux polyèdres ont deux faces contenues dans le même plan.

Soit par exemple (fig. 25) *a*, *α* deux faces de deux polyèdres, dont les plans sont confondus; les points de rencontre *m*, *n*, *p*, *q*, *r*, *s* des contours de ces deux polygones seront des origines de polygones ouverts. On peut dire cependant que le polygone se ferme en considérant la région de surface plane *mnpqrs* comme faisant partie de l'intersection; c'est pour cela que nous avons défini l'intersection de deux polyèdres comme étant la ligne commune, et plus généralement la région commune aux surfaces des deux polyèdres.

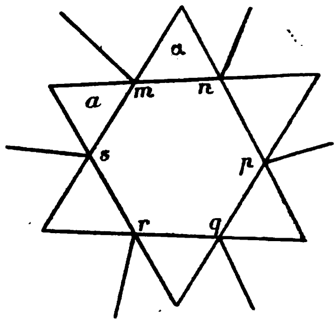


Fig. 25.

93. — Vérifications. — L'emploi du tableau que nous recommandons d'une façon absolue pour éviter de négliger certaines parties du polygone conduit aussi à reconnaître certaines vérifications dans la construction de ce polygone.

Considérons par exemple (n° 80) deux cases *mn*, *xy* appartenant à une même colonne et telles que les noms *mn*, *xy* n'aient aucune lettre commune. Les droites *mn*, *xy* sont les intersections de la face *a* avec les deux faces *α*, *ε*, donc les droites *mn*, *xy* doivent se couper sur la droite d'intersection des deux faces *α* et *ε*; or, si ces deux faces *α* et *ε* sont adjacentes, leur intersection est précisément l'une des arêtes du polyèdre *αβγδ*, etc.

Il en serait de même pour *qr*, *yz* dans la face *e*, *xy*, *zw* dans la face *ε*, *zw*, *vx* dans la même face *ε*, enfin dans la face *φ* *op* avec *wu*, *op* avec *uv*, *wu* avec *pq* et *pq* avec *uv*.

94. — Nous signalerons aussi ce fait que la partie utile de l'intersection de deux faces n'est pas toujours comprise entre les deux sommets qui la limitent; par exemple (fig. 26), soit *sab*, $s_1a_1b_1$ les faces de deux pyramides en prenant les deux nappes de chacune d'elles et en indiquant avec des hachures la partie utile de ces différentes faces. Si I est l'intersection des deux plans, la partie utile de cette droite se compose des deux segments *mn*, *μν*.

Il en serait de même figure 27, où la partie utile se com-

pose : 1° du segment *mn* ; 2° du segment qui va de μ jusqu'à

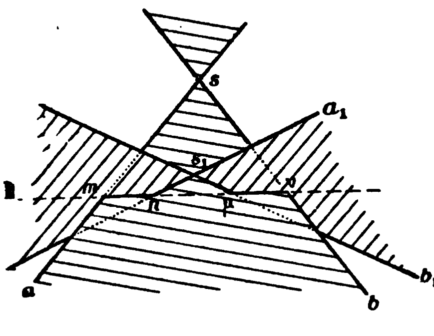


Fig. 26.

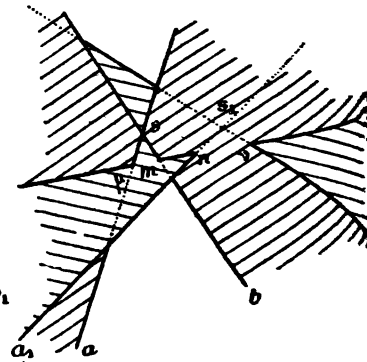


Fig. 27.

l'infini à gauche ; 3° du segment qui part de ν jusqu'à l'infini à droite.

III. — TAS DE SABLE ET PRISME.

95. — Exemple. — *Intersection d'un tas de sable* abcd $a_1b_1c_1d_1$ *et d'un tronc de prisme* $efge_1f_1g_1$ *donnés seulement par leurs projections horizontales, en ajoutant que les sommets* abcdefg *sont dans un même plan horizontal, et que les autres sommets* $a_1b_1c_1d_1e_1f_1g_1$ *sont dans un autre même plan horizontal. Autrement dit les points qui ont le même indice ont la même cote* (fig. 28).

Commençons par former le tableau des combinaisons des faces du tas de sable avec les faces du tronc de prisme (fig. 28) :

	— *efg*	+ $e_1f_1g_1$	— eff_1e_1	+ fgg_1f_1	+ gee_1g_1
— *abcd*	×	×	×	×	×
+ $a_1b_1c_1d_1$	×	×	×	×	×
+ abb_1a_1	×	×	*tu*	×	*st*
+ bcc_1b_1	×	×	*uv*	*vx*	×
+ cdd_1c_1	×	×	*pq*	*qr*	×
+ daa_1d_1	×	×		*no*	*mn*

Supprimons ensuite de ce tableau toutes les combinaisons évidemment inutiles.

Par exemple, les deux solides étant tous deux au-dessus du plan horizontal *abcdefg*, et au-dessous du plan horizontal $a_1b_1c_1d_1e_1f_1g_1$, on peut supprimer complètement les colonnes *efg*, $e_1f_1g_1$, ainsi

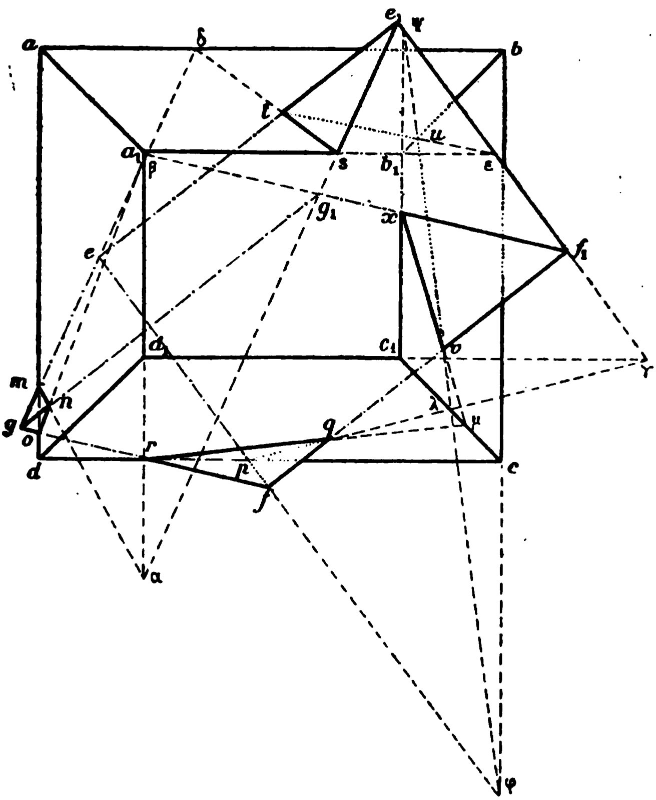


Fig. 28.

que les tranches *abcd*, $a_1b_1c_1d_1$. Ensuite, les faces abb_1a_1, fgg_1f_1 n'ont aucune partie commune en projection horizontale, ainsi que les faces bcc_1b_1, egg_1e_1 et les faces cdd_1c_1, ege_1g_1.

Si nous remarquons que les polyèdres ont deux faces dans le même plan, *abcd*, *efg*, cela nous permet de commencer le polygone immédiatement sans aucun tâtonnement généralement inévitable dans une telle question.

Choisissons donc les faces add_1a_1, egg_1e_1 qui donnent certainement en m une origine de polygone ouvert. Le plan horizontal supérieur coupe ces deux faces suivant a_1d_1, e_1g_1 qui se rencontrent en α ; donc $m\alpha$ est l'intersection des deux faces. La partie utile se réduit à mn à l'intérieur de add_1a_1, egg_1e_1.

Au point n, on se trouve à l'intérieur de la face add_1a_1 qu'il faut conserver, et sur le contour de la face egg_1e_1, en particulier sur l'arête gg_1. Il faut donc remplacer cette dernière face par la face adjacente gg_1f_1f.

Le plan horizontal inférieur donne ad, fg qui se rencontrent en o. Donc no est le nouveau côté du polygone, c'est en même temps la partie utile. Comme vérification, cette droite no passe par β à l'intersection de a_1d_1, f_1g_1 dans le plan horizontal supérieur.

Au point o, nous arrivons à deux faces $abcd$, efg dans le même plan horizontal, le polygone s'arrête donc en ce point.

Prenons ensuite comme nouvelle origine le point p, intersection de cd et ef. Le plan horizontal supérieur donne c_1d_1, e_1f_1 qui se rencontrent en γ. Donc $p\gamma$ est l'intersection des deux faces cdc_1d_1, efe_1f_1, la partie utile étant pq. Au point q, on se trouve à l'intérieur de la face cdc_1d_1 qu'il faut conserver, et sur le contour ff_1 de la face eff_1e_1 ; il faut donc remplacer cette face efe_1f_1 par la face adjacente fgg_1f_1. Le plan horizontal inférieur coupe ces deux nouvelles faces suivant cd, fg qui se rencontrent en r, donc qr est le nouveau côté. En ce point r, le nouveau polygone pqr est encore arrêté.

Enfin, prenons comme dernière origine le point s sur a_1b_1, e_1g_1. Le plan horizontal inférieur donne ab, eg qui se rencontrent en δ, δs est l'intersection des deux faces abb_1a_1, egg_1e_1, la partie utile se réduisant à st.

Au point t, on se trouve à l'intérieur de la face abb_1a_1 que nous conservons, en remplaçant la face egg_1e_1 par la face adjacente eff_1e_1.

Le plan horizontal supérieur donne les horizontales a_1b_1, e_1f_1 qui se rencontrent en ε, donc $t\varepsilon$ est l'intersection des deux nouvelles faces abb_1a_1, eff_1e_1, la partie utile se réduisant à tu.

Nous voyons alors que la combinaison suivante est formée de eff_1e_1, bcc_1b_1 dont les horizontales inférieures se coupent en φ, tandis que les horizontales supérieures se coupent en ψ ; $\varphi\psi$ est l'intersection des deux nouvelles faces, elle doit passer par u et sa partie utile se réduit à uv. Enfin la dernière combinaison est formée de

bcc_1b_1 avec fgg_1f_1 pour lesquelles le plan horizontal supérieur donne le point x à l'intersection de b_1c_1, f_1g_1.

A ce moment, nous avons utilisé toutes les origines de polygones ouverts, m, o, p, r, s, x; or il ne reste plus qu'une case du tableau add_1a_1 eff_1e_1, il est donc inutile de l'essayer, de telle sorte que l'intersection se compose finalement des polygones ouverts *mno*, *pqr* et *stuvx*.

IV. — PONCTUATION.

96. — Proposons-nous dans cet exemple de figurer le système des deux corps solides et de même substance.

La première règle a toujours pour objet l'intersection, elle s'énonce ainsi :

1° *Un côté du polygone d'intersection est vu dans l'objet qu'il s'agit de représenter, lorsqu'il est donné par deux faces vues, en examinant chaque solide séparément.*

Dans l'application de cette règle, l'emploi du tableau (n° 95) est aussi très avantageux. Donnons en effet le signe + à chaque face vue, en examinant chaque polyèdre séparément, et le signe — à chaque face cachée. La règle précédente peut alors s'énoncer ainsi : la présence d'un seul signe — suffit pour que le côté correspondant soit caché.

Ainsi dans le tas de sable, la face inférieure *abcd* est cachée, nous lui donnons le signe —, tandis que toutes les autres faces sont vues, nous leur donnons le signe + (n° 95).

Pour le prisme, la face inférieure *efg* est évidemment cachée, elle a le signe —; la face supérieure $e_1f_1g_1$ au contraire est vue avec le signe +.

Ensuite l'arête gg_1 passant au-dessus de *ef* qui est dans le plan horizontal est vue, donc les faces egg_1e_1, fgg_1f_1 sont vues avec le signe +, tandis que la face eff_1e_1 est cachée avec le signe —.

Nous dirons donc : *mn* + dans la colonne + dans la tranche vu, *no* + + vu, *pq* — dans la colonne, + dans la tranche caché, *qr* + + vu, *st* + + vu, *tu* — + caché, *uv* — + caché, *vx* + + vu.

En deuxième lieu nous nous occuperons de la distinction entre les choses qui existent et celles qui n'existent plus. Cette règle s'énonce de la façon suivante :

2° *Dans le système des deux corps solides et de même substance, on enlève la surface de chaque corps contenue dans l'autre, attendu qu'une surface ne peut exister matériellement que si elle sépare deux surfaces de nature différente.*

Prenons alors successivement toutes les arêtes des deux corps;

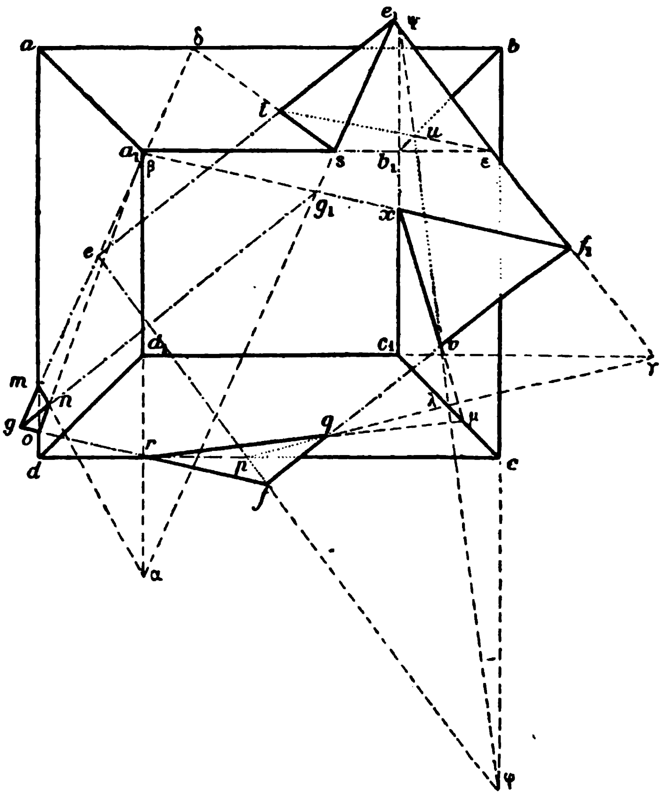


Fig. 28.

ad coupe le prisme en *m* et *o*, la région *mo* étant à l'intérieur du prisme est enlevée; *cd* coupant le prisme en *r* et *p* est enlevée entre ces deux points; c_1b_1 est de même enlevée de *x* à b_1 dans le prisme; il en est de même pour a_1b_1 entre *s* et b_1 et pour bb_1 entre *u* et b_1. Ces régions enlevées se marquent en traits mixtes ou avec tel autre trait distinctif que l'on voudra, ce trait étant dasn tous les cas différent des autres traits employés pour l'intelligence de l'épure.

La même règle nous montre que les portions d'arêtes *em*, *ep*, *ro*, sg_1, xg_1, *et*, ng_1, *qv* du prisme sont enlevées à l'intérieur du tas de sable.

Enfin, en dernier lieu, on s'occupe de la ponctuation de ce qui reste, nous dirons donc :

3° *Toute arête dans sa partie conservée aboutissant à un point vu du polygone d'intersection est vue aussi avant d'arriver au point; si, au contraire, elle aboutit à un point caché, elle est cachée avant d'arriver au point.*

Dans le plan horizontal supérieur, les portions conservées d'arêtes a_1s, e_1s, e_1f_1, f_1x, xc_1, c_1d_1, d_1a_1 restent évidemment vues.

L'arête bb_1 aboutissant au point caché *u* est cachée par le prisme avant d'arriver au point *u* et ne redevient vue qu'en sortant du contour apparent du prisme.

L'arête ee_1 du prisme, quittant le tas de sable en *t* qui est vu, reste vue dans la région conservée; il en est de même pour ff_1 qui est vue de *f* à *q* et de f_1 à *v*, puis de gg_1 qui est vue de *g* à *n*.

Quant à une arête telle que *ab*, nous dirons qu'elle est nécessairement cachée à l'intérieur du contour te_1f_1, parce qu'il est impossible dans une épure d'avoir des traits pleins qui se traversent à moins que dans l'espace les deux lignes considérées ne se rencontrent.

Nous dirons enfin qu'une arête telle que cc_1 coupant en projection le prisme sur une arête enlevée conserve sa ponctuation primitive, c'est-à-dire qu'elle reste vue de *c* à c_1. L'un des raisonnements précédents donnera la ponctuation des arêtes dont nous n'avons pas parlé.

97. — Ajoutons encore que le tableau (n° 95) nous conduit aux vérifications suivantes: les droites *vx*, *qr* par exemple, intersections de fgg_1f_1, bcc_1b_1 et fgg_1f_1, cdc_1d_1, doivent se couper en μ sur cc_1, intersection de $bc_1c_1b_1$ et cdd_1c_1. De même, *uv* et *pq* doivent se couper sur cc_1 au point λ commun aux trois faces eff_1e_1, bcc_1b_1, cdd_1e_1, etc.

CHAPITRE II

SECTION PLANE D'UN POLYÈDRE.

98. — On peut suivre, pour trouver une section plane d'un polyèdre, une marche identique à celle qui nous a donné l'intersection de deux polyèdres, en considérant le plan sécant comme la limite d'un polyèdre réduit à un plan illimité.

On peut aussi, lorsqu'il est permis d'employer des projections verticales, amener, comme nous le verrons plus tard, le plan sécant à être perpendiculaire au plan vertical, parce que dans ce cas on a immédiatement les intersections de ce plan successivement avec toutes les arêtes du polyèdre.

99. — **Exemple.** — *On donne d'abord une pyramide hexagonale régulière solide reposant par sa base* abcdef *sur le plan horizontal* (fig. 29), *le sommet* o *se projetant au centre de la base. On coupe ensuite cette pyramide par le plan horizontal* (3), *ce qui donne un hexagone* $a_1b_1c_1d_1ef_1$ *semblable au premier. Ce nouvel hexagone sert de base à une nouvelle pyramide régulière dont le sommet* o *a pour cote zéro. On ne conserve alors de la première pyramide que ce qui se trouve à l'extérieur de la seconde. Nous formons ainsi un nouveau solide dont on demande l'intersection avec le plan* P *défini par son échelle de pente.*

On demande enfin de représenter la portion de ce solide placée au-dessous du plan sécant.

Les faces du solide proposé se composent de abb_1a_1, bcc_1b_1, cdd_1c_1, dec_1d_1, eff_1e_1, faa_1f_1 appartenant à la première pyramide, puis a_1b_1o, b_1c_1o, c_1d_1o, d_1e_1o, e_1f_1o, f_1a_1o appartenant à la seconde; enfin de la face *abcdefo* dans le plan horizontal.

Pour faciliter les constructions, nous avons commencé par figurer les horizontales (1), (2) des différentes faces : elles sont parallèles aux traces horizontales de ces mêmes faces et partagent

successivement aa_1, bb_1, cc_1, etc., et oa_1, ob_1, oc_1, etc., en trois parties égales. Nous avons en même temps dessiné les horizontales (0), (1), (2), (3) du plan sécant P.

Commençons par exemple par la face abb_1a_1. Les horizontales (0) se coupent en m et les horizontales (1) en α, donc $m\alpha$ est

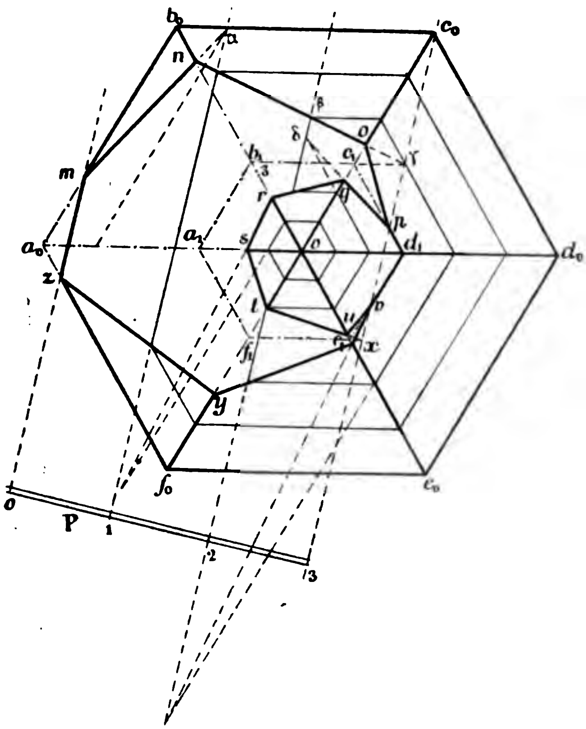


Fig. 29.

l'intersection de cette face et du plan sécant, la partie utile se réduisant à mn, à l'intérieur de la face considérée. Au point n, nous nous trouvons sur l'arête bb_1, il faut donc remplacer la face abb_1a_1 par la face adjacente bcc_1b_1. Nous connaissons un premier point n, les horizontales (2) se coupent en β et les horizontales (3) en γ, donc $n\beta\gamma$ est le nouveau côté, la partie utile se réduisant à no.

Nous passons alors dans la face cdd_1c_1 pour laquelle le plan horizontal (3) donne le nouveau point p; op est donc la partie utile.

Cette fois le point p se trouve sur c_1d_1, il faut donc remplacer la face cdc_1d_1 de la grande pyramide convexe par la face oc_1d_1 de la pyramide concave. Les horizontales (2) se coupent en δ, que l'on joint au point p pour en déduire la partie utile pq, et ainsi de suite.

Nous trouvons ainsi le polygone $mnopqrstuvxyzm$, dont les portions $mnop$, $vxyzm$ appartiennent à la pyramide convexe et la portion $pqrstuv$ à la pyramide concave.

La section est évidemment vue tout entière, puisqu'on enlève du solide tout ce qui est au-dessus du plan sécant. On n'a conservé ensuite du solide, avec sa ponctuation primitive, c'est-à-dire vue, que la région au-dessous du plan sécant. Ainsi am, az, aa_1, a_1b_1, nr, etc., sont enlevées. Enfin on a figuré aussi en traits pleins fins les horizontales (1), (2) des différentes faces du solide dans leurs parties utiles.

CHAPITRE III

I. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN POLYÈDRE.

100. — On fait passer par la droite un plan auxiliaire dont on détermine comme précédemment le polygone d'intersection avec le polyèdre.

On obtient ainsi un polygone, dont les points de rencontre avec la droite sont les points demandés.

Lorsqu'on a plusieurs projections à sa disposition, une horizontale et une verticale par exemple, il peut être avantageux d'employer l'un des plans projetants de la droite, parce qu'alors on a immédiatement son intersection avec le polyèdre. Mais, en géométrie cotée, il faut éviter de choisir le plan projetant horizontalement la droite A, parce que, pour mettre en évidence ce qui se passe dans le plan vertical, il faut faire une projection verticale en prenant une ligne de terre quelconque, ou une parallèle à A par exemple.

Il n'est pas toujours nécessaire de construire complètement le polygone d'intersection du plan auxiliaire avec le polyèdre, on peut laisser de côté toutes les faces qui n'ont aucune partie commune avec la droite en projection, et, si l'on avait à sa disposition une deuxième projection, on peut aussi négliger toutes les faces pour lesquelles ces parties communes ne se correspondent pas par des lignes de rappel.

II. — TÉTRAÈDRE ET DROITE.

101. — Exemple. — *Soit à trouver* (fig. 30) *l'intersection du tétraèdre* a (16) b (14) c (13) s (20) *avec la droite* A *définie par son échelle de pente.*

Nous commençons par figurer les horizontales des faces du

tétraèdre contenues dans les plans horizontaux à cote ronde entre (13) et (20).

La différence de cote entre *s* et *b* par exemple est 6. On a donc partagé *sb* en 6 parties égales, ce qui donne l'échelle de l'arête *sb*. En joignant *a* (16) au point *p* (16), on a suivant *ap* une horizontale du plan *sab*.

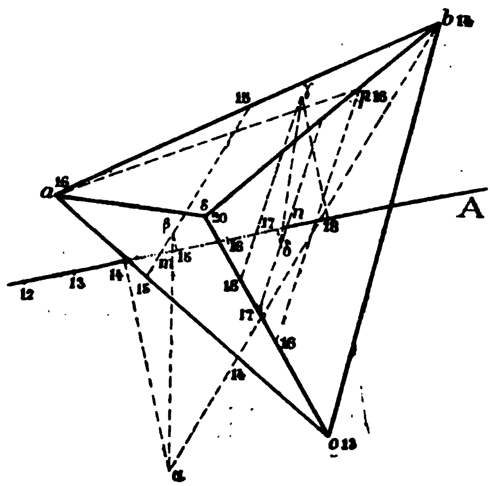


Fig. 30.

Les autres horizontales de la même face sont parallèles à *ap*. La même opération a été faite pour *sc*; on en déduit les horizontales de toutes les faces en remarquant qu'elles aboutissent deux à deux aux mêmes points sur les différentes arêtes. On a ensuite figuré les horizontales d'un plan passant par A; par exemple le plan admettant A comme ligne de plus grande pente. Nous l'appellerons le plan A.

Remarquons d'abord qu'il est inutile de prendre l'intersection de la droite A avec la face *sab*, la droite et la face n'ayant aucune partie commune en projection horizontale.

Prenons donc le plan A et la face *abc*; les horizontales (14) se coupent en α, puis les horizontales (15) se coupent en β, donc $\alpha\beta$ est l'intersection des deux plans. Cette droite $\alpha\beta$ coupe A au point *m* qui est utile, puisqu'il est à l'intérieur de *abc*; c'est donc l'un des points d'intersection cherchés.

Prenons ensuite le plan auxiliaire A et la face *sbc*, les horizon-

tales (18) se coupent en γ et les horizontales (17) en δ ; la droite $\gamma\delta$ rencontre A en *n* qui est également utile, c'est par conséquent le point d'intersection cherché.

En résumé, les points d'intersection demandés sont *m* (14,9) et *n* (17,1).

Dans l'épure, on a représenté le système formé par la droite illimitée et le tétraèdre solide et de même substance que la droite.

La portion de la droite à l'intérieur du tétraèdre *mn* est enlevée. En marchant dans le sens *mn* sur la droite, on arrive au point *m* qui est caché dans le plan *abc*; donc la droite, avant d'arriver en *m*, est cachée par le tétraèdre et n'est vue de ce côté qu'en dehors du contour apparent *ac* du tétraèdre.

Au contraire, le point *n* étant vu dans la face *sbc*, la région de A à droite de *n* est vue tout entière.

III. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE PYRAMIDE.

102. — Dans le cas particulier où le polyèdre considéré est une pyramide, il est généralement plus avantageux de choisir comme plan auxiliaire passant par la droite celui qui passe en même temps par le sommet de la pyramide. De cette façon, le polygone d'intersection est réduit à sa plus simple expression, puisqu'il se réduit à deux droites, en supposant la pyramide convexe.

Soit, par exemple, la pyramide S*abcde* (fig. 31) et la droite F.

Par le sommet S et par la droite F, nous menons un plan, dont nous cherchons la trace *f* sur le plan de base. Cette trace *f* rencontre la base en un certain nombre de points *m*, *n*. En joignant S*m*, S*n*, on aura les droites d'intersection du plan auxiliaire avec la pyramide. Enfin, ces droites S*m*, S*n* rencontrent la droite donnée F aux points cherchés M, N.

Il est à remarquer que cette façon de procéder permet de trouver les points utiles aussi bien que les points inutiles. Nous reconnaissons, par exemple, que M est un point utile, c'est-à-dire qu'il est bien à l'intérieur de la face S*ab*; cela tient à ce que le point *m* est à l'intérieur du segment *ab*.

Si donc nous voulons de la même façon trouver l'intersection de F avec le plan S*de*, il suffit de joindre S au point de rencontre

de f avec de et de prendre l'intersection P de cette droite Sp avec F. Seulement, le nouveau point ainsi obtenu est inutile, pour l'objet qui nous occupe, parce que p se trouve en dehors du segment de et qu'alors P se trouve en dehors de la face Sde.

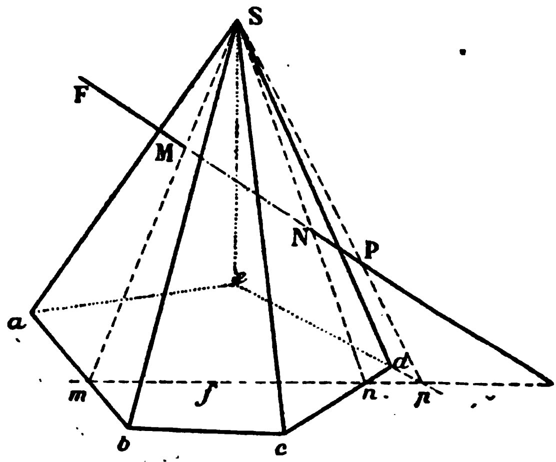


Fig. 31.

103. — Si, au lieu d'une pyramide, on avait un prisme, il faudrait alors choisir comme plan auxiliaire un plan passant toujours par la droite, mais parallèle aux arêtes du prisme.

104. — Remarquons, enfin, que la méthode précédente est indépendante du nombre des côtés de la base de la pyramide ou du prisme, ainsi que de leur grandeur; elle sera donc applicable également aux cônes ou aux cylindres.

CHAPITRE IV

I. — INTERSECTIONS DE PRISMES ET DE PYRAMIDES.

105. — Pour trouver l'intersection de deux pyramides, nous avons dit que l'on cherchait de préférence les sommets du polygone, c'est-à-dire les points de rencontre des arêtes de l'une des pyramides avec l'autre pyramide.

Nous emploierons à cet effet des plans auxiliaires passant par une arête d'une pyramide et par le sommet de l'autre. Les plans auxiliaires doivent donc passer par les sommets des deux pyramides. Il est évident d'ailleurs qu'en faisant tourner un plan auxiliaire autour de la droite qui joint les deux sommets, on peut le faire passer successivement par toutes les arêtes des deux pyramides.

D'ailleurs, étant donné un tel plan passant par le sommet d'une pyramide, pour trouver son intersection avec cette pyramide, il est nécessaire de connaître la trace du plan auxiliaire sur le plan de base.

Nous remarquerons donc : 1° que les traces de tous les plans auxiliaires sur les deux plans de base passent par deux points fixes qui sont les points de rencontre de la ligne des sommets avec les deux plans de base ; 2° que les deux traces d'un même plan auxiliaire sur les deux plans de base rencontrent l'intersection des deux plans de base au même point.

Lorsque les deux bases se trouvent dans le même plan, on se contente de remarquer que les traces des plans auxiliaires sur le plan de base commun passent par un point fixe qui est la trace de la ligne des sommets sur le plan de base commun.

Dans le cas d'un prisme et d'une pyramide, on remplacera la ligne des sommets des deux pyramides par une parallèle aux arêtes du prisme menée par le sommet de la pyramide ; autrement dit, les plans auxiliaires seront menés par le sommet de la pyra-

mide, parallèlement aux arêtes du prisme. Enfin, dans le cas de deux prismes, on choisira comme plans auxiliaires des plans parallèles aux arêtes des deux prismes.

106. — Exemple. — *Soit à déterminer l'intersection de deux pyramides* Sabc, S_1def, *définies par leurs bases* abc, de *dans le plan horizontal, et par leurs sommets dont on a les projections horizontales* S, S_1 *et les côtes* (7), (16) (fig. 32).

Nous commençons par déterminer la trace de la ligne des sommets S (7), S_1 (16) sur le plan de base commun, c'est-à-dire sur le plan horizontal. Pour cela nous avons partagé l'intervalle SS_1 en 9 parties égales, et nous avons continué les divisions jusqu'au

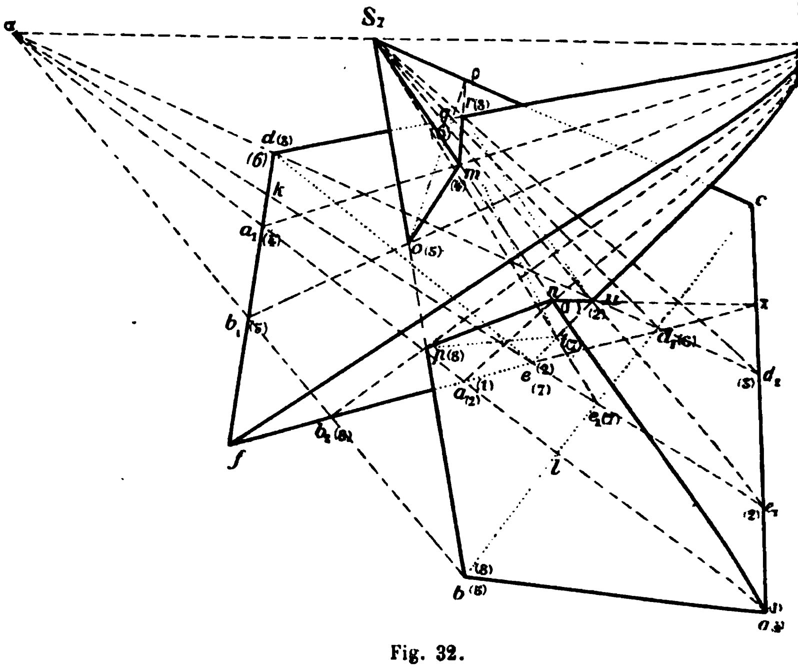


Fig. 32.

point σ (0). Prenons comme premier plan auxiliaire le plan passant par l'arête S*a*. Sa trace horizontale est σ*a*, qui rencontre la base *def* aux points a_1, a_2. Le plan auxiliaire coupe donc la pyramide S suivant S_1a_1, S_1a_2, qui rencontrent S*a* aux points *m*, *n*. Ces deux points *m* et *n* sont donc deux sommets du polygone, ce sont les points de rencontre de l'arête S*a* successivement avec les deux faces S_1df, S_1ef.

De même le plan $SS_1\sigma b$ passant par l'arête Sb coupe la pyramide S_1 suivant S_1b_1, S_1b_2, qui rencontrent Sb en o, p, lesquels sont deux nouveaux sommets du polygone.

Nous remarquons maintenant que le plan $SS_1\sigma c$ passant par l'arête Sc ne coupe pas la pyramide S_1, puisque σc ne rencontre pas la base def. Il faut donc passer à la pyramide S_1 en continuant de suivre l'ordre alphabétique pour être certain de ne pas oublier des arêtes de l'une ou de l'autre pyramide.

Le plan passant par S_1d a pour trace horizontale σdd_1d_2, il coupe la pyramide S suivant Sd_1, Sd_2, qui donnent les deux nouveaux sommets q, r. Enfin, le plan $SS_1\sigma e$ coupe la pyramide S suivant Se_1, Se_2, qui donnent les derniers sommets t, u.

Nous disons ici que nous trouvons les derniers sommets, parce que le plan passant par l'arête S_1f ne coupe pas la pyramide S. Nous sommes donc bien certains d'avoir tous les sommets et de n'en avoir oublié aucun.

107. — Il reste maintenant à joindre les différents points ainsi obtenus. Pour cela, nous remarquerons qu'étant donné en n un sommet quelconque du polygone, à ce point correspondent toujours deux autres points parfaitement déterminés a, a_2 sur les deux bases. Ces deux points sont les points de rencontre de Sn et S_1n avec les deux bases.

Considérons ces trois points n, a, a_2 comme trois mobiles assujettis à rester ensemble dans le même plan auxiliaire. Pendant que les deux mobiles a, a_2 décriront les deux bases, le mobile n se déplacera sur l'intersection.

Donnons le numéro 1 aux positions initiales de ces trois mobiles. Faisons maintenant tourner la trace du plan auxiliaire autour de σ. La première trace rencontrée est σee_2.

Le mobile qui était en a sur abc arrive en e_2, celui qui était en a_2 arrive en e, nous joignons Se_2, S_1e, ce qui donne le point u comme point d'intersection; nu est alors un côté du polygone d'intersection. Inscrivons 2 en e_1, e, u.

La façon de joindre les points n'étant pas identique à celle que nous avions employée dans le cas de deux polyèdres, il convient de la justifier. Nous allons par exemple montrer que nu est l'intersection des deux faces Sac, S_1ef.

En effet, prenons comme premier plan auxiliaire le plan $SS_1\sigma aa_2$, il coupe Sac suivant Sa, S_1ef suivant S_1a_2, d'où le point n.

Prenons ensuite comme plan auxiliaire le plan $SS_1\sigma ee_2$, il coupe Sac suivant Se_2, et S_1ef suivant S_1e, ce qui donne le point u. Nous disons de plus que n et u sont les extrémités de la partie utile : cela tient à ce que la méthode employée permet de marquer à l'avance tous les sommets utiles et rien que ces sommets utiles.

Cependant il peut se faire que la partie utile de l'intersection soit comprise entre les deux sommets n et u comme dans l'exemple précédent, ou bien en dehors de ces deux sommets.

Le plan auxiliaire tournant toujours dans le même sens, il vient prendre la position σdd_2 ; les positions correspondantes des mobiles de base sont d_2 pour la base abc, d pour la base def, ce qui donne Sd_2, S_1d, et par suite le point r; ur est donc un nouveau côté du polygone.

Arrivé à la position σdd_2, nous remarquons que le plan auxiliaire ne peut plus continuer dans le même sens, parce qu'autrement il ne couperait plus la base def. On dit que le plan σdd_2 est limite, et en particulier limite pour la pyramide S_1.

Le plan auxiliaire doit donc marcher maintenant en sens contraire du sens précédent. Sur la base abc, le mobile qui a déjà parcouru le chemin ae_2d marche nécessairement en sens contraire pour revenir en e_2.

Sur la base def, le mobile qui a parcouru le chemin a_2ed peut soit revenir sur ses pas en e, soit continuer dans le même sens jusqu'au point k. Si l'on revenait en e, en joignant Se_2, S_1e, on retrouverait le point précédemment obtenu u ; donc il est nécessaire sur la base abc de continuer dans le même sens.

108. — Règle. — 1° *Lorsque le plan limite touche ou bien est rasant, le mobile marche en sens contraire;*

2° *Lorsque le plan limite coupe, le mobile continue dans le même sens.*

Les nouvelles positions des mobiles de base sont donc e_2 et le point k qui n'était pas marqué, et cependant nous sommes certains d'avoir déterminé tous les sommets du polygone. Cela tient à ce qu'il ne faut pas s'arrêter à cette position particulière du plan sécant. En joignant S_1k, Se_2, on trouverait bien un point du polygone d'intersection, mais ce point serait compris entre deux sommets consécutifs, il est donc inutile de le marquer. Nous dirons même à ce sujet que, si les deux sommets du polygone d'intersection étaient trop rapprochés l'un de l'autre, il serait

bon alors, au point de vue de l'exactitude, de déterminer un point supplémentaire, mais en ayant soin de le chercher en dehors des deux sommets. Il faudrait alors employer un plan auxiliaire en dehors des deux plans qui ont donné les sommets précédents.

Le plan auxiliaire dépassera donc la position ke_2 pour venir en aa_1, ce qui donne le sommet *m*.

La position suivante du plan auxiliaire est σbb_1, qui donne le sommet *o*. Nous atteignons ainsi un plan limite, le plan auxiliaire marche en sens contraire. Sur la base *def*, comme le plan limite coupe, nous marchons en sens contraire, mais sur la base *abc*, puisque le plan limite touche, nous continuons dans le même sens. Nous passons d'abord le plan σaa_1, parce que le point *l* est inutile, il en est de même du plan σkee_1 à cause du point inutile *k*, et nous allons jusqu'au plan σdd_1 qui donne les points *d*, d_1 et *q*. De cette position limite, nous revenons dans le plan σee_1, ce qui donne le point *t*, puis au plan σbb_2 qui donne le point *p*, et enfin dans le plan σaa_2 qui donne le point de départ.

Lorsque le polygone est fermé, il peut rester certains sommets non employés; il faut alors prendre l'un d'eux comme nouvelle origine, ce qui permet de former un nouveau polygone d'intersection.

109. — Vérifications. — Étant donnés sur un côté de l'une des bases, *df* par exemple, deux groupes de nombres consécutifs, 34, 56 par exemple, les mêmes nombres 34 se trouvent sur un côté *ac* de l'autre base et 56 sur un côté différent *bc* de cette même base. Ceci prouve que les droites *mr* (34) et *oq* (56) sont les intersections de la face S_1df (34 et 56) successivement avec les faces S*ac* (34) et S*bc* (56). Donc, les deux droites *mr*, *oq* doivent se couper sur l'intersection S*c* des deux faces S*ac*, S*bc* au point ρ.

De même, *nu*, *pt* se coupent sur S*c* et ainsi de suite.

On peut signaler aussi comme vérification que le côté *nu* par exemple, intersection des faces S*ac*, S_1ef, passe par le point de rencontre π des traces horizontales *ac* et *ef* des deux faces considérées.

110. — Pénétration. — Arrachement. — L'exemple que nous venons d'étudier s'appelle un arrachement, parce que l'intersection se réduit à un seul polygone. Si l'intersection était composée de deux polygones, on dirait que l'intersection est une

pénétration. Sans construire le polygone, on peut reconnaître à l'avance sa nature, d'après la disposition des plans limites.

Cette distinction, d'ailleurs, suppose que chaque base est un polygone convexe, de telle sorte que par σ on ne peut lui mener que deux droites la coupant en un seul point. Ces droites sont les traces des plans limites. Nous avons donc en tout quatre plans limites possibles. Seulement il y a lieu de distinguer entre les plans limites utiles et ceux qui ne servent pas. Pour qu'un plan limite soit utile, il faut qu'il soit d'abord rasant pour une pyramide, et qu'en même temps il coupe l'autre pyramide. On peut donc avoir 0, 1, 2, 3, 4 plans limites utiles, suivant la position du point σ par rapport aux deux bases.

Dans la figure 33, il n'y a aucun plan limite utile, le point σ étant à l'intérieur des deux bases. Dans la figure 34, nous avons

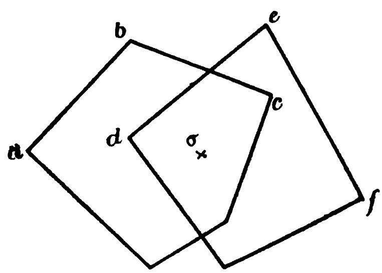


Fig. 33.

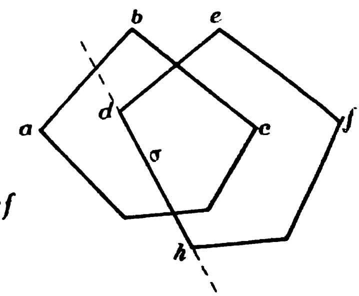


Fig. 34.

un seul plan limite utile *dσh*, parce que le point σ se trouve sur *deh* et à l'intérieur de *abc*.

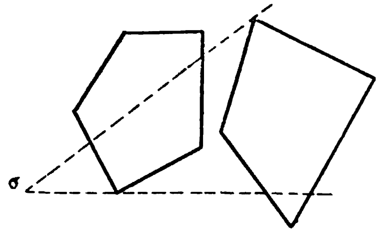


Fig. 35.

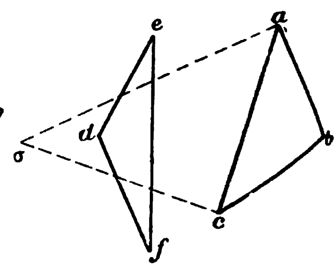


Fig. 36.

La figure 35 est l'exemple d'un plan limite utile pour chaque pyramide. Dans la figure 36, nous avons deux plans limites utiles

seulement pour *abc*. Ensuite la figure 37 montre trois plans limites utiles, un pour *abc*, les deux autres pour *def*; cela tient à ce que le point σ se trouve sur *abc*. Enfin, la figure 38 montre un exemple de quatre plans limites utiles.

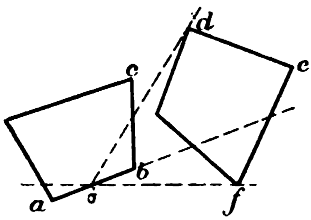


Fig. 37.

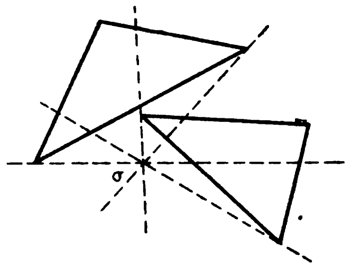


Fig. 38.

En suivant le polygone dans chacun de ces exemples comme nous l'avons fait dans l'épure, on reconnaît, en résumé, qu'il y a arrachement, c'est-à-dire un seul polygone, lorsqu'il existe un nombre impair de plans limites utiles pour l'un des corps. Il y a au contraire pénétration et, par suite, deux polygones, lorsqu'il existe un nombre pair de plans limites utiles pour chaque corps.

Ce qu'il faut retenir de cette distinction en pénétration ou arrachement, c'est surtout la façon de choisir les bases pour être certain d'avoir soit un, soit deux polygones, car le fait d'en connaître le nombre n'avance en quoi que ce soit leur détermination. N'oublions pas, de plus, que cette distinction perd toute espèce de sens quand les bases sont des polygones concaves.

II. — PONCTUATION.

111. — La réunion de deux surfaces ou solides permet avec elles de former un certain nombre d'objets qui ont chacun leur ponctuation distincte et l'on peut, à l'inspection de l'épure, reconnaître la nature de chacun d'eux.

Pour mettre en évidence ces différents objets, nous conviendrons de figurer par deux courbes C, C_1 les sections des deux surfaces par un même plan, et de remplir avec des hachures l'intérieur de chaque section, lorsque l'objet à représenter est un solide.

Ainsi la figure 39 représente le système des deux corps solides et de même substance. — La figure 40 donne la partie solide de S extérieure à S_1; la figure 41 est au contraire la partie solide de S_1 extérieure à S. — Dans la figure 42, nous avons le solide commun.

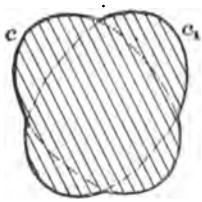


Fig. 39.

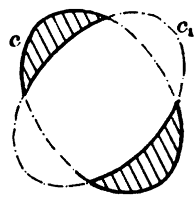


Fig. 40.

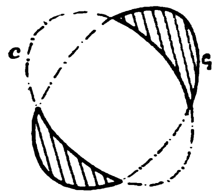


Fig. 41.

Les solides 40 et 42 donnent, quand on les réunit, le solide S. De même les solides 41 et 42 réunis complètent le solide S_1. Enfin, les solides 40, 41, 42 réunis donnent le solide 39. Il y

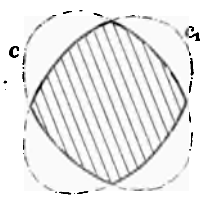


Fig. 42.

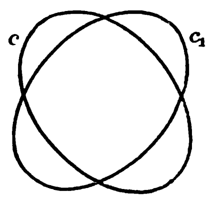


Fig. 43.

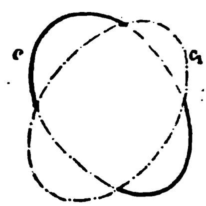


Fig. 44.

aurait d'autres combinaisons analogues, en supposant S et S_1 solides à l'extérieur au lieu de les supposer solides à l'intérieur comme nous venons de le faire.

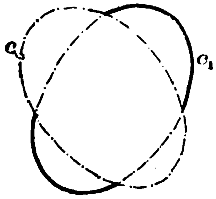


Fig. 45.

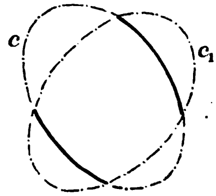


Fig. 46.

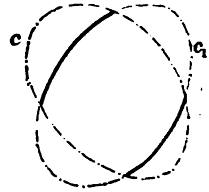


Fig. 47.

Pour représenter des surfaces ou fragments de surfaces, on se contentera, comme schéma, des courbes C et C_1 sans hachures.

Ainsi la figure 43 représente le système des deux surfaces. La

figure 44 est la surface de S extérieure à S_1, tandis que la figure 45 donne la surface de S_1 extérieure à S.

Puis la figure 46 représente la surface de S contenue dans S_1, tandis que la figure 47 représente la surface de S_1 contenue dans S.

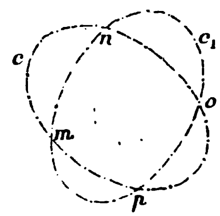


Fig. 48.

Le solide 40 a sa surface composée des surfaces 44 et 47. De même le solide commun 42 a pour surface la réunion des fragments 46 et 47.

Enfin, si l'on voulait représenter l'intersection par le même procédé, on devrait marquer simplement les quatre points *m*, *n*, *o*, *p* (fig. 48).

On représente rarement cet objet, dont la ponctuation ne présente aucun intérêt, l'intersection étant vue tout entière, et les surfaces primitives complètement enlevées.

112. — Système des deux corps solides et de même substance. — Quel que soit l'objet à représenter, nous procéderons toujours de la façon suivante. En premier lieu, nous nous occuperons de l'intersection. Ensuite, nous établirons la distinction entre les choses qui existent et celles qui n'existent pas. Enfin, on établira la ponctuation de ce qui reste.

113. — 1[re] *règle.* — Dans le système des deux corps solides et de même substance, un côté du polygone d'intersection est vu, lorsqu'il est donné par deux faces vues, en examinant chaque corps séparément.

Si l'on donne à chaque côté un double signe, le signe supérieur se rapportant à S, le signe inférieur à S_1, $+$ voulant dire vu et — caché, la règle précédente peut alors s'énoncer ainsi : la présence d'un seul signe — suffit pour que le côté soit caché.

Dans notre exemple (fig. 32), les faces S*ab*, S*ac* sont vues, tandis que la face S*bc* est cachée, en supposant la pyramide S solide seule et conservée tout entière. Dans les mêmes conditions, ce sont les faces S_1df, S_1ef qui sont vues, tandis que la face S_1de est cachée pour la pyramide S_1.

Le côté 12 ou *nu*, provenant des faces S*ac*, S_1de qui sont vues, est donc vu aussi, il a pour double signe $\frac{+}{+}$.

Maintenant que nous connaissons le double signe de *nu*, il est inutile de s'occuper des bases, la ponctuation des autres côtés se

déduisant de celle du premier. Au point *u*, on atteint le contour apparent de S_1, il y a donc changement de ponctuation sur S_1 ou changement de signe inférieur, ce qui donne pour *ur* le signe $\pm$. Ce côté est donc caché. En *r* changement de signe inférieur. *rm* $\substack{+\\+}$ est vu. En *m* il n'y a pas de contour apparent, il n'y a donc pas de changement de signe, *mo* reste vu avec le signe $\substack{+\\+}$. Au point *o*, on atteint le contour apparent de S, changement de signe supérieur, *oq* $\mp$ est donc caché. Le point *q* appartient au contour apparent de S_1, il y aura en ce point changement de signe inférieur; le côté suivant *qt* a donc pour double signe $=$, il est caché.

Au point *t*, changement de signe inférieur, *tp* $\mp$ est toujours

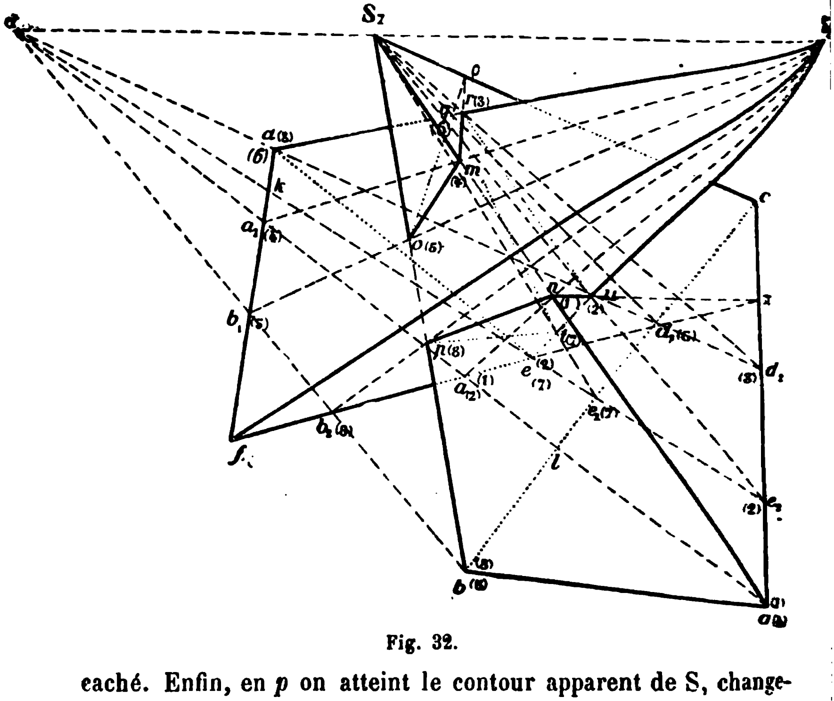


Fig. 32.

caché. Enfin, en *p* on atteint le contour apparent de S, changement de signe supérieur, *pn* $\substack{+\\+}$ est vu.

114. — 2ᵉ *règle*. — Dans le système des deux corps solides et de même substance, la surface de chaque corps contenue dans l'autre n'existe plus, car une surface ne peut exister matériellement que si elle sépare deux milieux de nature différente. Il faut

donc enlever les portions d'arêtes de chaque pyramide contenues dans l'autre. Ces régions enlevées se figurent en traits mixtes. Le sommet S étant manifestement en dehors de la pyramide S_1, l'arête S*a* coupe S_1 en *m* et *n*, la région *mn* de S*a* se trouve donc dans S_1, et par suite ce segment *mn* est enlevé. Il en est de même pour *op* de l'arête S*b*, puis pour *qr* et *tu* des arêtes S_1d, S_1e.

115. — 3e *règle.* — Toute arête de l'un des corps, dans sa partie conservée, aboutissant à un sommet vu du polygone d'intersection, est vue aussi avant d'arriver à ce point; si, au contraire, elle aboutit à un point caché, elle est cachée un certain temps avant d'arriver au point.

Dans notre épure (fig. 32), l'arête S*a* en partant de S aboutit au point *m* qui est vu, donc S*m* est vue, elle quitte la pyramide S_1 au point *n* qui a été reconnu vu, donc *na* est encore vue.

De même, l'arête S*b* coupe S_1 aux points vus *o*, *p*, donc les régions conservées S*o*, *pb* sont encore vues.

L'arête S_1d, aboutissant au point *r* qui est vu, est vue aussi dans la région S_1r. Elle quitte la pyramide S au point *q* qui est caché; donc, dans le voisinage de ce point, l'arête S_1d est cachée par la pyramide S, et elle ne redevient vue qu'après avoir quitté le contour apparent S*b* de S.

De même, l'arête S_1e aboutit au point *u* qui est vu, elle est vue jusqu'à ce point; elle quitte la pyramide S au point *t* qui est caché, donc la région *te* est cachée.

L'arête S*c* sur laquelle il n'y a pas de points d'intersection est nécessairement cachée à l'intérieur du contour apparent de S_1, parce qu'il est impossible d'avoir des traits pleins qui se traversent. Ce résultat démontre en même temps que l'arête S_1f est vue tout entière.

Enfin, les côtés *ab*, *bc*, *df* et une portion de *fc* restent vus comme contours apparents.

116. — Système des deux corps solides et de substance différente, S étant plus dense que S_1. — Nous remarquons d'abord qu'il est impossible de représenter le système des deux corps solides de substance différente, sans ajouter autre chose à l'énoncé, parce qu'à l'intérieur du solide commun, il est impossible d'avoir simultanément deux substances différentes. Nous avons donc ajouté S plus dense que S_1, ce qui

veut dire que S est conservé tout entier, tandis que S_1 est entamé pour laisser de la place à S. L'aspect extérieur de ce nouveau solide est le même que celui du précédent. La seule différence porte sur ce fait que la pyramide S est conservée tout entière, donc les portions d'arêtes *mn*, *op*, au lieu d'être enlevées, sont conservées, mais cachées à l'intérieur de S_1.

117. — Système des deux surfaces. — L'aspect extérieur de ce nouvel objet est aussi le même que celui des deux corps solides et de même substance, à moins que l'observateur ne se trouve à l'intérieur de l'un des corps ou des deux.

La seule différence porte sur ce fait que les surfaces des deux pyramides sont conservées complètement. Donc les portions d'arêtes *mn*, *op*, *qr*, *tu*, au lieu d'être enlevées, sont conservées, mais cachées.

118. — Partie solide de S extérieure à S_1. — Cet objet est un fragment du solide S. Chaque fois que nous aurons à faire un fragment d'objet, nous établirons d'abord la ponctuation

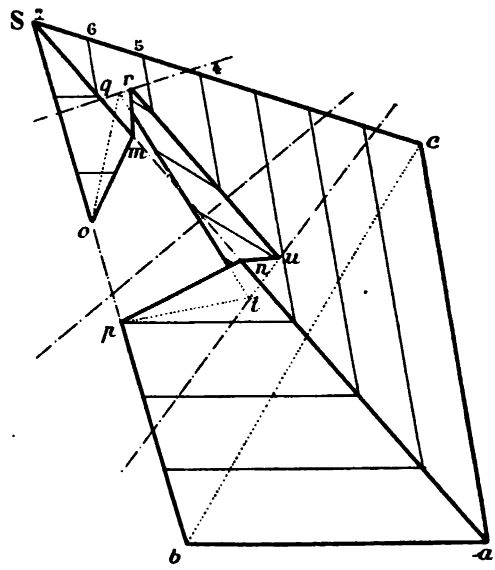


Fig. 49.

du polygone sur cet objet conservé tout entier, puis nous chercherons la ponctuation des choses qui restent.

1re *règle*. — On établit la ponctuation du polygone sur la pyramide S supposée solide, seule et conservée tout entière.

Cette ponctuation est donnée par le signe supérieur. Nous avons donc *om*, *mr*, *ru*, *un*, *np* qui sont vues, tandis que *oq*, *qt*, *tp* sont cachées (fig. 49).

2e *règle*. — Comme le dit l'énoncé, on conserve avec sa ponctuation primitive la surface de S extérieure à S_1.

Les arêtes de la pyramide S conservent donc leur ponctuation primitive, sauf *mn* et *op* qui sont enlevées.

3e *règle*. — On conserve la surface de S_1 contenue dans S.

Les arêtes de la pyramide S_1 sont donc enlevées complètement, sauf les portions *qr* et *tu* qui sont ici cachées à l'intérieur de S.

4e *règle*. — Enfin, une partie du polygone d'intersection peut redevenir vue comme contour apparent; c'est ici une portion du côté *qt*.

Nous avons figuré dans chaque face du polyèdre ainsi formé les horizontales à cote ronde.

119. — Solide commun. — Cet objet est, comme le précédent, un fragment de l'un des corps.

1re *règle*. — On établit la ponctuation du polygone sur l'un des corps supposé solide, seul et conservé tout entier. On peut choisir celui des deux corps que l'on veut ou successivement tous les deux. Autrement dit, la présence d'un seul signe + suffit pour que le côté soit vu.

Par exemple, sur S, on a *omrunp* vu et *oqtp* caché (fig. 50).

2e *règle*. — On conserve avec sa ponctuation primitive la surface de chaque corps contenue dans l'autre.

Les portions d'arêtes *mn*, *op*, *qr*, *tu* sont donc conservées et vues.

3e *règle*. — Une partie du polygone d'intersection peut redevenir vue comme contour apparent, c'est ce qui a lieu pour *pt*, *oq*.

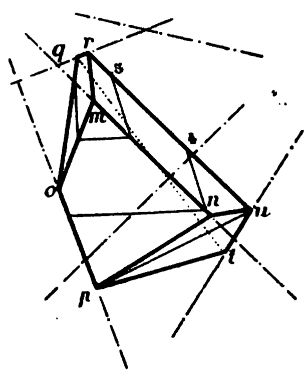


Fig. 50.

Nous avons figuré dans chaque face du solide commun les horizontales à cote ronde.

120. — Surface de S extérieure à S_1. — Ce nouvel objet est un fragment de la surface de S. Nous dirons donc :

1re *règle.* — On établit la ponctuation du polygone sur la pyramide S réduite à sa surface opaque, seule et conservée tout entière. Cette ponctuation est donnée par le signe supérieur (fig. 51).

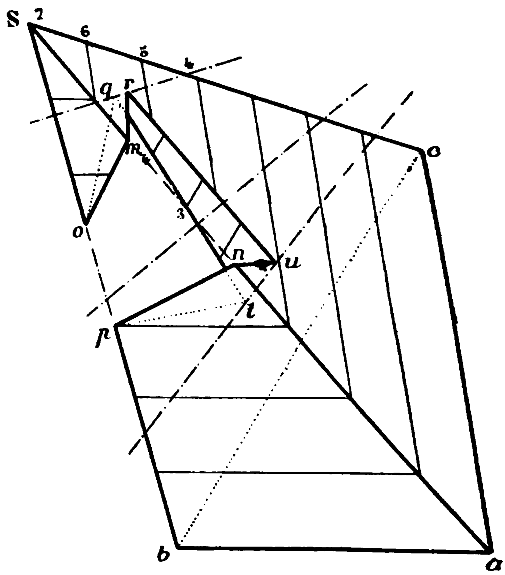


Fig. 51.

Nous avons donc *omrunp* vu et *oqtp* caché.

2e *règle.* — On conserve avec sa ponctuation primitive la surface de la pyramide S extérieure à S_1. Donc les arêtes de la pyramide S conservent leur ponctuation primitive, sauf les régions *mn, op* qui sont enlevées.

3e *règle.* — La pyramide S_1 est enlevée tout entière, que l'on considère cette pyramide soit comme solide, soit comme surface, donc les arêtes de la pyramide S_1 sont enlevées complètement.

4e *règle.* — Une partie du polygone d'intersection peut redevenir vue comme contour apparent, c'est ce qui arrive pour une portion du côté *tq*. Nous avons figuré dans leur région vue les horizontales des fragments de plans ainsi conservés.

121. — Surface de S contenue dans S_1. — Ce dernier

objet est toujours un fragment de la surface de S. Nous dirons donc (fig. 52) :

1re *règle.* — On établit la ponctuation du polygone sur la pyramide S réduite à sa surface opaque, seule et conservée tout entière.

2e *règle.* — On conserve avec sa ponctuation primitive la surface de S contenue dans S_1. Donc les portions d'arêtes *mn*, *op* sont conservées et vues.

3e *règle.* — La pyramide S_1 est enlevée complètement, qu'on la considère soit comme solide, soit comme surface.

4e *règle.* — Une partie du polygone d'intersection redevient vue comme contour apparent. Dans le cas actuel, il s'agit de *oq*, de *pt* et des portions de *qt* en dehors de *rm* et de *pn*.

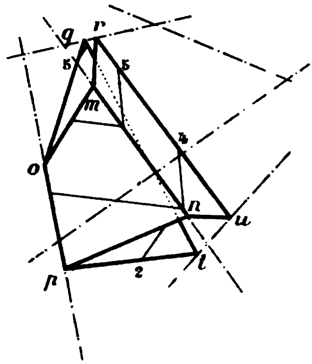


Fig. 52.

Nous avons également figuré les horizontales de chacune des faces, dans leur portion conservée et vue.

III. — SECTION PLANE D'UN PRISME OU D'UNE PYRAMIDE.

122. — Outre la méthode générale de l'intersection de deux polyèdres et celle qui consisterait à prendre un plan vertical de projection perpendiculaire sur le plan sécant, en choisissant comme ligne de terre une perpendiculaire sur la trace horizontale du plan sécant, on peut aussi employer une méthode analogue à celle qui donne l'intersection de deux pyramides.

Par le sommet S de la pyramide, on mène une droite quelconque fixe et l'on choisit des plans auxilaires passant tous par cette droite fixe et successivement par toutes les arêtes de la pyramide. Si, au lieu d'une pyramide, on avait un prisme, on choisirait comme plans auxiliaires des plans passant par une droite fixe parallèle aux arêtes du prisme. L'avantage de cette méthode est de pouvoir s'appliquer également aux cônes et aux cylindres.

Soit la pyramide S*abcdef* définie par sa base *abcdef* dans le plan horizontal et son sommet S dont on a la projection horizontale S

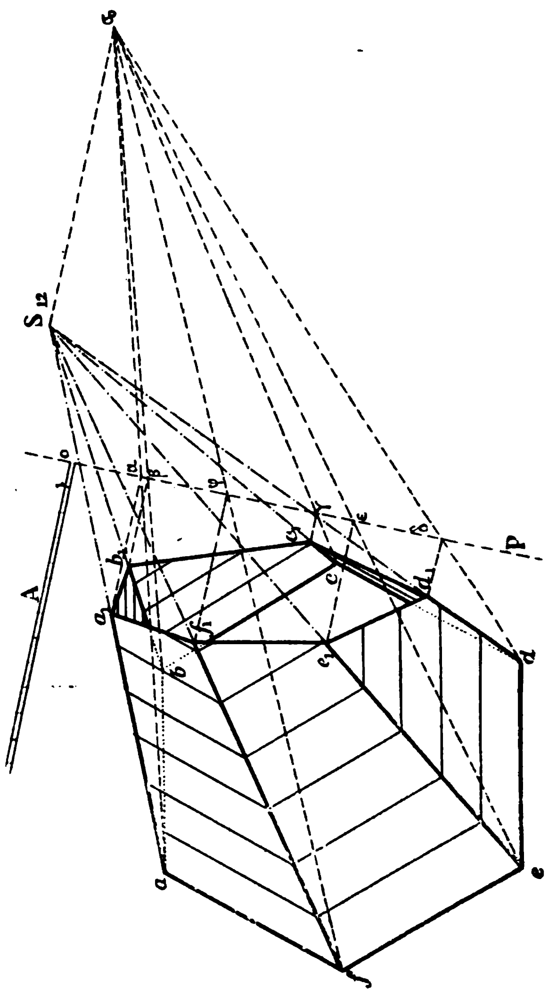


Fig. 53.

et la cote (12) (fig. 53), puis un plan sécant défini par son échelle de pente A.

Menons par le sommet S une droite quelconque, par exemple la parallèle à la ligne de plus grande pente du plan sécant ; cette

droite a pour trace sur le plan de base, c'est-à-dire sur le plan horizontal, le point σ (0). Prenons ensuite un plan auxiliaire passant par cette droite Sσ. Sa trace horizontale passera par le point fixe σ. D'un autre côté, sa trace sur le plan sécant sera parallèle à Sσ. Si l'on avait choisi une autre droite arbitraire, la trace du plan auxiliaire sur le plan séeant aurait passé par la trace de la droite donnée sur le plan sécant. De plus, les traces du plan auxiliaire sur le plan de base et sur le plan sécant rencontrent la trace P du plan sécant sur le plan de base au même point.

Ainsi, le plan passant par Sa a pour trace sur le plan de base σa; sa trace sur le plan sécant est la parallèle à Sσ menée par α. Cette parallèle rencontre Sa au point demandé a_1. La même opération a été répétée successivement pour toutes les autres arêtes et elles ont donné les points b_1, c_1, d_1, e_1, f_1.

Le grand avantage de ce procédé, c'est qu'il permet de trouver tous les points pour ainsi dire mécaniquement, sans avoir à répéter chaque fois le même raisonnement.

On dessinera donc simultanément toutes les droites σa, σb, σc, σd, σe, σf, dont on marquera les points de rencontre α, β, γ, δ, ε, φ avec P. Puis, par ces différents points, les équerres étant en place, on dessinera simultanément toutes les parallèles αa_1, βb_1, γc_1, δd_1, εe_1, φf_1, en marquant chaque fois le point correspondant a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1.

Il ne reste plus enfin qu'à joindre les différents points ainsi obtenus dans le même ordre que les points correspondants de la base.

123. — Ponctuation. — Nous avons représenté la surface opaque de la pyramide comprise entre le plan sécant et le plan de base.

Reconnaissons d'abord que la région vue de la base est *defa*, car, si nous prenons la verticale qui s'appuie sur Se et sur bc, elle rencontre bc en un point de cote nulle et Se en un point compris entre e et S dont la cote est positive.

Nous établissons ensuite la ponctuation du polygone sur la pyramide conservée tout entière. Dans ces conditions, la ponctuation d'un sommet du polygone est la même que celle du point correspondant de la base, parce que ces points sont ici sur la même nappe de la pyramide; donc $d_1e_1f_1a_1$ est vu.

Nous conservons ensuite avec sa ponctuation primitive la surface

de la pyramide comprise entre le plan de base et le plan sécant; dd_1, ee_1, ff_1, aa_1 sont conservées et vues, bb_1 et cc_1 étant cachées.

Ajoutons ensuite que la région $a_1b_1c_1d_1$ redevient vue comme contour apparent, et comme le plan $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$ est transparent, les arêtes de la pyramide redeviennent vues à l'intérieur de ce contour.

Par exemple cc_1 redevient vue complètement; il en est ainsi de la portion de bb_1 voisine de b_1, ainsi que des portions de cb et cd voisines de c.

Nous avons figuré les horizontales à cote ronde qui sont vues dans les régions conservées des différentes faces. Il en résulte que par la même occasion les arêtes se trouvent graduées et qu'on en peut déduire les cotes des différents sommets.

CHAPITRE V

I. — OMBRES.

124. — Étant donnés une source lumineuse S et un point M, le rayon lumineux SM qui passe par ce point M se trouve arrêté par le point M, de telle sorte que toute la région de la droite SM qui se trouve au delà de M par rapport à S ne reçoit plus de lumière du point S et se trouve par suite dans l'ombre.

Donc, pour trouver l'ombre portée par un point M sur une surface, on doit figurer le rayon lumineux SM et déterminer ensuite tous les points de rencontre P, Q, R, etc., de ce rayon lumineux avec la surface. Celui de tous ces points qui se trouvera le premier dans le sens SM, P par exemple, sera l'ombre portée par M sur la surface. Quant aux autres points, Q, R, etc., étant par hypothèse au delà de P, ils seront eux-mêmes dans l'ombre propre de la surface.

Étant données une source lumineuse S et une surface, un rayon lumineux quelconque issu de S rencontre la surface aux points P, Q, R, etc. ; celui de tous ces points qui est le plus rapproché de la source lumineuse est éclairé, tous les autres étant dans l'ombre. L'ordre des points étant S, P, Q, R, si, pour une position convenable du rayon lumineux, les points P et Q étaient confondus, le point ainsi obtenu serait la limite entre la région éclairée de l'objet et la région dans l'ombre. La ligne lieu de ces points constitue le contour de l'ombre propre de l'objet.

Lorsque le point lumineux est à distance finie, on dit que l'on cherche l'ombre au flambeau. Si la source lumineuse est à l'infini, ce qui est le cas de l'ombre au soleil, les rayons lumineux sont alors parallèles à une même direction.

Le problème des ombres est donc tout à fait identique à celui de la ponctuation, avec cette différence que dans une épure il y a lieu de considérer si un point d'un objet est vu ou caché et en même temps éclairé ou dans l'ombre. Si la source lumineuse

occupait exactement la position de l'œil de l'observateur, les régions éclairées seraient les mêmes que les régions vues, tandis que les régions dans l'ombre seraient identiques aux régions cachées.

125. — L'ombre d'une ligne sur une surface est le lieu des ombres portées par tous ses points sur la surface, c'est donc l'intersection de la surface avec le cône d'ombre ayant pour sommet le point lumineux et pour directrice la ligne.

126. — L'ombre portée par une droite sur un plan est une droite. En effet, le cône d'ombre formé par une droite se réduit généralement à un plan, dont la trace sur le plan donné est toujours une ligne droite.

127. — Ce résultat est en défaut, lorsque la droite donnée passe par le point lumineux; et, dans ce cas, l'ombre de la droite se réduit à un point.

128. — Pour trouver l'ombre portée par une ligne A sur une autre ligne B, il suffit de déterminer les ombres portées par les deux lignes A et B sur une même surface, par exemple le plan horizontal.

On obtient ainsi deux lignes *a*, *b*, qui se rencontrent au point *m*. par exemple. Le rayon lumineux S*m* rencontre alors les lignes A, B aux deux points M, N, que je suppose dans l'ordre S, M, N, en appelant S la source lumineuse. Ce résultat prouve que le point M de A projette une ombre en N sur B.

II. — OMBRE D'UN POLYÈDRE.

129. — *Trouver les ombres propres et portées sur le plan horizontal par un tétraèdre* s (20) a (4) b (2) c (6), *éclairé par des rayons lumineux parallèles à une droite* D *définie par son échelle* (fig. 54).

Par les différents sommets du tétraèdre *sabc*, nous menons des parallèles aux rayons lumineux, et nous cherchons les traces de ces différentes droites sur le plan horizontal, $\sigma, \alpha, \beta, \gamma$. Nous joignons ensuite tous ces points dans le même ordre que sur l'objet, $\sigma\alpha$, $\sigma\beta$, $\sigma\gamma$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$. Un certain nombre de ces droites forment un polygone $\alpha\beta\sigma\gamma\alpha$ à l'intérieur duquel se trouvent toutes les autres droites $\sigma\alpha$, $\beta\gamma$.

Le contour final $\beta\sigma\gamma\alpha$ constitue le contour de l'ombre portée.

Considérons maintenant les faces *asb*, *bsc*, qui ont pour ombres portées $\alpha\sigma\beta$, $\beta\sigma\gamma$. Tous les points à l'intérieur de ces deux faces ont leur ombre à l'intérieur de $\alpha\sigma\beta$, $\beta\sigma\gamma$, de telle sorte que, si par un point à l'intérieur de la région commune $\mu\beta\sigma$ on mène une parallèle aux rayons lumineux, elle coupe les deux faces *sab*, *sbc* en deux points distincts. L'un de ces points, placé du côté de la

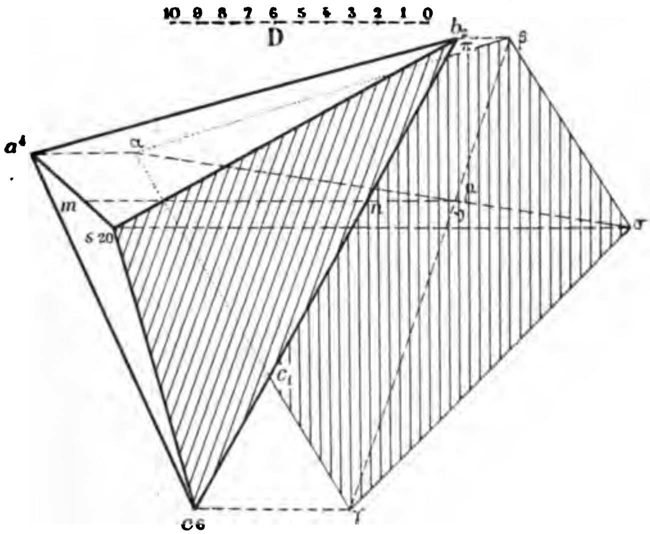


Fig. 54.

source lumineuse, est éclairé; l'autre, opposé à la source lumineuse, est dans l'ombre. Mais, si l'on choisit le rayon lumineux passant par un point de $\sigma\beta$, il coupe les deux faces *sab*, *sbc* en un même point sur *sb*.

Donc les arêtes *sb*, *ba*, *ac*, *cs* qui ont donné le contour de l'ombre portée $\sigma\beta$, $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, $\gamma\sigma$ constituent à leur tour le contour de l'ombre propre, elles partagent la surface du tétraèdre en deux régions qui sont l'une éclairée, l'autre dans l'ombre.

Pour établir la distinction entre ces deux régions, considérons le rayon lumineux qui passe par l'intersection $\mu\nu$ des deux droites $\beta\gamma$, $\sigma\alpha$.

Ce rayon lumineux rencontre les deux arêtes *bc*, *sa* aux points *m*, *n*. Le point *m*, étant du côté de la source lumineuse, est donc éclairé, tandis que le point *n* est dans l'ombre.

En résumé, les faces éclairées sont *smab*, *smac*, tandis que les

faces dans l'ombre sont *bncs*, *bnca*. De ces deux dernières, la face *bncs* étant la seule vue, on a rempli l'intérieur de cette face avec des hachures parallèles aux horizontales de cette même face.

Quant à l'ombre portée sur le plan horizontal, elle n'a de vue que la région en dehors du contour apparent du tétraèdre ; on a rempli également cette région avec des hachures. Les portions αx, $x c_1$ du contour de l'ombre portée qui sont cachées par le tétraèdre se marquent comme toutes les régions cachées, en points ronds.

Dans la recherche de l'ombre portée il y a lieu de figurer des lignes telles que $\beta\gamma$, $\sigma\alpha$ qui dans la suite sont inutiles, puisqu'elles n'appartiennent pas au contour de l'ombre portée; on les figure en lignes de construction. Il est indispensable de les figurer pour l'intelligence de l'épure, parce qu'on ne connaît pas à l'avance les arêtes qui conviendront.

III. — OMBRES DE PLUSIEURS POLYÈDRES.

130. — *Ombres d'un prisme et d'une pyramide éclairés par des rayons lumineux parallèles à une direction donnée.*

Soit la pyramide *sabc* définie par sa base dans le plan horizontal et par son sommet dont on a la projection horizontale *s* et la cote (20). Soit de plus un prisme limité au plan horizontal *def* et au plan horizontal $d_1e_1f_1$ de cote (15). Soit enfin D la direction du rayon lumineux (fig. 55).

Remarquons d'abord qu'avant de traiter un problème d'ombre, pour une combinaison d'objets, il est nécessaire de résoudre complètement toutes les questions relatives aux intersections de ces objets deux à deux. La ponctuation de l'objet final doit être résolue complètement ; nous dirons même qu'il est avantageux pour faciliter le travail de passer cette première partie de l'épure à l'encre avant de s'occuper des ombres.

Dans l'exemple que nous avons choisi, il n'y a pas d'intersection assurément, puisque les contours apparents des deux solides n'empiètent pas l'un sur l'autre; nous pouvons donc passer immédiatement à la question du problème d'ombre.

Nous déterminons d'abord les ombres portées par chaque corps sur le plan horizontal.

Par le sommet *s* de la pyramide, on mène une parallèle aux rayons lumineux qui coupe le plan horizontal en σ. Les ombres

portées par sa, sb, sc sont donc σa, σb, σc, et par suite l'ombre portée par la pyramide se réduit au contour $b\sigma ab$.

On en déduit que les faces sbc, sca, abc sont dans l'ombre, la première étant vue et les deux autres cachées.

Par le sommet e_1 de la base supérieure du prisme, on mène aussi une parallèle aux rayons lumineux qui coupe le plan horizontal au point ε_1. On en déduit les ombres portées par toutes les arêtes du prisme, elles sont en effet égales entre elles en longueur et parallèles : $d\delta_1 = f\varphi_1 = e\varepsilon_1$. En même temps $\delta_1\varepsilon_1$ sera parallèle à d_1e_1 et à de, et il en est de même pour $\delta_1\varphi_1$ avec d_1f_1, puis pour $\varepsilon_1\varphi_1$ et ef.

Le contour de l'ombre portée par le prisme est donc $d\delta_1\varphi_1 fed$, on en déduit que les faces cachées dd_1ff_1, def sont seules dans l'ombre.

On ne marque en noir que le contour final de ces deux ombres portées, $b\mu\delta_1\varphi_1$ $\pi\sigma\lambda fed\rho a$, les portions de ces contours qui sont cachées par le prisme ou la pyramide étant marquées en points. Enfin, nous avons mis des hachures dans toute la région vue à l'intérieur de ce contour.

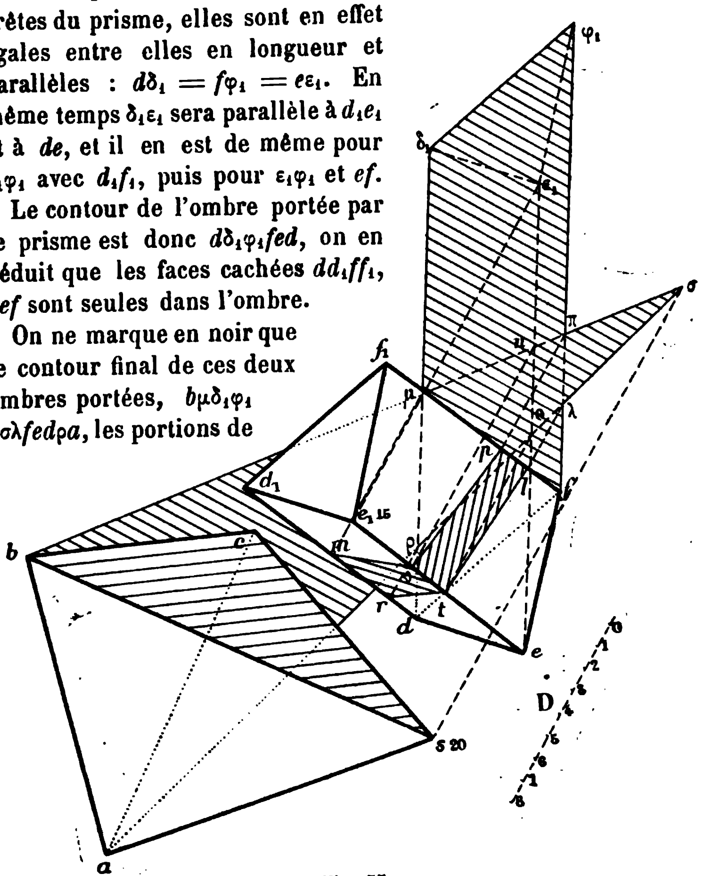


Fig. 55.

Nous passons maintenant à l'ombre portée par chaque polyèdre

sur l'autre, la disposition des données indiquant d'ailleurs à première vue que c'est la pyramide qui donnera une ombre portée sur le prisme.

Le contour σb de l'ombre portée par la pyramide sur le plan horizontal rencontre $d\delta_1$ en μ. Le rayon lumineux mené par ce point rencontre à son tour l'arête dd_1 en un point m qui est l'ombre portée par l'arête sb sur l'arête dd_1. Ce résultat montre que l'arête Sb porte une ombre partant de m sur la face éclairée dd_1e_1e. Prenons donc dans cette face une deuxième arête ee_1 dont l'ombre portée est $e\varepsilon_1$. Cette dernière droite rencontre encore σb en n. Le rayon lumineux mené par n rencontre ee_1 en ν qui est un second point de l'ombre cherchée. Donc $m\nu$ est l'ombre portée par sb sur la face dd_1e_1e, et c'est en même temps dans l'exemple actuel la partie utile de cette ombre.

Arrivée en ce point ν, l'ombre portée appartiendra à la face adjacente eff_1e_1. La droite σb coupe $f\varphi_1$ en π. Le rayon lumineux mené par ce point π rencontre ff_1 en p, donc νp est l'ombre portée par sb sur la face eff_1e_1.

Nous prenons maintenant le contour σa qui rencontre de même $d\delta_1$, $e\varepsilon_1$, $f\varphi_1$ en ρ, θ, λ. Les rayons lumineux menés par ces différents points rencontrent dd_1, ee_1, ff_1 en r, t, l, ce qui donne, comme dernière partie de l'ombre portée par la pyramide sur le prisme, le contour rtl.

Finalement la portion $m\nu tr$ de la face éclairée dee_1d_1 est dans l'ombre, ainsi que la région νplt de la face eff_1e_1.

IV. — OMBRES DE FRAGMENTS DE PLANS.

131. — *On donne deux triangles opaques* a (7) b (3) c (1) d (1) e (4) f (8); *trouver les ombres produites en éclairant ce système avec des rayons lumineux horizontaux parallèles à la direction* D (fig. 56).

Nous commençons par déterminer l'intersection des deux plans, à seule fin de pouvoir représenter le système des deux triangles. Les horizontales (7) se coupent en α et les horizontales (1) en β; donc $\alpha\beta$ est l'intersection des deux plans, la partie utile se réduisant à mn.

La verticale a coupe le plan abc en un point de cote (7) et le

plan *def* en un point dont la cote est comprise entre (2) et (3). Le point *a* est donc vu et par suite la région *mban* du triangle *abc* est vue. Pour le plan *def*, c'est la région opposée $\lambda f\gamma$ qui sera vue. Comme les deux plans sont limités aux contours des deux triangles, les régions $\mu c\nu$ pour *abc* et $\pi d\gamma$ avec $\rho e\lambda$ redeviennent vues comme contours apparents.

Passons maintenant à la question d'ombre. Un plan opaque éclairé par une source lumineuse a un côté éclairé et l'autre dans

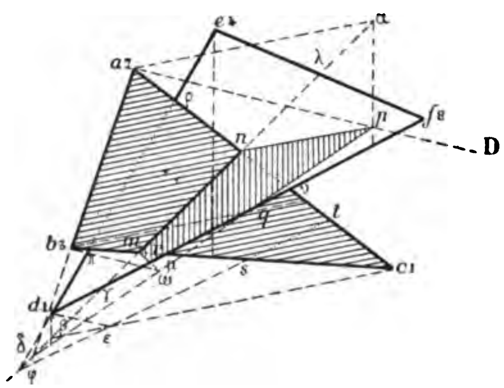


Fig. 56.

l'ombre, le raisonnement suivant permet de reconnaître quel est le côté éclairé.

Considérons un point quelconque du plan et le rayon lumineux qui passe par ce point. Établissons alors la ponctuation de ce rayon lumineux par rapport au plan supposé opaque. Si la région vue de ce rayon lumineux se trouve du côté de la source lumineuse, la face vue est éclairée; si au contraire la région cachée du rayon lumineux est du côté de la source lumineuse, la face vue est dans l'ombre.

On peut dire aussi, lorsque l'observateur voit le rayon lumineux arriver au plan, que le plan est éclairé; dans l'autre cas, il est dans l'ombre.

Le rayon lumineux D coupe le plan *abc* en *a* de cote (7), à droite de *a* il est au-dessus de l'horizontale $c\varepsilon$ de cote (1), donc ce rayon lumineux est vu dans la région *ap*, et, comme nous supposons la source lumineuse à gauche, il en résulte que la région vue du plan *abc* est dans l'ombre.

Un raisonnement analogue montrera que la face *def* est éclairée.

Nous avons cherché ensuite l'ombre du plan *abc* sur *def*. Le rayon lumineux *a*D de cote (7) coupe le plan *def* sur l'horizontale (7) de ce dernier plan en *p*. En joignant *np*, on a l'ombre portée par *na* sur *def*.

La droite *ab* coupe *mn* en δ, donc *p*δ est l'ombre de *ab* sur *def*, la partie utile se réduisant à *pq*.

Le rayon lumineux partant de *b* coupe *p*δ en ω qui serait l'ombre portée par le point *b* sur le plan illimité *def*, donc *m*ω donne l'ombre portée par *bm* sur *def*, la partie utile se réduisant à *mr*.

Il reste enfin à déterminer l'ombre portée par le triangle *def* sur le triangle *abc*. La parallèle aux rayons lumineux menée par *d* (1) coupe l'horizontale *c*β (1) du plan *abc* au point ε, qui est l'ombre portée par le point *d* sur le plan illimité *abc*, d'ailleurs la droite *de* coupe le plan *abc* sur *mn* au point φ qui est à lui-même son ombre portée. Donc, l'ombre portée par *de* sur le plan *abc* est la droite εφ, dont la partie utile se réduit à *st*. D'ailleurs, cette ombre étant figurée sur la région primitivement éclairée du plan, *abc* sera ici cachée.

LIVRE IV

DROITES ET PLANS RECTANGULAIRES

CHAPITRE PREMIER

I. — DROITES RECTANGULAIRES.

132. — Les théorèmes que nous allons démontrer supposent l'emploi unique de projections orthogonales, ils n'existent pas dans le cas des projections obliques ou coniques.

133. — THÉORÈME. — *Un angle droit se projette sur un plan parallèle à l'un de ses côtés suivant un angle droit.*

Soit en effet l'angle droit ABC (fig. 57) que nous projetons orthogonalement sur le plan P parallèle à AB suivant *abc*. Il s'agit de démontrer que l'angle *abc* est droit.

Remarquons d'abord que AB, étant parallèle au plan P, est aussi parallèle à sa projection *ab* sur ce même plan.

Or la droite AB est perpendiculaire sur BC par hypothèse, puis sur B*b*, parce qu'on emploie des projections orthogonales; donc AB est perpendiculaire sur le plan projetant BC*bc*. Il en est de même de la parallèle *ab*, et par suite cette dernière droite *ab* est perpendiculaire sur *bc* qui passe par son pied dans le plan BC*bc*.

134. — Remarque. — Le théorème suppose naturellement que l'angle se projette bien suivant un angle, c'est-à-dire que le plan ABC et par suite BC ne sont pas perpendiculaires sur le plan P, auquel cas la projection de l'angle se réduit à une droite.

135. — Réciproque I. — *Un angle se projetant sur un plan parallèle à l'un de ses côtés suivant un angle droit est lui-même un angle droit.*

En effet, comme tout à l'heure (fig. 57), le côté AB est parallèle à sa projection *ab*. Or *ab* est perpendiculaire sur *bc* par hypothèse, puis sur B*b*, parce qu'on emploie des projections orthogonales; donc *ab* est perpendiculaire sur le plan projetant BC*bc*. Il en est de même de la parallèle AB, et par suite cette droite est aussi perpendiculaire sur BC qui passe par son pied dans le plan BC*bc*.

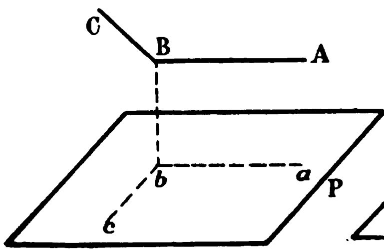


Fig. 57.

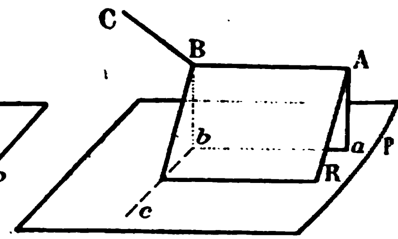


Fig. 58.

136. — Réciproque II. — *Un angle droit se projetant suivant un angle droit a au moins l'un de ses côtés parallèle au plan de projection.*

En effet, soit l'angle droit ABC se projetant suivant l'angle droit *abc* sur le plan P (fig. 58).

Supposons que BC ne soit pas parallèle au plan P. Alors, la droite AB se trouve premièrement dans le plan AB*ab* perpendiculaire sur le plan BC*bc* à cause de l'angle droit *abc*. La même droite se trouve aussi dans un deuxième plan R mené par B perpendiculairement au plan BC*bc* à cause de l'angle droit ABC. La droite AB, intersection de deux plans perpendiculaires sur un troisième, est elle-même perpendiculaire sur ce troisième plan projetant BC*bc*; elle est par suite parallèle au plan de projection P.

Cette démonstration suppose que les deux plans AB*ab* et R, dont AB est l'intersection, ne sont pas confondus. S'il en était ainsi, la droite BC serait parallèle au plan P, ce qui est contraire à l'hypothèse.

II. — DROITES ET PLANS RECTANGULAIRES.

137. — THÉORÈME. — *Toute droite perpendiculaire sur un plan a ses projections perpendiculaires sur les traces de même nom du plan.*

En effet, considérons par exemple l'horizontale du plan passant

par le pied de la perpendiculaire sur le plan, elle forme avec la perpendiculaire au plan un angle droit qui a l'un de ses côtés parallèle au plan de projection et qui par suite se projette horizontalement suivant un angle droit.

Donc la projection horizontale de la perpendiculaire au plan est perpendiculaire sur une horizontale particulière du plan, et, comme toutes les horizontales du plan sont parallèles, elle est en particulier perpendiculaire sur la trace horizontale du plan.

138. — Réciproque. —*Toute droite ayant ses projections, dans deux systèmes différents, perpendiculaires sur les traces de même nom d'un plan, est elle-même perpendiculaire au plan.*

Supposons que le premier plan de projection employé soit le plan horizontal. Considérons l'horizontale du plan passant par le point de rencontre de la droite avec le plan, elle forme avec la droite un angle qui se projette sur le plan horizontal parallèle à l'un de ses côtés suivant un angle droit. Donc, dans l'espace, l'angle est droit aussi; autrement dit la droite est déjà perpendiculaire sur une horizontale du plan.

En tenant compte de la condition analogue dans le second système, la droite sera aussi perpendiculaire sur une ligne de front du plan; par suite, en résumé, la droite est perpendiculaire au plan.

Cette démonstration est en défaut lorsque l'horizontale et la ligne de front du plan coïncident, c'est-à-dire lorsque le plan donné est parallèle à la ligne de terre, ou, ce qui revient au même, lorsque la droite donnée est de profil.

139. — La réciproque précédente convient très bien, lorsqu'on a à sa disposition deux projections distinctes; mais il n'en est plus de même en géométrie cotée où l'on n'a qu'une projection, l'autre étant remplacée par les cotes, il convient donc de transformer le théorème.

140. — THÉORÈME. —*Lorsqu'une droite est perpendiculaire sur un plan, elle a sa projection perpendiculaire sur la trace du plan ou parallèle à l'échelle de pente du plan; de plus, le produit des modules de la droite et du plan est égal à — 1, ou, si l'on veut, le produit des valeurs numériques des modules est égal à 1, les deux échelles étant comptées en sens inverse.*

En effet, prenons comme plan vertical de projection un plan

perpendiculaire sur la trace horizontale du plan (fig. 59), de telle sorte que le plan $P\alpha P_1$ soit de bout, et choisissons dans ce plan le point aa', dont la cote $a'p'$ soit égale à 1. La perpendiculaire au plan $P\alpha P_1$ menée par aa' aura sa projection horizontale ac perpendiculaire sur $P\alpha$ et sa projection verticale $a'c'$ perpendiculaire sur la trace verticale $P_1\alpha$ du plan, la trace horizontale de cette perpendiculaire étant en cc'. Or, le point aa' ayant pour cote (1), les longueurs ab, ac sont la première le module du plan, la seconde celui de la perpendiculaire.

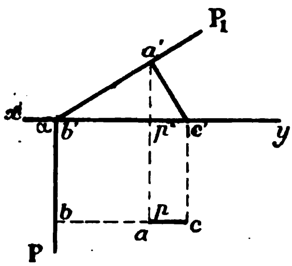


Fig. 59.

D'un autre côté, dans le triangle rectangle $a'b'c'$, la hauteur $a'p'$ est moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse.

On a donc :

$$\overline{a'p'}^2 = b'p' \times p'c' = ab \times ac,$$

ou :

$$1 = ab \times ac = m \times m_1.$$

De plus, la graduation du plan marchant dans le sens ba, celle de la perpendiculaire marche dans le sens ca.

III. — PLANS PERPENDICULAIRES.

141. — Les deux théorèmes primitifs et leurs réciproques conduisent aux suivants, en remplaçant les deux côtés d'un angle droit par deux plans qui leur sont respectivement perpendiculaires.

142. — THÉORÈME. — *Étant donnés deux plans rectangulaires, si l'un d'eux est perpendiculaire sur le plan de projection, leurs traces sont rectangulaires.*

143. — Réciproque I. — *Étant donnés deux plans dont les traces sont rectangulaires, si l'un d'eux est perpendiculaire sur le plan de projection, dans l'espace ils sont rectangulaires.*

144. — Réciproque II. — *Étant donnés deux plans rectangulaires, dont les traces sont rectangulaires, l'un d'eux au moins est perpendiculaire sur le plan de projection.*

CHAPITRE II

I. — PERPENDICULAIRE SUR UN PLAN.

145.— PROBLÈME. — *Abaisser d'un point une perpendiculaire sur un plan, et trouver le pied de la perpendiculaire sur le plan.*

Nous commencerons par déterminer les directions des horizontales et des lignes de front du plan, soit $aha'h'$, $afa'f'$ (fig. 60).

Le point donné ayant pour projections p, p', il suffira d'abaisser de p une perpendiculaire sur ah et de p' une perpendiculaire sur $a'f'$; la droite ainsi obtenue $pbp'b'$ sera la perpendiculaire abaissée du point pp' sur le plan.

Pour trouver le pied de cette perpendiculaire sur le plan, il reste à trouver l'intersection de $pbp'b'$ avec le plan $ahfa'h'f'$.

Nous avons choisi pour cela le plan projetant horizontalement pb qui coupe $aha'h'$ en $\alpha\alpha'$, $afa'f'$ en $\beta\beta'$. Le plan auxiliaire coupe donc le plan donné suivant $\alpha\beta\alpha'\beta$ qui, à son tour, rencontre la droite donnée $pbp'b'$ au point cherché mm'.

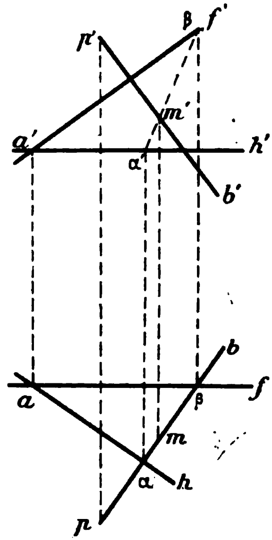


Fig. 60.

Quand nous saurons trouver la distance de deux points, en mesurant la longueur $pmp'm'$, on aura la distance du point au plan.

La construction précédente est en défaut lorsque le plan est parallèle à la ligne de terre; le procédé le plus simple consiste à faire un changement de plan vertical tel que dans le nouveau

système le plan donné soit quelconque. Nous reparlerons plus tard de cette question de changement de plan.

146. — Traitons maintenant la même question en géométrie cotée.

Soit A l'échelle de pente du plan et p le point défini par sa projection et sa cote (4,5) (fig. 61).

La projection horizontale de la perpendiculaire est d'abord parallèle à l'échelle de pente du plan A. D'ailleurs le module du

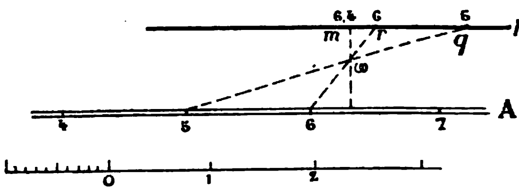


Fig. 61.

plan ab mesuré à l'échelle du dessin vaut 1,2, donc le module de la perpendiculaire est $\frac{1}{1,2} = 0,8$.

Nous porterons donc à partir de p une longueur égale à 0,4 de l'échelle du dessin, ce qui donnera le point q de cote (5), puis à la suite de ce point nous prendrons un intervalle égal à 0,8, ce qui donnera le point r de cote (6). La perpendiculaire est ainsi graduée.

Proposons-nous enfin de trouver le pied de la perpendiculaire sur le plan. Employons pour cela comme plan auxiliaire celui qui admet pqr comme échelle de pente, en appliquant la construction donnée au n° 67 dans le cas où les échelles de pente sont parallèles. Les horizontales (5) (5), (6) (6) qui s'appuient sur les deux échelles de pente se rencontrent au point fixe ω par lequel on mène l'horizontale du plan A, elle rencontre la droite au point cherché m (6,4). Il faut bien remarquer que dans un problème comme celui-ci et en général dans les problèmes de mesure, il est indispensable d'avoir l'échelle du dessin, tandis que les problèmes d'intersection de plans sont tout à fait indépendants de cette échelle.

II. — PLAN PERPENDICULAIRE SUR UNE DROITE.

147. — Lorsqu'on a à sa disposition deux projections distinctes, horizontale et verticale, on dit : nous connaissons immé-

diatement les directions des horizontales et des lignes de front du plan. Il y a donc moyen de figurer à la fois l'horizontale et la ligne de front du plan inconnu passant par le point donné, ce qui nous fera deux droites pour définir le plan.

Si accidentellement l'horizontale et la ligne de front coïncidaient, ce qui se présente lorsque la droite donnée est de profil, il suffirait de choisir un nouveau plan vertical de projection qui rendrait la droite donnée quelconque. Il en serait de même, au point de vue de l'exactitude des résultats, si la droite donnée était sensiblement de profil.

Soit, par exemple, la droite AA′ (fig. 62) et le point *pp*′.

L'horizontale du plan inconnu, menée par le point *pp*′, a sa projection verticale *p*′*h*′ parallèle à la ligne de terre, et sa projection horizontale *ph* perpendiculaire sur A.

De même, la ligne de front menée par *pp*′ a sa projection

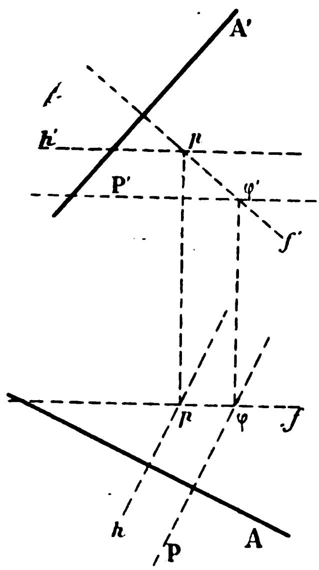


Fig. 62.

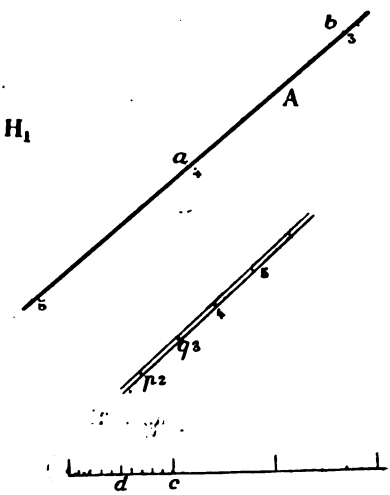


Fig. 63.

horizontale *pf* parallèle à la ligne de terre, et sa projection verticale *p*′*f*′ perpendiculaire sur A′.

Si l'on désirait trouver uniquement la trace du plan inconnu sur un plan horizontal donné H_1, il suffirait de figurer la ligne de front *pfp*′*f*′ (fig. 62), sans s'occuper de l'horizontale *php*′*h*′. Cette

ligne de front $pfp'f'$ coupe le plan horizontal H_1 au point $\varphi\varphi'$ par lequel on mène une perpendiculaire P sur A.

Reprenons le même problème en géométrie cotée. Soit la droite A définie par sa projection et son échelle, puis le point p défini par sa projection et sa cote (2) (fig. 63).

Nous figurerons immédiatement la ligne de plus grande pente du plan inconnu passant par le point p, elle est parallèle à A.

Le module du plan est l'inverse du module de la droite. Or le module de la droite est mesuré par ab qui, à l'échelle du dessin, vaut 2, donc le module du plan vaut 0,5 de l'échelle du dessin. Enfin les divisions de l'échelle du plan sont en sens contraire de celles de la droite ; par suite, en prenant pq égale à cd, on aura le point de cote (3), et il ne reste plus qu'à continuer la division du plan.

III. — PERPENDICULAIRE SUR UNE DROITE.

148. — On mène d'abord par le point un plan perpendiculaire sur la droite, puis on détermine l'intersection de ce plan avec la droite. En joignant le point ainsi obtenu au point donné, on a la perpendiculaire demandée.

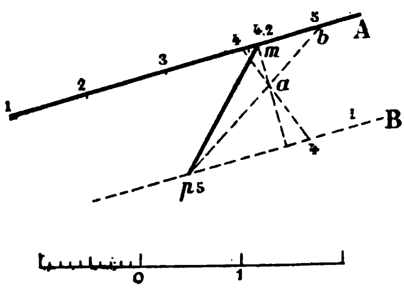


Fig. 64.

Soit la droite A (fig. 64) définie par sa projection et son échelle, puis le point p (5).

Nous avons d'abord construit l'échelle de pente du plan B. Le module de la droite valant 0,8, celui du plan vaut donc :

$$\frac{1}{0,8} = 1,25.$$

Pour chercher ensuite l'intersection de la droite et du plan, nous avons joint les points de même cote, ce qui donne le point fixe a par lequel on mène l'horizontale du plan. Cette horizontale rencontre A au point cherché m (4,2). En résumé pm est la perpendiculaire demandée. Pour la coter rapidement, il suffit de

marquer ses points de rencontre avec les horizontales du plan *p*A parallèles à *pb* et menées successivement par les points à cote ronde de A.

IV. — PERPENDICULAIRE COMMUNE A DEUX DROITES.

149. — La recherche de la perpendiculaire commune à deux droites se compose de deux parties. Dans la première, on cherche la direction de la perpendiculaire commune, et dans la seconde on détermine sa position.

Pour trouver la direction de la perpendiculaire commune, on peut dire qu'elle est parallèle à l'intersection de deux plans perpendiculaires respectivement aux deux droites, ou qu'elle est perpendiculaire sur un plan parallèle aux deux droites.

Pour trouver la position de la perpendiculaire commune, il ne reste plus qu'à construire une parallèle à une direction donnée D s'appuyant sur deux droites données A, B.

Ici encore, nous avons deux procédés à notre disposition.

On peut d'abord mener par A et B successivement deux plans parallèles à la direction D et prendre l'intersection de ces deux plans.

On peut aussi considérer un seul de ces deux plans, par exemple le plan parallèle à D mené par A; il coupe B en un point qui appartient à la droite cherchée. Il ne reste plus qu'à mener par ce dernier point une parallèle à la direction connue.

Soit A, B les deux droites (fig. 65), données par leurs projections et leurs échelles. Par le point *a* (4) de la droite A, nous avons mené une parallèle *ac* à la droite B, elle est définie par le point *c* (3), *ac* étant égale à l'intervalle *fh* de la droite B. Nous déterminons ainsi le plan *a* (4) *b* (3) *c* (3) parallèle aux deux droites. Une horizontale du plan parallèle aux deux droites est donc *bc* (3); on en déduit le module *ad* du plan parallèle aux deux droites. Ce module mesuré à l'échelle du dessin vaut 0,46. Le module de la perpendiculaire commune est donc $\frac{1}{0,46} = 2,17$, la projection horizontale de cette perpendiculaire commune étant d'ailleurs perpendiculaire sur *bc* ou parallèle à *ad*.

Nous avons ensuite mené par chacune des droites un plan parallèle à la direction connue de la perpendiculaire commune.

Le premier plan est défini par A et par *ae* parallèle à la per-

pendiculaire commune, *ae* ayant pour longueur 2,17 à l'échelle du dessin ; *bc* est, par suite, l'horizontale (3) de ce plan.

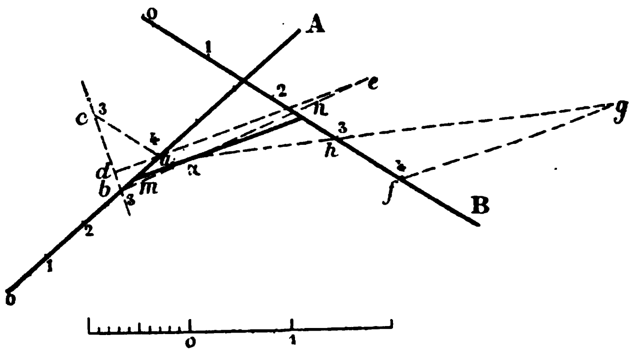


Fig. 65.

Le second plan est défini par B et par *fg* parallèle à la perpendiculaire commune, *fg* ayant aussi pour longueur 2,17 à l'échelle du dessin; par suite, *hg* est l'horizontale (3) de ce nouveau plan.

Les deux horizontales (3) *be*, *hg* des deux plans se coupent en α qui est un point de la perpendiculaire commune demandée.

Il ne reste donc plus qu'à mener par α une parallèle à *ad* pour avoir suivant *mn* la perpendiculaire commune cherchée.

V. — TRIÈDRE TRIRECTANGLE.

150. — *Construire un trièdre trirectangle, connaissant les traces horizontales des trois arêtes.*

Soit *a* (0), *b* (0), *c* (0) (fig. 66) les traces horizontales données, et appelons *s* la projection horizontale du sommet inconnu du trièdre trirectangle. L'arête *sa*, étant perpendiculaire sur la face opposée *sbc*, a sa projection horizontale perpendiculaire sur *bc* et menée par *a*. De même, l'arête *sb*, étant perpendiculaire sur la face *sac*, aura sa projection horizontale perpendiculaire sur *ac* et menée par *b*. Enfin, l'arête *sc* a aussi sa projection horizontale perpendiculaire sur *ab* et menée par *c*. Ces trois droites comme vérification se coupent au point *s*, orthocentre du triangle *abc*. Il ne reste plus qu'à trouver la cote du point *s*.

En appelant x la cote de ce sommet s, on aura $as = x \times i$, en appelant i l'intervalle de la droite as. On aura de même $s\alpha = x \times i_1$ en appelant i_1 l'intervalle du plan sbc. Or la droite Sa est perpendiculaire sur le plan sbc, donc le produit ii_1 est égal à 1.

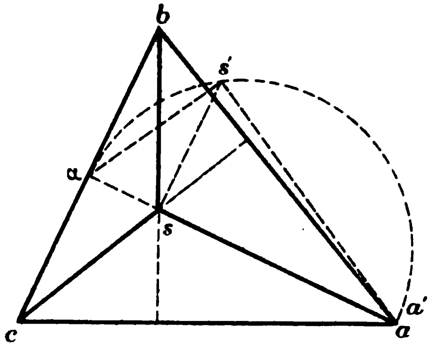


Fig. 66.

Donc, en multipliant les égalités précédentes membre à membre, on a :

$$as \times \alpha s = x^2 \times i \times i_1 = x^2.$$

Autrement dit, la cote de s est moyenne proportionnelle entre as et αs, ces longueurs étant mesurées à l'échelle du dessin. Si, au lieu de calculer cette cote, on veut la construire, on peut décrire sur $a\alpha$ comme diamètre une circonférence et prendre son intersection s' avec la perpendiculaire à $a\alpha$ menée par s.

Ceci revient à dire que, en prenant $a\alpha$ comme ligne de terre, dans ce système, la projection verticale $s'a'$ de l'arête sa est perpendiculaire sur la trace verticale $s'\alpha$ du plan sbc. Cette façon de procéder doit être rejetée pour être remplacée par la première, lorsqu'on veut rester d'une manière absolue dans l'esprit étroit de la méthode des plans cotés.

Si, au contraire, on désire voir dans l'espace, ce qui est en somme l'un des buts de la géométrie descriptive, et non le moyen, comme on le croit souvent à tort, il ne faut pas hésiter pour prendre plusieurs plans de projection autres que le plan horizontal fondamental des plans cotés. Et, si des plans verticaux ne suffisaient pas, on devrait même prendre des plans de projection quelconques, qui permettraient de voir l'objet sous tous les

aspects possibles. Le mieux même serait d'en prendre plusieurs perspectives, ce qui serait beaucoup plus naturel, l'œil de l'observateur étant toujours matériellement à distance finie, de façon à procéder comme si l'on avait l'objet entre les mains et qu'on le retournât dans tous les sens pour en bien comprendre la forme.

Il faut cependant reconnaître que, si l'on a en vue l'étude de la topographie, dans laquelle les différences de cotes des points que l'on considère sont excessivement petites par rapport à la distance des projections horizontales des mêmes points, l'emploi de la méthode des plans cotés devient alors absolument indispensable.

LIVRE V

MÉTHODES

CHAPITRE PREMIER

I. — CHANGEMENTS DE PLANS.

151. — Le but général des changements de plans est le suivant : remplacer le système des deux plans de projection primitifs par un système de deux plans rectangulaires quelconques.

Le principe fondamental de cette méthode est que les deux plans de projection sont toujours rectangulaires.

152. — Nous commencerons par changer un seul des plans de projection : le plan vertical, par exemple. Cela veut dire que nous substituons au système des deux plans de projection primitifs H et V un autre système composé du plan horizontal H et d'un nouveau plan vertical V_1. Ce nouveau plan vertical V_1 est, par définition, perpendiculaire sur le plan horizontal ; il est donc déterminé par sa trace horizontale P (fig. 67). De plus, cette trace horizontale P, étant l'intersection des deux nouveaux plans de projection, servira de nouvelle ligne de terre. Le problème s'énonce donc de la façon suivante : effectuer un changement de plan vertical en prenant comme ligne de terre x_1y_1.

153. — **Remarque.** — Chaque fois que l'on veut effectuer un changement de plan, il faut avoir soin d'indiquer d'abord la nature du changement de plan, ensuite le choix de la ligne de terre, et enfin, comme nous le verrons plus tard, la raison du changement de plan.

Proposons-nous, par exemple, de trouver les nouvelles projections d'un point défini par ses deux projections aa' dans le système primitif (fig. 67) :

1° La projection horizontale a ne change pas, parce que le plan horizontal est commun aux deux systèmes.

2° La nouvelle projection verticale a'_1 se trouve sur une perpendiculaire à la nouvelle ligne de terre x_1y_1 menée par la projection a, qui ne change pas, parce que, dans toute épure, les deux projections d'un point se trouvent sur une même ligne de rappel.

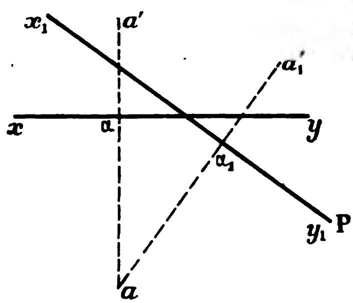


Fig. 67.

3° La nouvelle projection verticale a'_1 est à une distance de la nouvelle ligne de terre $a'_1\alpha_1$ égale à la distance de l'ancienne projection verticale à l'ancienne ligne de terre $a'\alpha$, parce que, dans les deux systèmes, les longueurs $a'\alpha$, $a'_1\alpha_1$ représentent la cote du point par rapport au plan horizontal.

4° La cote conserve son signe, c'est-à-dire que, si a' est au-dessus de xy en lisant xy de gauche à droite, a'_1 est aussi au-dessus de x_1y_1 en lisant x_1y_1 également de gauche à droite, ce qui veut dire que le point dans le nouveau système est du même côté, par rapport au plan horizontal, que dans le premier.

154. — Si, dans le système primitif, le point était défini simplement par sa projection et sa cote, l'opération précédente ne devrait plus s'appeler changement de plan vertical, puisqu'on n'avait pas de plan vertical primitif, mais simplement *choix* d'un plan vertical.

Soit donc le point a (3). Proposons-nous de choisir, comme plan vertical, le plan vertical ayant pour trace horizontale xy. La projection verticale inconnue se trouvera sur une perpendiculaire à xy menée par a, et à une distance $a'\alpha$ au-dessus de xy égale à la cote (3), c'est-à-dire à 3 unités de l'échelle du dessin.

155. — Nous avons fait précédemment un changement du plan vertical, un raisonnement analogue nous donnerait les règles du changement du plan horizontal. Sachant d'ailleurs effectuer

le changement pour un point, on en déduit le changement de plan pour une figure quelconque, puisqu'il suffit d'appliquer les mêmes règles successivement à tous les points qui composent la figure.

156. — Changement de plan pour une droite. — Une droite étant définie par deux points, il suffira d'appliquer les règles du changement de plan à deux points de la droite; avec la seule recommandation, au point de vue de l'exactitude des résultats, de choisir sur la droite deux points aussi éloignés que possible dans les limites de l'épure.

157. — Changement de plan pour un plan. — Un plan étant défini par trois points ou bien par une droite et un point, ou encore par deux droites, il suffira d'appliquer les règles du changement de plan à trois points du plan ou encore à une droite et un point, ou enfin à deux droites; ce qui revient finalement à faire le changement de plan pour trois points.

158. — Remarque. — Dans tous les problèmes relatifs aux intersections, il faut définir les plans par des droites; au contraire, dans les questions de changements de plans, on définit en dernier ressort les plans par des points.

II. — PRENDRE UN PLAN QUELCONQUE COMME PLAN HORIZONTAL.

159. — Remarquons d'abord qu'il est impossible de prendre directement un plan quelconque comme plan horizontal, à moins que ce plan ne soit déjà perpendiculaire au plan vertical; auquel cas il formerait, avec le plan vertical, un système de deux plans rectangulaires que l'on pourrait substituer à l'ancien.

Il est donc nécessaire d'effectuer une première opération ayant pour but d'amener le plan donné à être de bout. Cette première opération sera un changement de plan vertical ou un choix du plan vertical.

Le nouveau plan vertical doit être à la fois perpendiculaire sur le plan donné et sur le plan horizontal; il est donc perpendiculaire sur l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire sur la trace horizontale du plan donné.

Nous dirons donc :

1[re] *opération*. — Changement de plan vertical ou choix de plan

vertical, en prenant comme ligne de terre x_1y_1 une perpendiculaire sur la trace horizontale P du plan donné (fig. 68).

Le point a (1) du plan donné se projette verticalement en a' sur la ligne de rappel $a\alpha$, à une distance $a'\alpha$ au-dessus de x_1y_1 égale à une unité de l'échelle du dessin.

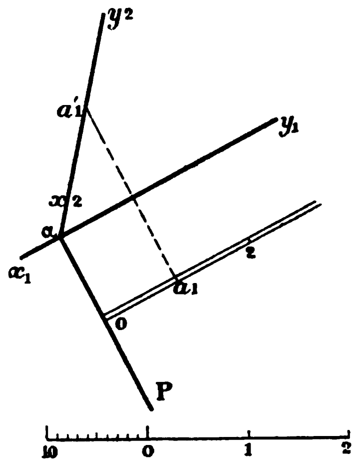


Fig. 68.

La trace verticale nouvelle du plan est donc $a'\alpha$; car le plan, dans le système x_1y_1, étant de bout, a tous ses points projetés verticalement sur sa trace verticale.

Maintenant que le plan est de bout, nous avons le droit de le prendre comme plan horizontal.

Nous dirons donc :

2ᵉ *opération*. — Changement de plan horizontal, en prenant comme nouvelle ligne de terre x_2y_2 la trace verticale nouvelle du plan donné.

Après ces deux opérations, qu'il faut avoir soin d'appliquer également à toutes les données du problème qu'on a en vue, le plan primitif est pris comme plan de projection.

160. — Le problème précédent peut encore s'énoncer de la façon suivante : rendre une droite verticale. Ce sont bien là deux problèmes identiques; car, si une droite est rendue verticale, c'est qu'un certain plan perpendiculaire à la droite a été pris comme plan horizontal de projection.

Nous pouvons donc nous contenter d'énoncer les deux opérations à effectuer, en nous rapportant à la droite au lieu du plan.

1ʳᵉ *opération*. — Changement de plan vertical, ou choix du plan vertical, en prenant comme ligne de terre une parallèle à la projection horizontale de la droite donnée ; ce changement de plan ayant pour but d'amener la droite à être de front.

2ᵉ *opération*. — Changement de plan horizontal, en prenant comme ligne de terre une perpendiculaire sur la nouvelle projection verticale de la droite.

Après ces deux opérations, dans le dernier système, la droite donnée est verticale; sa projection horizontale se réduit à un point, et sa projection verticale est la ligne de rappel de ce point.

Ces deux problèmes sont ceux qu'on a le plus fréquemment l'occasion d'employer; le problème général ne servant que rarement, nous nous contenterons d'énoncer la suite des opérations.

III. — PRENDRE UN SYSTÈME DE DEUX PLANS RECTANGULAIRES QUELCONQUES.

161. — *Remplacer le système des deux plans de projection primitifs* H *et* V *par un autre système de deux plans rectangulaires quelconques* P, Q.

Remarquons d'abord que le plan Q, devant être perpendiculaire sur le plan P, est déterminé par deux points ou une droite; par exemple, par son intersection lt avec le plan P.

On commence par prendre le plan P comme plan horizontal.

1re *opération.* — Changement de plan vertical, en prenant comme ligne de terre une perpendiculaire sur la trace horizontale du plan P.

2e *opération.* — Changement de plan horizontal, en prenant comme nouvelle ligne de terre la nouvelle trace verticale du plan P.

Après ces deux opérations, le plan P servant de plan horizontal de projection, le plan Q, qui est toujours perpendiculaire sur le plan P, est actuellement un plan vertical défini par sa trace horizontale l_2t_2. Il est donc possible maintenant de prendre le plan Q comme plan vertical de projection, et par suite nous dirons :

3e *opération.* — Changement de plan vertical, en prenant comme nouvelle ligne de terre x_3y_3 la trace horizontale nouvelle l_2t_2 du plan Q.

CHAPITRE II

I. — ROTATIONS.

162. — Le but général des rotations est d'amener deux plans rectangulaires quelconques à être parallèles aux plans de projection, en les faisant tourner successivement autour d'axes convenablement choisis.

En tournant autour d'une droite, un point quelconque reste dans un plan perpendiculaire à l'axe et décrit dans ce plan une circonférence ayant son centre sur l'axe. De plus, le rayon aboutissant à la nouvelle position du point fait avec le rayon aboutissant à l'ancienne position du même point un angle égal à l'angle de rotation et compté dans le sens de la rotation.

Pour qu'il soit facile de figurer la circonférence décrite par chaque point et de mesurer en même temps l'angle de rotation de ce point, il est nécessaire de supposer le plan de cette circonférence parallèle à l'un des plans de projection.

Autrement dit, le principe fondamental est que les axes de rotation doivent toujours être perpendiculaires sur l'un des plans de projection. Cela ne veut pas dire qu'il soit impossible de faire tourner une figure autour d'un axe quelconque ; mais, lorsqu'un tel problème se présente, on commence par faire des changements de plans ou des opérations équivalentes ayant pour but d'amener l'axe de rotation à être vertical par exemple.

163. — **Rotation autour d'un axe vertical.** — Soit à faire tourner le point aa' (fig. 69) d'un angle γ autour de la verticale o dans le sens des aiguilles d'une montre.

Nous dirons d'abord que le point reste dans un plan perpendiculaire à l'axe, donc sa projection verticale décrit une parallèle à la ligne de terre menée par a'. Ensuite, le point décrit dans le plan horizontal une circonférence ayant son centre sur l'axe, donc

la projection horizontale décrit aussi une circonférence de centre o ayant pour rayon oa. Puis, le rayon oa_1, aboutissant à la nouvelle position du point, fait avec l'ancien oa un angle égal à l'angle de rotation γ. Enfin, cet angle est compté dans le sens de la rota-

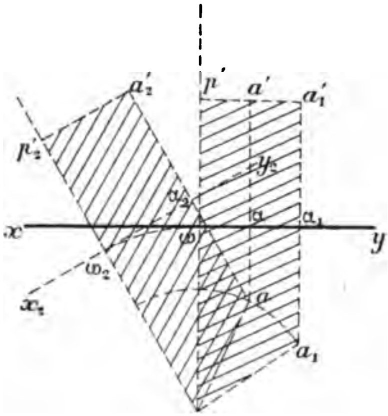


Fig. 69.

tion, ce qui donne a_1. Finalement la ligne de rappel a_1 donne en a_1a_1' la nouvelle position du point.

II. — RELATION ENTRE LES ROTATIONS ET LES CHANGEMENTS DE PLANS.

164. — Avant d'aller plus loin, il convient de reconnaître que la figure obtenue après une rotation est identiquement la même que la figure obtenue après un changement de plan.

En effet, faisons tourner le point ω d'un angle égal à l'angle de rotation, mais en sens contraire de cette rotation, ce qui l'amène en ω_2.

Menons ensuite par ω_2 la perpendiculaire sur $o\omega_2$ et faisons un changement de plan vertical en prenant comme ligne de terre x_2y_2 la perpendiculaire sur $o\omega_2$ menée par ω_2.

Le point a a pour nouvelle projection verticale a'_2 sur la ligne de rappel $a\alpha_2$, à une distance $a'_2\alpha_2$ au-dessus de x_2y_2 égale à $a'\alpha$.

La figure obtenue après la rotation est le trapèze $o\omega p'a'_1\alpha_1a_1$, tandis que la figure obtenue après le changement de plan est le trapèze $o\omega_2p'_2a'_2\alpha_2a$. Il s'agit de montrer l'égalité de ces deux figures.

Pour cela, faisons tourner la seconde figure $o\omega_2 p'_2 a'_2 \alpha_2 a$ autour du point o d'un angle égal à l'angle de rotation et dans le sens de la rotation.

La droite $o\omega_2$ vient coïncider avec $o\omega$, donc $x_2 y_2$ perpendiculaire sur $o\omega_2$ vient coïncider avec xy perpendiculaire sur $o\omega$.

De même oa vient coïncider avec oa_1, donc $a\alpha_2 a'_2$ perpendiculaire sur $x_2 y_2$ coïncide avec $a_1 \alpha_1 a'_1$ perpendiculaire sur xy.

Nous voyons ensuite que le point a'_2 vient coïncider avec a'_1, parce que les cotes $a'_2 \alpha_2$, $a_1 \alpha_1$ sont égales entre elles, comme étant égales toutes deux à $a'\alpha$.

Enfin, les points p'_2 et p' coïncident également, les cotes de ces deux points étant aussi égales à celle du point a.

Nous pouvons donc dire que les changements de plans et les rotations sont des opérations équivalentes. On peut à volonté employer l'une ou l'autre de ces deux méthodes. Ce résultat était d'ailleurs facile à prévoir. Dans les rotations, les données se déplacent par rapport aux plans de projection, tandis que, dans les changements de plans, ce sont les plans de projection qui se déplacent par rapport aux données ; finalement, les positions relatives des données et des plans de projection restent les mêmes.

165. — Nous avons montré comment on effectuait la rotation d'un point autour d'un axe vertical, un raisonnement analogue permettrait de faire tourner le point autour d'un axe de bout. Pour faire tourner une figure quelconque, on en fait tourner successivement tous les points du même angle et dans le même sens. Pour éviter d'avoir à faire pour chaque point un angle égal à l'angle de rotation, voici un procédé particulier qu'il est avantageux d'employer.

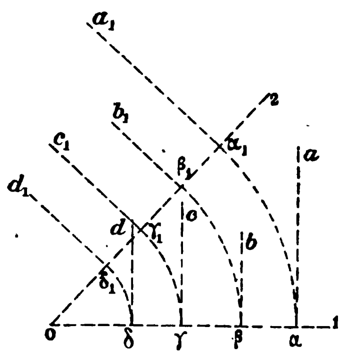


Fig. 70.

Soit a, b, c, d un système de points (fig. 70) qu'il s'agit de faire tourner dans le plan du tableau autour du point o d'un angle mesuré par l'angle des deux rayons consécutifs o (1), o (2).

Des différents points a, b, c, d, on abaisse des perpendiculaires $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ sur le premier rayon o (1), ce qui se fait rapidement lorsque les équerres sont en place; on fait tourner ensuite les

points α, β, γ, δ autour de o, de façon à les amener sur le second rayon o (2). Cette opération se fait à l'aide d'une bande de papier que l'on place d'abord sur le rayon o (1) en marquant les points o, α, β, γ, δ. Puis on reporte cette bande de papier sur le rayon o (2) en conservant bien la même origine o, et l'on marque les points α_1, β_1, γ_1, δ_1.

On mène ensuite par ces derniers points des perpendiculaires sur le second rayon, et l'on prend sur chacune d'elles une longueur $a_1\alpha_1$ égale à la longueur correspondante $a\alpha$. Un autre avantage de cette construction, c'est que l'équerre employée peut être fausse, pourvu que ce soit le même angle de l'équerre qui serve en α et α_1.

Il est évident que par cette construction l'angle aoa_1 est bien égale à l'angle de rotation, et que, en même temps, les rayons oa, oa_1 sont égaux.

166. — Pour faire tourner une droite, il suffit d'en faire tourner deux points, avec la seule recommandation de choisir ces deux points aussi éloignés que possible l'un de l'autre pour l'exactitude des résultats.

Il est avantageux de choisir comme premier point le pied de la perpendiculaire commune entre la droite et l'axe.

Soit (fig. 71) la droite AA′ et l'axe de bout o'. Nous prenons comme premier point le pied $a'a$ de la perpendiculaire commune entre la droite AA′ et l'axe de bout o'. La rotation amène ce point en $a_1a'_1$ par exemple, $a'o'a'_1$ étant l'angle et le sens de la rotation. Il nous reste à faire tourner un second point, bb' par exemple. Pour cela, comme on l'a dit précédemment, de b' on abaisse une perpendiculaire sur le premier rayon $o'a'$, ce qui est déjà fait, soit $b'a'$, on fait tourner le pied a' de cette perpendiculaire, il vient en a'_1 sur le nouveau

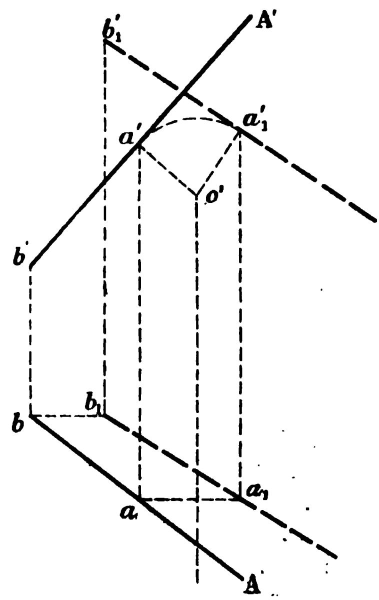


Fig. 71.

rayon $o'a'_1$. On mène ensuite par a'_1 une perpendiculaire sur le second rayon, sur laquelle on prend $a'_1b'_1$ égale à $a'b'$.

D'ailleurs, en projection horizontale, le point b a décrit une parallèle à la ligne de terre, nous avons donc finalement en $b_1b'_1$ la nouvelle position du point, et par suite en a_1b_1, $a'_1b'_1$ la nouvelle position de la droite.

La construction précédente se simplifie légèrement lorsque la droite rencontre l'axe, puisque alors il suffit de faire tourner un seul point de la droite.

De même, pour faire tourner un plan, il suffit d'en faire tourner trois points ou une droite et un point, ou enfin deux droites. Autant que possible, on choisit comme premier point le point fixe, c'est-à-dire le point de rencontre du plan avec l'axe; de cette façon il ne reste plus qu'à faire tourner une droite du plan ou deux points au lieu de trois.

III. — RENDRE UN PLAN HORIZONTAL.

167. — L'équivalence qui a été prouvée des changements de plans et des rotations nous fait prévoir que le problème actuel nécessitera deux opérations. Premièrement, une rotation autour d'un axe vertical équivalente d'un changement de plan vertical, ayant pour but d'amener le plan à être de bout. Deuxièmement, une rotation autour d'un axe de bout équivalente d'un changement de plan horizontal, ayant pour but de rendre le plan horizontal.

Mais, comme on aurait pu commencer cette étude aussi bien par les rotations que par les changements de plans, il convient de montrer directement la nécessité des deux opérations.

Le principe fondamental qui nous servira est que les axes de rotation doivent toujours être perpendiculaires sur l'un ou l'autre des plans de projection.

Soit donc $P\alpha P_1$ le plan qu'il s'agit de rendre horizontal. Si on le faisait tourner simplement autour d'un axe vertical, son angle avec le plan horizontal ne changerait pas, et par suite il ne pourrait pas devenir nul. Il est donc impossible d'amener un plan quelconque à être horizontal, en le faisant simplement tourner autour d'un axe vertical.

Essayons maintenant de faire tourner le plan $P\alpha P_1$ autour d'un axe de bout, son angle avec le plan vertical ne change pas, il ne peut donc pas devenir droit, à moins que cet angle ne soit déjà

droit, c'est-à-dire à moins que le plan $P\alpha P_1$ ne soit déjà perpendiculaire au plan vertical.

S'il en est ainsi, autrement dit lorsque le plan $P\alpha P_1$ est de bout, en le faisant tourner autour d'un axe de bout, il reste lui-même de bout, et en même temps l'angle du plan avec le plan horizontal passe par toutes les grandeurs possibles, en particulier par zéro.

Il est donc indispensable d'amener d'abord le plan $P\alpha P_1$ à être de bout.

La première opération est par conséquent une rotation autour

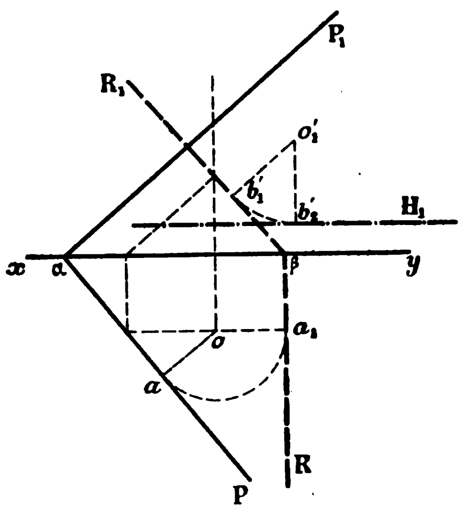


Fig. 72.

d'un axe vertical o (fig. 72) mesurée par l'angle aoa_1, permettant d'amener le plan $P\alpha P_1$ dans la position $R\beta R_1$ où il est de bout.

La deuxième opération est une rotation autour d'un axe de bout o'_1 mesurée par l'angle $b'_1o'_1b'_2$ qui amène le plan $R\beta R_1$ dans la position du plan horizontal H_1.

168. — Rendre une droite verticale. — Ce nouveau problème est, comme nous l'avons vu déjà, le même que le précédent. Reprenons encore ici le raisonnement direct, pour montrer la nécessité des deux opérations.

Si l'on faisait tourner la droite autour d'un axe vertical, son angle avec le plan horizontal ne changerait pas, il serait donc impossible de le rendre droit. Essayons alors de faire tourner la droite autour d'un axe de bout. Cette fois l'angle de la droite avec

le plan vertical ne peut pas devenir nul, à moins qu'il ne le soit déjà, c'est-à-dire à moins que la droite ne soit déjà de front. Dans ce dernier cas, en faisant tourner cette droite de front autour d'un axe de bout, elle reste de front, et en même temps son angle avec le plan horizontal passe par toutes les grandeurs possibles, et en particulier par un droit.

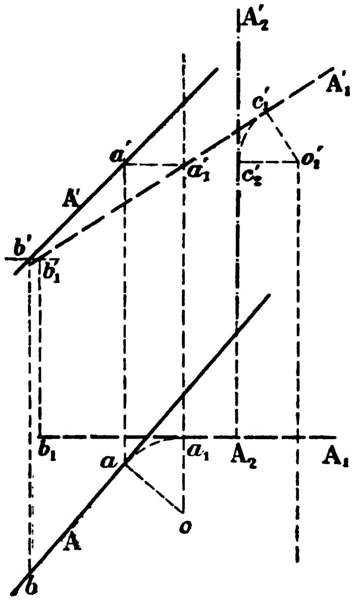


Fig. 73.

En résumé, nous dirons :

1re *opération*. — Rotation autour d'un axe vertical ayant pour but d'amener la droite à être de front. Pour mettre en évidence l'angle de rotation, on abaisse du pied de l'axe *o* (fig. 73) une perpendiculaire *oa* sur A; l'angle de rotation est alors mesuré par aoa_1, et cette rotation amène la droite dans la position A_1A_1' où elle est de front.

2e *opération*. — Rotation autour d'un axe de bout o'_1 ayant pour but de rendre la droite verticale. Pour mettre en évidence l'angle de rotation, nous abaissons de o'_1 une perpendiculaire $o'_1c'_1$ sur A'_1 et alors l'angle de rotation est mesuré par l'angle $c'_1o'_1c'_2$. Cette deuxième rotation amène la droite dans la position A'_2A_2 qui est alors verticale.

IV. — AMENER DEUX PLANS RECTANGULAIRES P ET Q A ÊTRE PARALLÈLES AUX DEUX PLANS DE PROJECTION.

169. — Le premier plan P étant donné quelconque, le second plan Q est perpendiculaire sur le premier; il est donc déterminé par une droite, par exemple, par son intersection *ltl't'* avec le plan P. Nous amènerons d'abord le plan P à être horizontal, puis le plan Q à être de front.

1[re] *opération.* — Rotation autour d'un axe vertical ayant pour but d'amener le plan P à être de bout.

2[e] *opération.* — Rotation autour d'un axe de bout permettant de rendre le plan P horizontal. Le deuxième plan Q, auquel on a fait subir bien entendu les opérations précédentes, est maintenant un plan vertical défini par sa trace horizontale l_2t_2.

3[e] *opération.* — Rotation autour d'un axe vertical laissant le plan P horizontal, et permettant de rendre le plan vertical $l_2 t_2$ de front.

CHAPITRE III

I. — RABATTEMENTS.

170. — Nous avons reconnu que le problème le plus souvent employé, c'est-à-dire amener un plan à être horizontal, pouvait se résoudre à l'aide de deux changements de plan consécutifs, ou à l'aide de deux rotations consécutives. Nous savons de plus qu'un changement de plan est équivalent à une rotation ; donc, au lieu de faire deux opérations consécutives de même espèce, on peut commencer par faire un changement de plan, pour finir par une rotation.

L'ensemble de ces deux opérations effectuées dans l'ordre que nous venons d'indiquer : 1° changement de plan ; 2° rotation, constitue ce que nous appelons un rabattement.

On pourrait aussi commencer par une rotation pour finir par un changement de plan. Mais cette façon de procéder ne s'emploie pas, parce qu'elle ne conduit pas à une autre explication naturelle que voici :

Il est évident que pour amener un plan à être horizontal, il suffit de le faire tourner, autour de l'une de ses horizontales, d'un angle égal à l'angle du plan avec le plan horizontal. Mais, une rotation autour d'un axe simplement horizontal n'étant pas possible directement, il est nécessaire d'amener d'abord l'axe de rotation à être de bout, en profitant de ce qu'il est déjà horizontal.

Soit donc à rabattre le plan $aHa'H'$ autour de l'horizontale HH' sur le plan horizontal H' (fig. 74).

1^re^ *opération.* — Changement de plan vertical, en prenant comme ligne de terre x_1y_1 une perpendiculaire sur la charnière H, ce changement de plan ayant pour but d'amener le plan aH à être de bout, ou, ce qui revient au même, ayant pour but d'amener l'axe de rotation à être de bout. Comptons en même temps les cotes du système primitif à partir du plan horizontal H'.

La droite HH' a donc pour nouvelle projection verticale le point H'_1 sur x_1y_1. Quant au point aa', il se projette verticalement en a'_1 sur la nouvelle ligne de rappel $a\alpha_1$, à une distance $a_1\alpha_1$ au-dessus de x_1y_1 égale à la cote relative $a'\alpha$ du système primitif. Il en résulte que, dans le nouveau système, le plan est de bout, et il a pour trace verticale nouvelle $a'_1H'_1$.

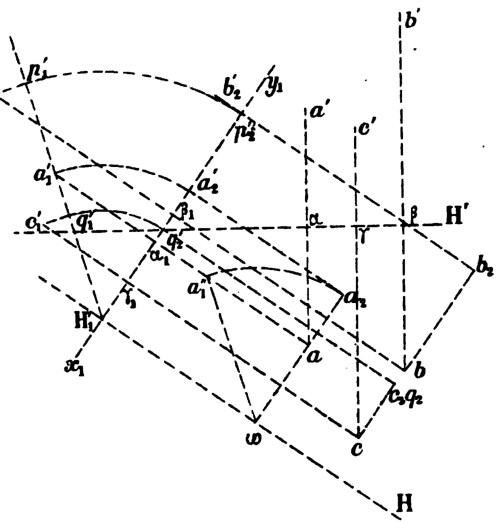


Fig. 74.

2° *opération.* — Rotation autour de la ligne de bout H'_1 mesurée par l'angle $a'_1H'_1y_1$, cette rotation permettant de rendre le plan horizontal, elle amène en particulier le point aa'_1 en a'_2a_2.

II. — RABATTEMENT D'UN POINT QUELCONQUE.

171. — Appliquons ces mêmes opérations à un point quelconque de l'espace bb' (fig. 74). Le changement de plan donne pour nouvelle projection verticale le point b'_1 en prenant $b'_1\beta_1$ égale à $b'\beta$. Pour faire ensuite la rotation, nous emploierons avantageusement le procédé déjà donné (165).

De b'_1 on abaisse une perpendiculaire $b'_1p'_1$ sur le premier rayon $H'_1a'_1$, puis on fait tourner ce point p'_1 de façon à l'amener en p'_2 sur le deuxième rayon. On mène ensuite par p'_2 la perpen-

diculaire sur le second rayon, c'est-à-dire la ligne de rappel, sur laquelle on prend $p'_2b'_2$ égale à $p'_1b'_1$. D'ailleurs, en projection horizontale, le point b a décrit une perpendiculaire sur la charnière, ce qui nous donne en $b_2b'_2$ le rabattement cherché.

L'avantage de cette façon de procéder, c'est qu'il était inutile de marquer le point b'_2 pour trouver b_2; or la chose utile dans le rabattement du plan, c'est généralement l'ensemble des points a_2, b_2, c_2, etc.

Cette façon de procéder s'appelle aussi le rabattement d'un point invariablement lié au plan. Le point bb' a été relié au plan par la perpendiculaire abaissée du point sur le plan, de telle sorte que ce que l'on rabat réellement, ce n'est pas le point lui-même, mais le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan.

172. — Relèvement d'un point. — Soit c_2 le rabattement d'un point quelconque de l'espace (fig. 74). Remarquons d'abord que le point de l'espace n'est pas déterminé par cet unique rabattement, car se donner seulement le rabattement d'un point, c'est comme si l'on se donnait une seule projection du point. Il est donc indispensable, pour définir complètement le point, de se donner en outre sa cote au-dessus du plan qu'on a rabattu. Pour le point bb' du problème précédent, cette cote était $b'_2p'_2$ ou $b'_1p'_1$. Nous relèverons d'abord le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan, c'est-à-dire le point $q_2q'_2$ en q'_1. C'est seulement maintenant que nous mènerons par q'_1 une perpendiculaire sur le plan, sur laquelle nous prendrons la cote connue $q'_1c'_1$. La ligne de rappel c'_1 donne en c'_1c le résultat inverse de la rotation. On passe enfin du système x_1y_1 au système primitif à l'aide de la ligne de rappel $c\gamma$ et de la cote relative $c'_1\gamma_1$ que l'on porte suivant $c'\gamma$. Finalement, cc' est le relèvement du point.

III. — RABATTEMENT DES POINTS DU PLAN.

173. — La décomposition du rabattement en changement de plan et rotation nous conduit pour trouver le rabattement d'un point du plan (fig. 74) à ce qu'on appelle la règle du triangle rectangle. Cette règle, qui, bien entendu, ne constitue pas un raisonnement, s'énonce ainsi:

Le rabattement a_2 *du point* aa' *contenu dans le plan se trouve sur une perpendiculaire* $a\omega$ *à la projection horizontale de la*

charnière menée par la projection horizontale du point, à une distance $a_2\omega$ ***de la projection horizontale de la charnière qui est l'hypoténuse d'un triangle rectangle*** $a'_1\alpha_1H'_1$, ***ayant pour côtés de l'angle droit les distances des deux projections du point aux deux projections de même nom de la charnière,*** $a\omega$, $a'\alpha$. ***De plus dans ce triangle rectangle, l'angle aigu opposé à la cote relative*** $a'_1H'_1\alpha_1$ ***est l'angle du plan donné avec le plan horizontal, autrement dit c'est l'angle du rabattement.***

Pour appliquer cette règle, on se contente généralement de mener par a une perpendiculaire $a\omega$ à la charnière (fig. 74), puis une parallèle à la charnière. Sur cette dernière droite, on prend la longueur aa''_1 égale à la cote relative, ce qui donne le triangle rectangle $a\omega a''_1$. Enfin, de ω comme centre avec $\omega a''_1$ pour rayon, on décrit un arc de cercle qui rencontre $a\omega$ au point demandé a_2.

Cette façon de procéder revient à dire que l'on a fait le changement de plan vertical en prenant comme ligne de terre $a\omega$. Aussi est-il maladroit d'appliquer cette règle lorsqu'on a un certain nombre de points à rabattre, puisqu'on peut se contenter d'un changement de plan unique pour tous les points, au lieu d'en faire un spécial pour chaque point.

Le changement de plan unique a de plus l'avantage de rejeter tous les triangles rectangles tels que $a\omega a''_1$ en dehors du dessin, ce qui est par conséquent favorable à la lecture de l'épure.

D'ailleurs cette règle du triangle rectangle ne constitue pas une simplification, elle n'est que le résumé du raisonnement primitif.

174. — Relation entre la projection d'une figure et son rabattement. — Soit a_2 le rabattement d'un point a d'un plan autour d'une horizontale H de ce plan (fig. 75); proposons-nous d'en déduire le rabattement d'un autre point quelconque du plan donné par sa projection horizontale b.

Considérons la droite du plan projetée horizontalement suivant ab, elle rencontre la charnière H en un point λ qui reste fixe dans le rabattement, donc la droite ab est rabattue suivant $a_2\lambda$. Le rabattement b_2 du point b se trouvera donc sur $a_2\lambda$ et en même temps sur la perpendiculaire abaissée de b sur la charnière H.

Au lieu d'utiliser le rabattement d'un premier point du plan, pour en déduire celui de tous les autres, on peut aussi se servir du rabattement d'une première droite.

Soit (fig. 76) A_2 le rabattement autour de H d'une droite quel-

conque A du plan, et proposons-nous de trouver le rabattement d'un autre point quelconque m du plan.

Considérons l'horizontale du plan passant par m ; elle coupe A en μ, qui se rabat en μ_2 sur A_2. L'horizontale $m\mu$ est donc rabat-

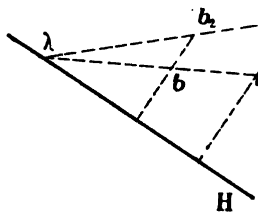


Fig. 75.

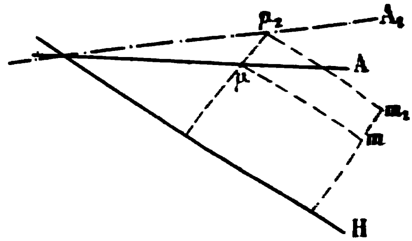


Fig. 76.

tue suivant une parallèle à H menée par μ_2, et, par suite, le point m se rabat en m_2.

Ces raisonnements montrent que le rabattement d'une figure plane est une transformation homographique de la projection horizontale de la même figure, l'axe d'homographie étant la charnière. Ils permettent de trouver le rabattement de tous les points d'une figure plane, connaissant le rabattement de l'un de ses points. Quant au rabattement de ce point, il a pu être déterminé jusqu'à présent par la décomposition du rabattement, en changement de plan et rotation, ou, ce qui revient au même, par la règle du triangle rectangle.

175. — Construction directe du rabattement d'un point. — Soit HH' l'horizontale qui sert de charnière, et aa' le point du plan dont on désire trouver le rabattement (fig. 77).

Considérons la ligne de front du plan qui passe par le point donné aa', elle rencontre la charnière au point ff'.

Le rabattement inconnu du point aa' se trouve sur une perpendiculaire $a\omega$ à la projection horizontale de la charnière menée par la projection horizontale a du point et à une distance a_2f du point f égale à la longueur de la ligne de front $afa'f'$. Or cette longueur est connue, elle est mesurée par $a'f'$. On aura donc le point a_2 en décrivant de f comme centre une circonférence avec $a'f'$ pour rayon.

Dans cette construction, nous n'avons fait qu'appliquer le prin-

cipe de la suspension à la Cardan, qui a pour but d'obtenir une rotation autour d'un point à l'aide de deux rotations autour de deux axes rectangulaires.

Nous avons expliqué, en effet, que le problème *rendre un plan horizontal* nécessitait deux opérations, soit deux changements de plan, soit deux rotations, soit encore un changement de plan suivi d'une rotation, c'est-à-dire un rabattement; or les deux rotations équivalent à une rotation autour d'un point, c'est-à-dire à l'emploi d'une sphère convenablement choisie, ayant, dans notre exemple, pour centre le point ff' et pour rayon $f'a'$.

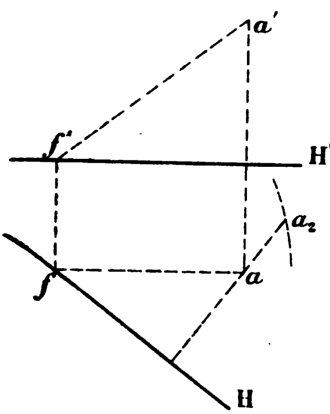


Fig. 77.

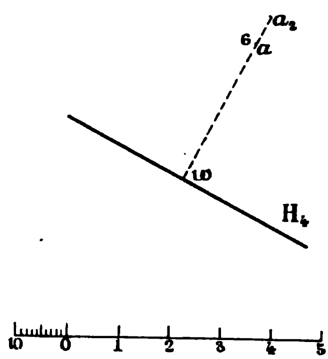


Fig. 78.

176. — Application aux plans cotés. — Lorsque les données sont définies en géométrie cotée, si l'on se permet l'emploi de projections verticales concurremment avec celui des cotes, les méthodes que nous venons d'indiquer sont encore applicables; mais, si l'on veut absolument employer des cotes sans projection verticale, il ne nous reste plus, des méthodes précédentes, que celle des rabattements, à l'aide de laquelle on se retrouve finalement dans le système primitif; mais encore faut-il remplacer la projection verticale auxiliaire par un calcul numérique.

Nous avons reconnu d'abord que, pour rabattre un point quelconque de l'espace, il suffisait de rabattre le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan. Nous sommes donc ramenés au problème qui consiste à rabattre un point d'un plan.

Dans la méthode des plans cotés, au lieu de construire le

triangle rectangle du rabattement, on en calcule l'hypoténuse. Soit donc le plan a(6) H (4) (fig. 78). Nous dirons : le rabattement a_1 du point a se trouve d'abord sur une perpendiculaire $a\omega$ à la charnière H, à une distance δ de la charnière qui est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour premier côté de l'angle droit $a\omega$, distance de la projection horizontale du point à la projection horizontale de la charnière, et pour autre côté de l'angle droit la différence des cotes de H et de a.

Or la longueur $a\omega$, mesurée à l'échelle du dessin, valant 3 et la différence de cote étant 2, on a, pour la valeur de l'hypoténuse, $\delta = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} = 3,60$, que l'on mesurera à l'échelle du dessin pour les porter suivant ωa_2.

CHAPITRE IV

I. — APPLICATIONS.

177. — Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'étudier les principales applications des méthodes exposées précédemment.

Étant donné, d'une façon générale, un problème à résoudre à l'aide de changements de plans, rotations, rabattements, on doit, avant tout, étudier le cas particulier du problème, c'est-à-dire se rendre compte, par l'étude géométrique de ce problème, des positions simples qu'il conviendrait de choisir pour les données, afin que la solution du problème soit immédiate. Ou, si l'on veut, il faut mettre en évidence les plans qu'il conviendrait de prendre comme plans de projection pour simplifier le problème. On amène alors ces plans à être parallèles aux plans de projection. On effectue en même temps les opérations indiquées pour toutes les données du problème. C'est alors le moment de résoudre la question primitive dans le cas particulier qu'on a choisi, puis on effectue les opérations inverses pour les résultats trouvés.

Ainsi, quand on demande de construire un cube, connaissant une arête A et un sommet a contenus dans la même face, on voit qu'il est bon de prendre le plan Aa comme plan horizontal de projection, parce qu'il est très facile de construire un cube reposant par une face sur le plan horizontal.

178. — Dans cette application générale, qui consiste à amener un plan déterminé à être horizontal, il faudra bien s'assurer que le plan donné n'est pas déjà, par hasard, perpendiculaire sur l'un des plans de projection, parce qu'alors une seule opération au lieu de deux suffirait pour arriver au résultat.

Ainsi, il ne convient pas, étant donné un plan vertical, de chercher à le prendre comme plan horizontal, puisque, en le prenant immédiatement comme plan vertical de projection, on arrive

au résultat demandé, qui est, en somme, de le prendre comme plan de projection, sans autre qualification.

Dans le même ordre d'idées, il faut éviter d'employer la locution rabattre un plan vertical. Car, par notre définition, le rabattement équivaut à deux opérations. On doit donc dire simplement que l'on prend le plan vertical donné comme plan vertical de projection.

Les principales applications des méthodes sont les mesures de longueurs et les mesures d'angles.

II. — DISTANCE DE DEUX POINTS.

179. — Le cas particulier de la distance de deux points est celui où la droite qui les joint est parallèle à l'un des plans de projection. Il suffit donc d'amener la droite à être de front, à l'aide soit d'un changement de plan vertical, soit d'une rotation autour d'un axe vertical, ou encore de rendre la droite horizontale à l'aide d'un changement de plan horizontal ou bien d'une rotation autour d'un axe de bout.

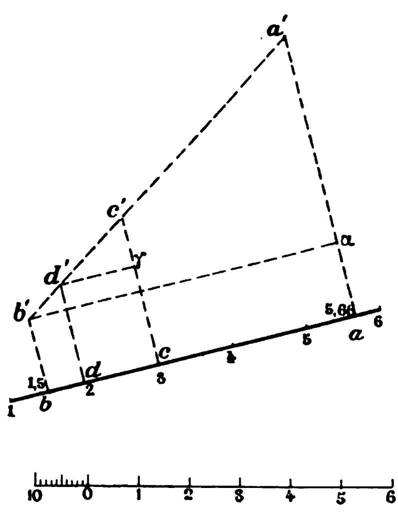


Fig. 79.

Soit, en géométrie cotée, les deux points a (5,66), b (1,50) (fig. 79).

Prenons, comme plan vertical de projection, le plan vertical ayant pour trace horizontale ab, les deux points a et b auront pour projections verticales a', b', à des distances au-dessus de xy, aa', bb' égales respectivement à 5,66 et 1,50 comptées sur l'échelle du dessin.

La distance cherchée est alors mesurée par $a'b'$, soit 7,49 à l'échelle du dessin, d'après ce théorème que toute figure plane se projette sur un plan parallèle suivant une figure égale.

Pour éviter l'emploi d'une projection verticale, imaginons la

parallèle à xy menée par b', soit $b'\alpha$. Nous formons ainsi le triangle rectangle $a'b'\alpha$, dans lequel on a :

$$\overline{a'b'}^2 = \overline{a'\alpha}^2 + \overline{b'\alpha'}^2 = \overline{a'\alpha}^2 + \overline{ab}^2.$$

On peut donc se contenter de mesurer ab à l'échelle du dessin, soit 6,25; quant à $a'\alpha$, c'est la différence de cote des deux points; on a donc :

$$a'\alpha = 5{,}66 - 1{,}50 = 4{,}16,$$

et, par suite :

$$\delta^2 = \overline{6{,}25}^2 + \overline{4{,}16}^2,$$

d'où :

$$\delta = 7{,}49.$$

Si nous considérons les points de la droite cc' (3) dd' (2), le triangle rectangle $c'd'\gamma$ dans lequel $c'\gamma$ est égale à 1 et $d'\gamma$ au module m de la droite, nous voyons que ce triangle est semblable au triangle $a'\alpha b'$, il donne par conséquent :

$$\frac{a'\alpha}{1} = \frac{b'\alpha}{m};$$

donc :

$$b'\alpha = ab = m \times a'\alpha' = m \times d,$$

en appelant d la différence de cote des deux points.

On a par conséquent :

$$\delta^2 = \overline{a'\alpha}^2 + m^2(a'\alpha)^2 = d^2(1 + m^2),$$

d'où :

$$\delta = d\sqrt{1 + m^2} = d\sqrt{1 + \left(\frac{1}{p}\right)^2}.$$

Dans cette dernière expression de la distance de deux points, nous rappelons que d est la différence de cote et p la pente qui, comme nous l'avons déjà dit, est l'inverse du module ou la tangente de l'angle de la droite avec le plan horizontal.

Finalement la projection verticale dans cette question est remplacée par :

$$\delta = 4{,}16\sqrt{1 + \overline{1{,}5}^2} = 4{,}16 \times 1{,}80 = 7{,}49.$$

Les problèmes sur les angles droits nous ont montré que la dis-

tance d'un point à un plan, d'un point à une droite, et la plus courte distance entre deux droites pouvaient se ramener à la distance de deux points; nous pourrions donc considérer maintenant tous ces problèmes comme résolus, mais on peut cependant les résoudre directement.

III. — DISTANCE D'UN POINT A UN PLAN.

180. — Le cas particulier de la distance d'un point à un plan est celui où le plan donné est perpendiculaire sur l'un des plans de projection. Lorsque par exemple le plan donné est de bout, la distance cherchée est mesurée par la distance de la nouvelle projection verticale du point à la nouvelle trace verticale du plan.

On pourra donc effectuer, soit un changement de plan vertical, soit une rotation autour d'un axe vertical, ayant pour but d'amener le plan donné à être de bout, ou bien encore soit un changement de plan horizontal, soit une rotation autour d'un axe de bout permettant de rendre le plan vertical.

En géométrie cotée, pour éviter ces projections auxiliaires, nous emploierons le procédé direct qui consiste à trouver le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan, puis à chercher la distance des deux points.

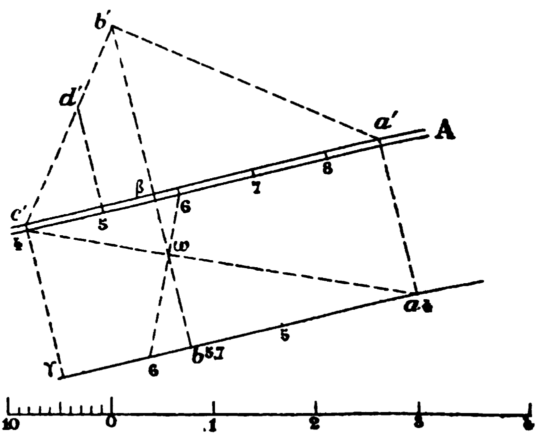


Fig. 80.

Soit le point *a* (4) et le plan défini par son échelle de pente A, (fig. 80).

La perpendiculaire abaissée du point sur le plan a sa projec-

tion horizontale *ab* parallèle à la ligne de plus grande pente du plan. Son module est l'inverse du module du plan. Ce dernier valait $\frac{3}{4}$, celui de la perpendiculaire vaut donc $\frac{4}{3}$, ce qui permet de graduer cette perpendiculaire.

Nous cherchons ensuite le pied de la perpendiculaire sur le plan, à l'aide de deux horizontales s'appuyant sur *ab* et sur A, soit les horizontales (4) (4), (6) (6) qui se coupent au point fixe ω.

En menant l'horizontale du plan par ce point fixe ω on a, en *b*, le pied de la perpendiculaire, et en même temps sa cote (5,7.) La distance du point au plan est donc donnée par la formule :

$$\delta = (5,7 - 4)\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = 2,8.$$

Si l'on avait permis l'emploi d'une projection verticale, il suffisait de prendre A comme ligne de terre ; le plan a pour trace verticale $c'd'$, dd' étant égale à une unité de l'échelle du dessin. D'un autre côté, le point *a* se projette verticalement en a' en comptant les cotes à partir du plan horizontal (4).

La perpendiculaire abaissée du point sur le plan a donc pour projection verticale la perpendiculaire abaissée de a' sur $c'd'$. Le pied de la perpendiculaire est alors $b'b$. Quant à la distance du point au plan, elle est mesurée par la longueur de $a'b'$ à l'échelle du dessin.

On peut encore trouver la distance du point au plan sans chercher le pied de la perpendiculaire sur le plan, il suffit de connaître pour cela la longueur $a\gamma$ qui est la distance de *a* à l'horizontale du plan de même cote que *a*.

Considérons en effet le triangle rectangle $a'b'c'$, et appelons x et y les longueurs $c'\beta$, $a'\beta$, la longueur $a\gamma$ ou $a'c'$ étant l.

On a :

$$x + y = l \quad \text{et} \quad \frac{x}{m} = \frac{y}{\left(\frac{1}{m}\right)},$$

en appelant m le module du plan.

Cette dernière relation donne :

$$x = ym^2,$$

et par suite la première donne :

$$y = \frac{l}{1 + m^2}.$$

Or : $\overline{a'b'}^2 = a'c' \times \beta a'$;

donc :

$$\delta^2 = \frac{l^2}{1+m^2} \quad \text{ou} \quad \delta = \frac{l}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Dans l'épure, δ mesuré à l'échelle du dessin vaut 3,5 et m vaut $\frac{3}{4}$.

Donc :

$$\delta = \frac{3,5}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = 2,8.$$

IV. — DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE.

181. — La résolution de ce problème peut se ramener comme celle du précédent à la distance de deux points. On mène par le point donné le plan perpendiculaire sur la droite, et l'on détermine l'intersection de ce plan avec la droite. On a ainsi le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite. La distance des deux points sera la longueur cherchée.

On peut dire aussi : le cas particulier de la distance d'un point à une droite est celui où la droite est verticale, ou encore celui où le plan déterminé par le point et par la droite est horizontal.

Il suffit donc d'amener la droite donnée à être verticale, ce qui nécessite deux opérations, soit deux changements de plan, soit deux rotations ou encore un rabattement.

Ou bien on amène le plan déterminé par le point et la droite à être horizontal, ce qui nécessite également deux opérations qui pourront être soit deux changements de plan, soit deux rotations, soit un rabattement.

En géométrie cotée, nous emploierons de préférence un rabattement en utilisant l'un ou l'autre des deux cas particuliers.

182. — 1^er^ *procédé*. — Soit la droite A définie par son échelle et le point a(4) (fig. 81). Nous allons amener la droite à être verticale, à l'aide d'une rotation autour d'un axe horizontal H mené par le point a (4) par exemple et perpendiculaire sur A.

Le point a restera fixe ; quant à la droite A, elle aura pour rabattement un point de A, à une distance $A_2\omega$ égale précisément à la distance du point $\omega(4)$ à la droite A de l'espace. Or cette distance est égale à $\omega b \sin\varphi$, en appelant φ l'angle de A avec le plan horizontal.

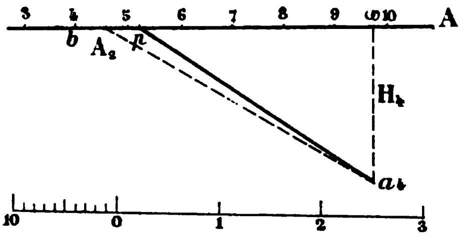


Fig. 81.

zontal. Cet angle φ a pour tangente la pente de la droite ou l'inverse du module $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{m}$; on a donc :

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Nous retrouvons ainsi la relation donnée précédemment :

$$\delta = \frac{l}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{2,9}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = 2,23.$$

Ainsi la droite est devenue la verticale A_2 en prenant $A_2\omega = 2,23$ à l'échelle du dessin. La distance du point à la droite est finalement mesurée par $aA_2 = 3$. Quant au pied de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite, il est sur A, à une distance ωp de ω égale à $\delta \sin\varphi$ ou :

$$\frac{l}{1+m^2} = \frac{2,9}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2,3.$$

183. — 2ᵉ *procédé.* — Dans ce deuxième procédé, nous utiliserons le second cas particulier qui consiste à rabattre le plan déterminé par la droite et le point.

Soit le point a(6) et la droite A définie par son échelle (fig. 82).
Commençons par construire l'horizontale du plan aA passant par a, soit ab; c'est autour de cette horizontale que nous allons effectuer le rabattement. Les points a et b sur la charnière resteront fixes, il suffit donc de rabattre un seul point de la droite, par exemple le point c (7).

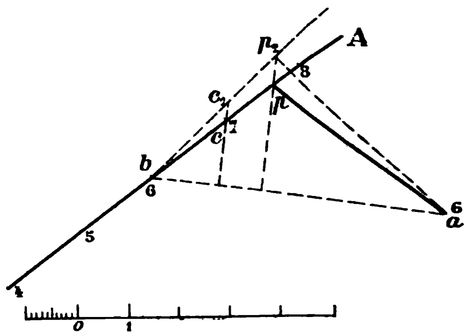


Fig. 82.

Le rabattement c_2 de ce point se trouve sur cd perpendiculaire à la charnière et à une distance c_2d de la charnière égale à :

$$\sqrt{1+\overline{cd}^2} = \sqrt{1+\overline{1,3}^2} = 1,64.$$

La droite est donc rabattue suivant bc_2, et alors la distance cherchée est mesurée par $ap_2 = 4,3$. Quant au pied de la perpendiculaire, on l'obtient en relevant p_2 en p sur A à l'aide de la perpendiculaire à ab menée par p_2.

V. — PLUS COURTE DISTANCE ENTRE DEUX DROITES.

184. — Un premier cas particulier de ce problème est celui où l'une des droites données est verticale. Soit la verticale AA' (fig. 83) et la droite quelconque BB'.

La perpendiculaire commune étant perpendiculaire sur une verticale AA' est horizontale; elle forme donc avec BB' un angle droit qui se projette horizontalement suivant un angle droit. On aura donc la projection horizontale de la perpendiculaire commune, en abaissant de A une perpendiculaire sur B; soit mn.

Le point *n* se projette verticalement en *n'* sur B'; et, comme la perpendiculaire commune est horizontale, sa projection verticale *m'n'* est parallèle à la ligne de terre. Pour la même raison, la plus courte distance est mesurée en projection horizontale par *mn*.

On voit donc que pour trouver la plus courte distance entre deux droites, ainsi que la perpendiculaire commune, il suffit d'amener l'une des droites à être verticale à l'aide de deux changements de plan, ou bien deux rotations, ou un rabattement.

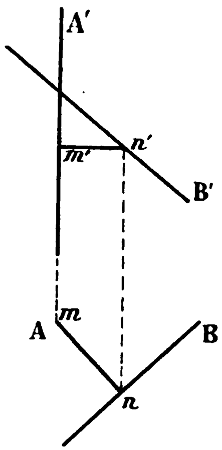


Fig. 83.

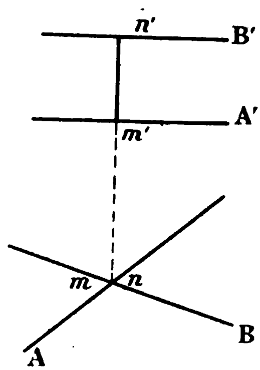


Fig. 84.

185. — Un deuxième cas particulier est celui où les deux droites sont horizontales. Soit AA', BB' les deux droites données (fig. 84).

Ici, la perpendiculaire commune est verticale, elle se projette horizontalement au point *mn* à l'intersection de A, B, et verticalement suivant la ligne de rappel *m'n'* du point *mn*. Comme elle est en même temps de front, sa longueur est donnée en projection verticale, c'est d'ailleurs la différence des cotes de AA' et BB'. Ce cas particulier présente en outre l'avantage de donner l'angle des deux droites, qui est mesuré par l'angle de leurs projections horizontales A, B.

Pour amener deux droites quelconques dans cette position particulière, il y aura lieu d'effectuer deux opérations : soit deux changements de plan, soit deux rotations, soit un rabattement.

Il faut en effet construire un plan parallèle aux deux droites et amener ce plan à être horizontal.

186. — Comme troisième cas particulier, nous citerons encore celui où les deux droites ont leurs projections sur un même plan parallèles, soit les projections horizontales, soit les projections verticales.

Soit AA′, BB′ les deux droites, dont les projections verticales A′, B′ sont parallèles (fig. 85).

Nous avons immédiatement ici la direction de la perpendiculaire commune, c'est une ligne de front, dont la projection verticale sera perpendiculaire sur A′ et B′.

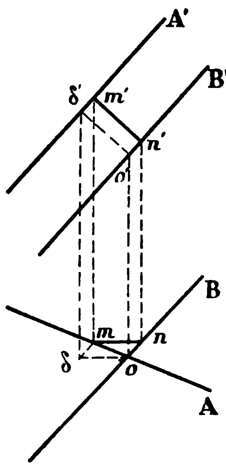


Fig. 85.

Pour trouver sa position, on a mené par BB′ le plan BoδB′o′δ parallèle à la direction de la perpendiculaire commune, puis on a cherché l'intersection de ce plan avec AA′ à l'aide du plan de bout A′. Ce plan auxiliaire coupe oδo′δ′ en δδ′, BB′ à l'infini. Donc le plan auxiliaire coupe le plan Boδ suivant la parallèle à BB′ menée par δδ′. Cette dernière droite rencontre AA′ en *mm′* qui est l'un des pieds de la perpendiculaire commune. Il suffit donc de mener par *mm′* la parallèle *mmn′n′* à oδo′δ′ pour avoir la perpendiculaire commune cherchée.

La plus courte distance entre les deux droites est alors mesurée par *m′n′*, puisque *mnm′n′* est une ligne de front. Mais il faut remarquer que cette plus courte distance était connue avant d'avoir construit la perpendiculaire commune elle-même, puisqu'elle était mesurée simplement par la distance des deux droites A′, B′.

Il suffit donc, pour trouver la plus courte distance entre deux droites, d'amener ces deux droites à avoir leurs projections verticales parallèles, ce qui nécessite une seule opération.

187. — En géométrie cotée, nous nous contenterons de construire un plan passant par AA′ parallèle à BB′, et nous déterminerons la distance à ce plan d'un point quelconque de BB′.

Soit les deux droites A, B (fig. 86). Par le point *m* (1) de A nous avons mené une parallèle à B, soit *mn*, *mn* étant le module

de B; *nr* est la trace horizontale du plan ; quant à son module, il est mesuré par *mp* et vaut 0,65 à l'échelle du dessin.

Il reste à évaluer la distance du point *h* (0) de B au plan *mrn*. Nous avons mené par *h* une perpendiculaire sur la trace horizontale du plan, soit *ha*, dont la longueur vaut 2,5.

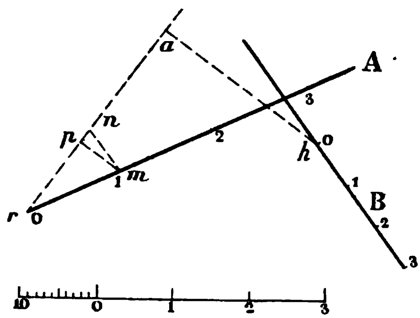


Fig. 86.

La distance du point *h* au plan *mnr*, c'est-à-dire la plus courte distance des deux droites, est donc donnée par la relation :

$$\delta = \frac{2,5}{\sqrt{1 + \overline{0,65}^2}} = 2,1.$$

CHAPITRE V

I. — ANGLE DE DEUX DROITES.

188. — L'angle de deux droites quelconques étant celui de deux parallèles à ces deux droites menées par un même point de l'espace, nous pourrons toujours supposer que les deux droites données se rencontrent.

Le cas particulier de l'angle de deux droites est alors celui où le plan des deux droites est parallèle à l'un des plans de projection. Il suffit donc d'amener le plan des deux droites à être horizontal, ce qui nécessite deux opérations, soit deux changements de plan, soit deux rotations, soit encore un rabattement.

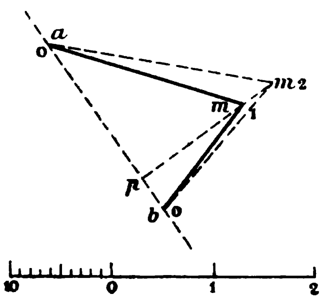


Fig. 87.

En géométrie cotée, nous emploierons le rabattement du plan des deux droites sur un plan horizontal.

Soit les deux droites $m(1)\,a(0)$, $m(1)\,b(0)$ (fig. 87).

Le plan des deux droites a pour trace ab. C'est autour de cette horizontale ab que nous allons effectuer le rabattement. Comme les deux points a et b sont sur la charnière, ils restent fixes, de telle sorte qu'il suffit de rabattre le point m.

Le rabattement de ce point se trouve sur mp et à une distance du point p mesurée par la distance des deux points de l'espace $m(1)$, $p(0)$:

$$\delta = \sqrt{1 + \overline{mp}^2} = \sqrt{1 + \overline{1,2}^2} = 1,56.$$

Finalement, l'angle des deux droites est mesuré par am_2b, après avoir pris $m_2p = 1,56$ à l'échelle du dessin.

II. — ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN.

189. — L'angle d'une droite et d'un plan, c'est l'angle de la droite avec sa projection sur le plan, ou encore c'est le complément de l'angle de la droite avec une perpendiculaire au plan. On se trouve ainsi ramené au problème précédent de l'angle de deux droites.

Soit le plan P défini par son échelle de pente (fig. 88) et la droite A dont on a également l'échelle.

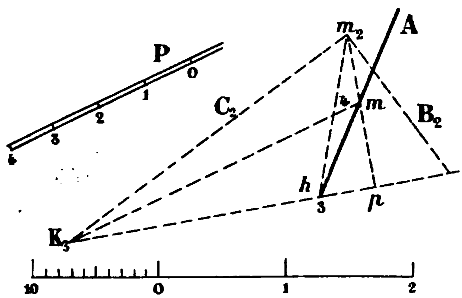


Fig. 88.

Par le point m(4) de A, nous avons mené une perpendiculaire sur le plan P; sa projection horizontale mK est parallèle à l'échelle de pente P du plan, et son module mK est l'inverse de celui du plan. Le module du plan valant 0,4, celui de la perpendiculaire est :

$$\frac{1}{0,4} = 2,50.$$

Le plan mené par la perpendiculaire mK et la droite donnée admet pour horizontale (3) la droite hK, qui va nous servir de charnière.

Les points h et K restent fixes sur la charnière; quant au point m, il se rabat sur mp, à une distance de p :

$$m_2p = \sqrt{1 + \overline{mp}^2} = \sqrt{1 + \overline{0,67}^2} = 1,2.$$

L'angle demandé est donc le complément de hm_2C_2, ou, si l'on veut, il est mesuré par l'angle hm_2B_2, B_2 étant perpendiculaire sur C_2.

III. — ANGLE DE DEUX PLANS.

190. — Le cas particulier de l'angle de deux plans est celui où leur intersection est verticale; dans ce cas, en effet, l'angle des deux plans est mesuré par l'angle de leurs traces horizontales. Il suffit donc de déterminer l'intersection des deux plans et de rendre cette droite verticale à l'aide, soit de deux changements de plan, soit de deux rotations, soit d'un rabattement.

On peut dire aussi qu'il suffit de couper les deux plans donnés par un troisième perpendiculaire à leur intersection et de déterminer l'angle des deux droites ainsi obtenues, en amenant ce troisième plan à être horizontal.

En géométrie cotée, nous emploierons de préférence le rabattement.

Soit donc les deux plans P et Q définis par leurs échelles de pente (fig. 89). Les horizontales (0) des deux plans se coupent en h

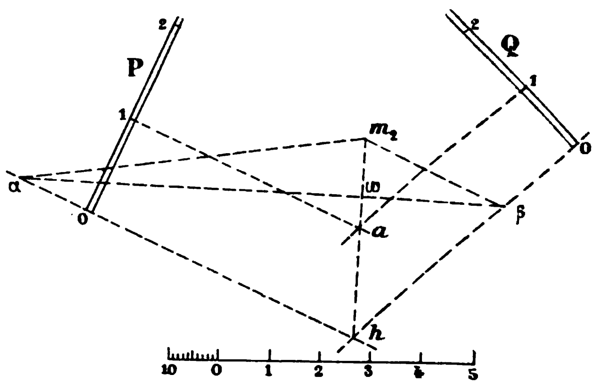


Fig. 89.

et les horizontales (1) au point a, donc ha est l'intersection des deux plans.

C'est cette droite qu'il s'agit de rendre verticale à l'aide d'un rabattement autour d'une charnière $\alpha\beta$, que nous choisissons dans le plan horizontal, perpendiculaire à ah, et coupant enfin les traces horizontales des deux plans en α, β dans les limites de l'épure.

Les deux points α, β, étant sur la charnière, resteront fixes

dans le rabattement; il suffit donc de trouver le rabattement de la droite *ah*. Ce rabattement se réduira à un point sur *ah*, à une distance de ω, qui est la distance de la droite *ah* de l'espace au même point ω.

Or cette distance est égale à $\omega h \sin \varphi$, en appelant φ l'angle de la droite avec le plan horizontal. Comme

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{m},$$

m étant le module de *ah*, on aura :

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Donc la distance cherchée est :

$$\frac{\omega h}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{2,7}{\sqrt{1 + \overline{2,15}^2}} = 1,14 = \omega m_2.$$

Ainsi, après le rabattement, l'arête du dièdre est devenue la verticale m_2; les traces horizontales des deux plans sont αm_2, βm_2, et, par suite, l'angle cherché est $\alpha m_2 \beta$.

CHAPITRE VI

I. — PORTER SUR UNE DROITE UNE LONGUEUR DONNÉE.

191. — Nous utiliserons la formule $\delta = d\sqrt{1+m^2}$, dans laquelle δ est la distance connue, d la différence de cotes entre les deux points et m le module.

Elle donne :

$$d = \frac{\delta}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Soit la droite A (fig. 90), proposons-nous de porter sur cette droite, à partir de a (5,3), une longueur égale à 2.

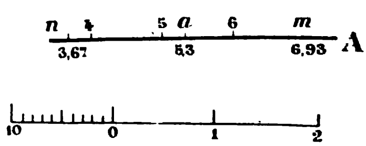


Fig. 90.

On aura :

$$d = \frac{2}{\sqrt{1+\overline{0,7}^2}} = 1,63.$$

La cote du point inconnu est donc la cote du point donné, augmentée ou diminuée de 1,63, c'est-à-dire :

$$5,3 + 1,63 = 6,93,$$

ou :

$$5,3 - 1,63 = 3,67.$$

De plus, l'intervalle entre le point donné et l'un des points

inconnus est égale à la différence de cotes 1,63, multipliée par le module 0,7 de la droite, soit :

$$1,63 \times 0,7 = 1,14.$$

Il suffit donc de prendre les longueurs $am = an = 1,14$ à l'échelle du dessin pour avoir en m et n les points demandés, dont les cotes sont respectivement (6,93) et (3,67).

Il est bien entendu que la construction à l'aide d'un plan vertical auxiliaire, en prenant comme ligne de terre A, conduirait plus rapidement au résultat.

II. — MENER UN PLAN PARALLÈLE A UN PLAN DONNÉ, A UNE DISTANCE DONNÉE DU PREMIER.

192. — On choisit dans le plan donné un point arbitraire a (fig. 90). On mène ensuite par ce point une perpendiculaire A sur le plan donné, et l'on porte sur cette droite une longueur égale à la longueur donnée. Par l'un des points ainsi obtenus m ou n, il ne reste plus qu'à mener un plan parallèle au plan ou perpendiculaire sur A.

III. — MENER DANS UN PLAN, PAR UN POINT, UNE DROITE FAISANT UN ANGLE CONNU AVEC UNE DROITE DU PLAN.

193. — Soit P le plan donné par son échelle de pente (fig. 91),

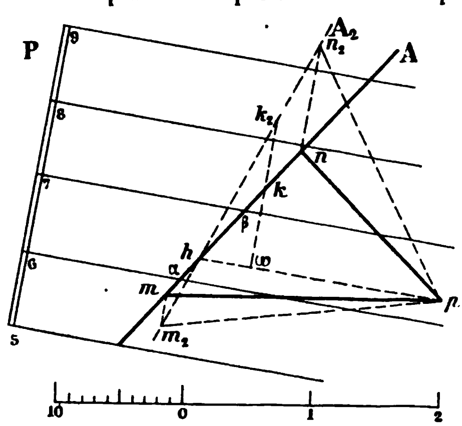


Fig. 91.

A la droite du plan donnée par sa projection horizontale et p

le point du plan donné également par sa projection horizontale.

Nous commençons par rabattre le plan P sur un plan horizontal et, pour introduire le plus possible de points fixes, prenons comme charnière l'horizontale ph du plan donné qui passe par le point p.

Les deux points h et p vont rester fixes, de telle sorte qu'il suffit de rabattre un seul point de A. Pour faciliter le calcul, nous avons choisi le point k tel que l'intervalle hk soit égal à l'intervalle $\alpha\beta$ de la droite A; il en résulte que $k\omega$ est aussi l'intervalle du plan.

Le point k se rabat alors sur la perpendiculaire $k\omega$ à la charnière, à une distance de ω qui est $\delta = \sqrt{1+m^2}$, en appelant m le module du plan. Dans notre exemple, $m = 0{,}6$, donc:

$$\delta = \sqrt{1+\overline{0{,}6}^2} = 1{,}16.$$

Nous prenons donc $k_2\omega$ égale à 1,16 de l'échelle du dessin et nous joignons hk_2 ou A_2.

Il suffit maintenant de mener par p les droites pm_2, pn_2 faisant avec A_2 l'angle connu, et de relever m_2, n_2 en m et n sur A, à l'aide de perpendiculaires à la charnière.

En résumé, pm, pn sont les droites cherchées.

IV. — MENER, PAR UNE DROITE D'UN PLAN, UN SECOND PLAN FAISANT, AVEC LE PREMIER, UN ANGLE DONNÉ.

194. — Soit P le plan donné défini par son échelle de pente et A la droite du plan (fig. 92).

Nous commencerons par amener la droite A à être verticale, à l'aide, par exemple, d'un rabattement autour d'une horizontale perpendiculaire sur le plan vertical A.

Soit $\omega\alpha$ la charnière dans le plan horizontal (4); elle coupe l'horizontale (4) du plan au point α, qui est fixe. Il ne reste plus qu'à rabattre la droite A. Cette droite se rabattra en un point A_2 de A, à une distance de ω qui est :

$$\frac{\omega a}{\sqrt{1+m^2}},$$

en appelant m le module de A. Dans notre exemple, ωa vaut 0,95 et m vaut 0,53; donc :

$$\omega A_2 = \frac{0,95}{\sqrt{1 + \overline{0,53}^2}} = 0,84.$$

Ainsi, le plan donné après le rabattement a pour trace horizontale αA_2.

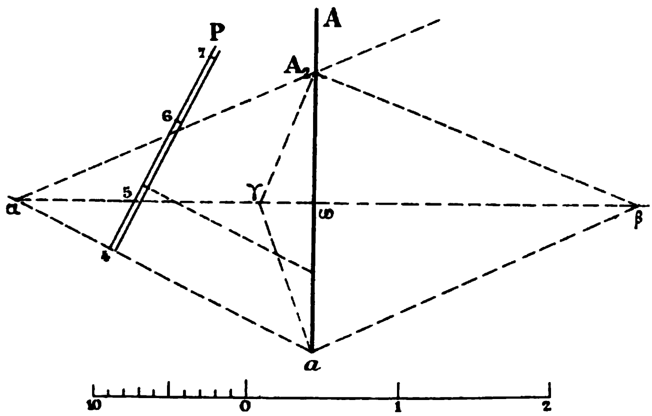


Fig. 92.

Nous menons alors par A_2 une droite faisant avec $A_2\alpha$ l'angle connu, 45° par exemple. On a ainsi, suivant $A_2\beta$ ou $A_2\gamma$, les traces horizontales des plans cherchés; après le rabattement, elles rencontrent la charnière aux points fixes β, γ; donc $a\beta$, $a\gamma$ sont les directions des horizontales des plans inconnus dans le système primitif.

LIVRE VI

POLYÈDRES RÉGULIERS

I. — TÉTRAÈDRE RÉGULIER.

195. — Les quatre faces d'un tétraèdre régulier sont des triangles équilatéraux égaux, chaque sommet appartenant à trois faces. Proposons-nous d'abord de trouver la projection du tétraèdre sur le plan d'une face.

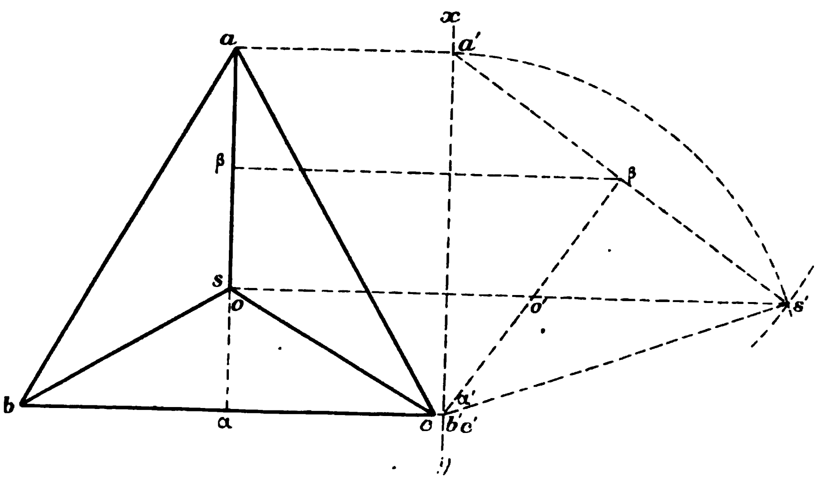


Fig. 93.

Soit *abc* la face connue dans le plan horizontal (fig. 93), ce sera un triangle équilatéral, ayant pour côté la longueur de l'arête du tétraèdre.

Si nous appelons *s* le quatrième sommet, considérons la face *sbc*, c'est aussi un triangle équilatéral, qui se rabat sur le plan

horizontal autour de bc, suivant abc. Donc le sommet s est rabattu en a, d'où il résulte que ce sommet s se projette horizontalement sur la perpendiculaire abaissée de a sur bc. Un raisonnement analogue pour la face sbc montre que le point s appartient à la perpendiculaire abaissée de b sur ac. Donc le point s est le centre du triangle abc.

Il nous reste à calculer la cote h de ce sommet s; elle est donnée par la relation du rabattement $h^2 = \overline{a\alpha}^2 - \overline{s\alpha}^2$. On peut évaluer directement ces quantités $a\alpha$, $s\alpha$, à l'aide de l'échelle du dessin, ou encore en fonction du côté du tétraèdre.

En appelant a le côté du tétraèdre, dans le triangle abc, la hauteur $a\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, donc, $s\alpha$, qui est le tiers de la hauteur, vaut $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ et, par suite, la hauteur du tétraèdre vaut :

$$\sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4 \times 3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

196. — Projection d'un tétraèdre sur un plan parallèle à deux arêtes opposées. — Reprenons la figure précédente 93 et projetons le tétraèdre sur un plan vertical xy, parallèle à sa ou perpendiculaire sur bc. Dans ce système, le rabattement de la face sbc se réduit à une simple rotation. L'opération inverse montre que le sommet s' se trouve à l'intersection de la ligne de rappel s et de la circonférence décrite de $b'c'$ comme centre avec $b'a'$ pour rayon.

Figurons alors, dans ce système, la perpendiculaire commune aux deux arêtes opposées $ass'a'$, $bcb'c'$, soit $\alpha\beta\alpha'\beta'$.

Dans le triangle isocèle $s'a'b'$, le point o' est le point de rencontre des trois hauteurs; donc, oo' est le centre du tétraèdre, puisque deux de ces hauteurs sont en même temps celles du tétraèdre. D'un autre côté, $\beta\beta'$ est le milieu de $sas'a'$ et, comme $o\alpha$ est le tiers de $a\alpha$, oo' est le milieu de $\alpha\beta\alpha'\beta'$.

En résumé, dans un tétraèdre régulier :

1° *Deux arêtes opposées sont rectangulaires, puisque leurs projections sur un plan parallèle à l'une d'elles sont rectangulaires ;*

2° *La perpendiculaire commune à deux arêtes opposées a son pied sur chaque arête au milieu de cette arête ;*

3° *Cette perpendiculaire commune passe par le centre du tétraèdre;*

4° *Enfin, la perpendiculaire commune est partagée par le centre du tétraèdre en deux parties égales.*

Soit A et B les deux arêtes données, que nous supposons horizontales (fig. 94).

Ces deux droites doivent avoir leurs projections horizontales rectangulaires.

La perpendiculaire commune à ces deux arêtes est la verticale $\alpha\beta$, qui s'appuie sur les deux droites en α (4) sur A, β (6) sur B.

Les points α, β seront les milieux des deux arêtes A et B, et, comme ces arêtes sont égales, la projection horizontale du tétraèdre est un carré *abcd*, ayant pour diagonales A et B.

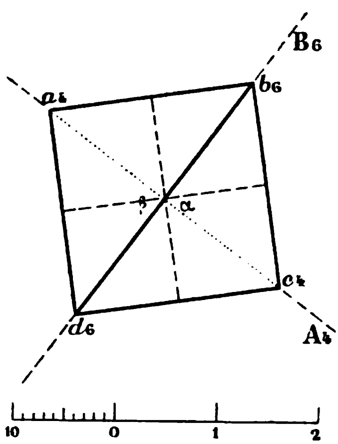


Fig. 94.

De plus, dans ce carré, les côtés opposées *ab*, *cd* sont parallèles; donc, la plus courte distance entre les deux arètes opposées *ab*, *cd* est mesurée par le côté *bc* du carré.

Or cette plus courte distance est connue; c'est la différence de cotes entre les deux arêtes données B (6), A (4), soit 2 unités de l'échelle.

Donc, finalement, la projection horizontale du tétraèdre est le carré construit sur A, B comme diagonales et ayant pour longueur de côté 2 unités.

Pour l'obtenir, on a pris sur les bissectrices de l'angle AαB des longueurs égales à 1, et l'on a mené, par les points ainsi obtenus, des parallèles aux mêmes bissectrices.

II. — CUBE.

197. — Projection d'un cube sur le plan d'une face. — Les six faces d'un cube ou hexaèdre sont des carrés égaux. Soit *abcd* la face connue dans le plan horizontal de projection. Les quatre autres sommets du cube, a_1, b_1, c_1, d_1, se

projettent horizontalement aux mêmes points *a*, *b*, *c*, *d*, et leurs cotes sont égales au côté du carré *ab*.

198. — Projection d'un cube sur un plan perpendiculaire à une diagonale. — En conservant la même disposition de lettres que dans l'exemple précédent, soit ac_1 la diagonale verticale, le sommet inférieur *a* étant dans le plan horizontal (fig. 95).

Les trois arêtes *ab*, *ad*, aa_1, issues du sommet inférieur, sont

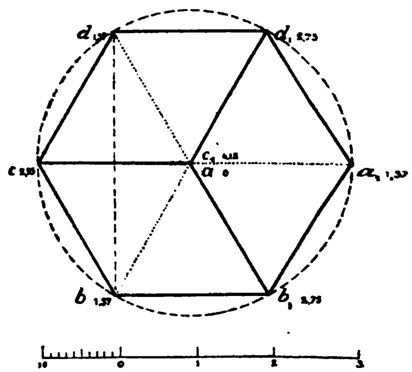


Fig. 95.

égales et également inclinées sur le plan horizontal; elles se projettent donc suivant trois rayons égaux.

De même, les arêtes c_1d_1, c_1b_1, c_1c, qui sont égales et parallèles aux premières, se projettent suivant trois nouveaux rayons égaux et parallèles aux premiers, mais dirigés en sens contraire, de façon à former trois diamètres égaux.

Enfin, les six arêtes qui restent, *bc*, *cd*, dd_1, d_1a_1, a_1b_1, b_1b, sont encore une fois dans l'espace égales et parallèles aux premières; donc, elles se projettent horizontalement, suivant des droites égales et parallèles aux premières.

En résumé, la projection horizontale du cube est un hexagone régulier avec ses trois diamètres.

Il nous reste à déterminer les cotes des sommets autres que le sommet inférieur *a*.

Considérons la face *abcd* qui, dans l'espace, est un carré. Les

deux diagonales de ce carré sont rectangulaires; or elles se projettent suivant deux droites rectangulaires; donc, l'une d'elles au moins est horizontale. De plus, dans l'espace, les deux diagonales considérées sont égales; donc, c'est la plus grande *bd* en projection horizontale qui est horizontale.

Ainsi, $b\omega$ est la grandeur de la demi-diagonale d'une face; par suite, la cote *h* de ω est donnée par la relation :

$$h^2 = \overline{b\omega}^2 - \overline{a\omega}^2.$$

Les arêtes du cube étant toutes égales et également inclinées sur le plan horizontal, les différences de cotes entre les extrémités d'une même arête sont les mêmes pour toutes les arêtes.

Les cotes de b, d, a_1 étant $h = \sqrt{\overline{b\omega}^2 - \overline{a\omega}^2}$, celles de b_1, d_1, c seront $2h$ et, enfin, celle de c_1 sera $3h$.

En appelant *r* le rayon de l'hexagone :

$$a\omega = \frac{r}{2},$$

$$b\omega = \frac{r\sqrt{3}}{2},$$

$$h = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

Si l'on se donnait la longueur *a* de l'arête du cube, *bd* étant la longueur de la diagonale d'une face, on aurait :

$$r\sqrt{3} = a\sqrt{2},$$

$$r = a\sqrt{\frac{2}{3}},$$

et, par suite :

$$h = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Dans l'épure, on a inscrit auprès de chaque sommet sa cote, donnée par l'une quelconque de ces formules.

III. — OCTAÈDRE.

199. — Projection d'un octaèdre régulier sur un plan perpendiculaire à une diagonale. — Les huit faces d'un octaèdre régulier sont des triangles équilatéraux égaux, chaque sommet appartenant à quatre faces qui forment une pyramide régulière à base carrée; de sorte que l'octaèdre peut être considéré comme la réunion de deux pyramides régulières à base carrée, ayant la même base.

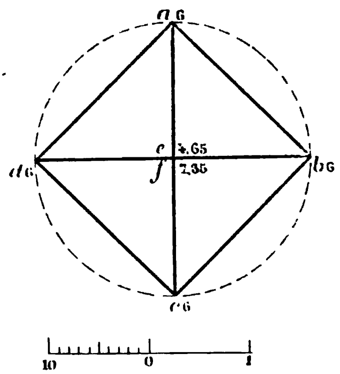


Fig. 96.

Cette base commune est la section de l'octaèdre par un plan diagonal.

Soit *abcd* ce carré à la cote (6) (fig. 96).

Les deux derniers sommets de l'octaèdre se projettent horizontalement au centre du carré, en *e* et *f*; ils sont d'ailleurs à une distance de part et d'autre du plan du carré égale à la demi-diagonale de l'octaèdre ou du carré *abcd*.

En appelant *a* le côté de l'octaèdre, la demi-diagonale *ea* a pour valeur $\frac{a}{\sqrt{2}}$; les cotes de *e* et *f* sont donc égales à la cote du carré 6 plus ou moins $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Ces cotes ont été inscrites sur l'épure auprès de *e* et *f*.

200. — Projection de l'octaèdre régulier sur le plan d'une face. — Soit *abc* la face connue dans le plan horizontal, c'est un triangle équilatéral, ayant pour côté le côté connu de l'octaèdre (fig. 97).

Le centre de l'octaèdre, étant équidistant des trois sommets *a*, *b*, *c*, se projette horizontalement au centre du triangle *abc*.

Les trois sommets inconnus a_1, b_1, c_1 sont symétriques des premiers par rapport au centre; ils forment la face supérieure. Il ne

reste plus qu'à figurer le contour apparent horizontal, qui est un hexagone régulier, $ac_1ba_1cb_1a$.

Pour obtenir les cotes des sommets a_1, b_1, c_1, considérons la face a_1bc; c'est un triangle équilatéral qui se rabat sur le plan

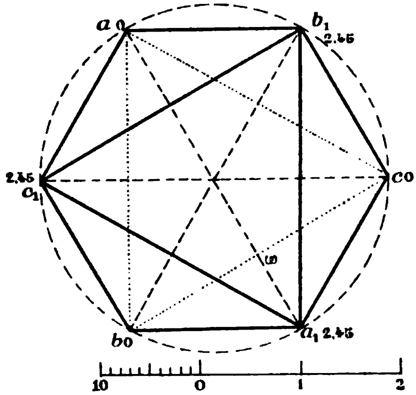


Fig. 97.

horizontal autour de bc, suivant abc. Nous connaissons donc du sommet a_1 sa projection a_1 et son rabattement a; donc, sa cote h est donnée par la relation :

$$h = \sqrt{\overline{a\omega}^2 - \overline{a_1\omega}^2}.$$

En appelant R le rayon de la circonférence circonscrite au contour apparent :

$$a\omega = \frac{3\,R}{2}; \qquad a_1\omega = \frac{R}{2};$$

donc :

$$h = R\sqrt{2}.$$

D'un autre côté, en appelant a le côté de l'octaèdre, comme le triangle $a_1b\omega$ donne :

$$\overline{b\omega}^2 = \overline{a_1b}^2 - \overline{a_1\omega}^2,$$

on en déduit :

$$\frac{a^2}{4} = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3\,R^2}{4},$$

ou :

$$a = R\sqrt{3}; \qquad R = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Donc :

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Les cotes des sommets a_1, b_1, c_1 ont été inscrites auprès de chacun d'eux dans l'épure.

IV. — DODÉCAÈDRE.

201. — Projection d'un dodécaèdre régulier sur le plan d'une face. — Les douze faces d'un dodécaèdre régulier sont des pentagones réguliers égaux, chaque sommet appartenant à trois faces.

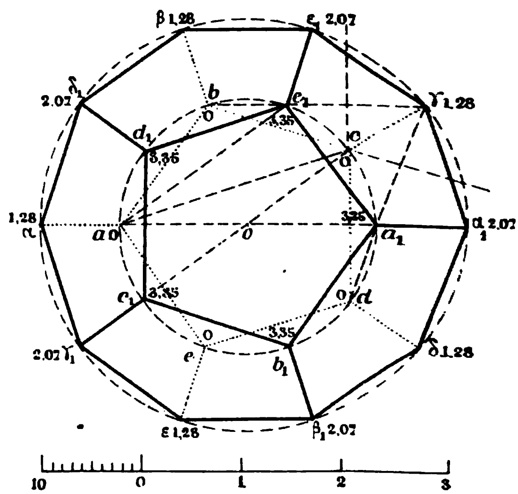


Fig. 98.

Soit *abcde* la face connue dans le plan horizontal (fig. 98). Appelons $c\gamma$ l'arête inconnue partant du sommet c ; elle appartient à la face $\gamma cd\delta$, etc., qui se rabat sur le plan horizontal autour de cd suivant *abcde*. Donc, le sommet inconnu γ est rabattu en b et, par suite, sa projection horizontale se trouve sur la perpendiculaire abaissée de b sur cd.

De même, l'arête $c\gamma$ appartient à la face $\gamma cb\beta$, etc., qui se rabat sur le plan horizontal autour de bc suivant *abcde*. Donc, cette

fois, le sommet inconnu γ est rabattu en d et, par suite, sa projection horizontale se trouve sur la perpendiculaire abaissée de d sur bc.

Le sommet γ se trouve donc à l'intersection des deux perpendiculaires précédentes be_1, da_1 et, par raison de symétrie, sur le rayon oc.

Les sommets analogues α, β, δ, ε se trouveront sur la circonférence décrite de o comme centre avec $o\gamma$ pour rayon, et respectivement sur les rayons $o\alpha$, $o\beta$, $o\delta$, $o\varepsilon$.

Ceci nous fait déjà dix sommets. Il en reste encore dix autres qui sont symétriques des premiers par rapport au centre o. Ce sont les points a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 qui forment la face supérieure vue, puis α_1, β_1, γ_1, δ_1, ε_1 que nous joignons par des arêtes vues aux précédents. Enfin, nous ajoutons le contour apparent horizontal, qui est un décagone régulier $\alpha\delta_1\beta\varepsilon_1\gamma\alpha_1\delta\beta_1\varepsilon\gamma_1\alpha$.

Maintenant que la projection horizontale est connue, il nous reste à déterminer les cotes des différents sommets.

Représentons par C_{10}, C'_{10} les côtés be_1, ae_1 des décagones réguliers, convexe et étoilé, inscrits dans la circonférence $abcde$, puis par C_5, C'_5 les côtés ab, ac des pentagones réguliers, convexe et étoilé, inscrits dans la même circonférence.

On sait qu'il existe entre ces différents rayons les relations suivantes :

$$C_5^2 = C_{10}^2 + R^2,$$
$$C'^2_5 = C'^2_{10} + R^2.$$

Or la droite $o\gamma$, étant perpendiculaire à a_1e_1, est parallèle et égale à ae_1 ; donc, $o\gamma$ est égal à :

$$C'_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Il en résulte que :

$$c\gamma = o\gamma - R = C'_{10} - R = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) = C_{10}.$$

La longueur de $c\gamma$ dans l'espace étant C_5, la différence de cotes h entre les deux points c et γ est donnée par la relation :

$$\gamma^2 = C_5^2 - C_{10}^2 = R^2.$$

Ainsi, les cotes des points α, β, γ, δ, ε sont égales au rayon R du cercle circonscrit au pentagone $abcde$.

Nous avons dit précédemment que $o\gamma$ et ae_1 étaient parallèles. On en déduit que $e_1\gamma = c\alpha_1 = \mathrm{R}$.

Dans le rabattement du pentagone $\gamma c d \delta \alpha_1$, $c\alpha_1$ est rabattu suivant ca, qui est égal à C'_5. Donc, dans l'espace, la distance des deux points c et α_1 vaut C'_5. Il en résulte que la différence de cotes h_1, entre ces deux points, est donnée par la relation :

$$h_1^2 = \mathrm{C}'^2_5 - \mathrm{R}^2 = \mathrm{C}'^2_{10},$$

ou :

$$h_1 = \mathrm{C}'_{10} = ae_1 = o\gamma = \mathrm{R}_1.$$

Par conséquent, les cotes des différents points $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$ sont égales au rayon R_1 de la circonférence circonscrite au contour apparent horizontal.

Enfin, la différence de cotes entre les sommets a_1, α_1 étant égale à la différence de cotes entre les sommets a, α, on en déduit que la cote des sommets a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 est égale à $\mathrm{R} + \mathrm{R}_1$.

Toutes ces cotes ont été écrites dans l'épure aux sommets correspondants.

V. — ICOSAÈDRE.

202. — Projection d'un icosaèdre régulier sur un plan perpendiculaire à une diagonale. — Les vingt faces d'un icosaèdre régulier sont des triangles équilatéraux égaux, chaque sommet appartenant à cinq faces formant une pyramide pentagonale régulière.

Soit *abcde* la base de la pyramide pentagonale régulière inférieure, contenue dans le plan horizontal (2) (fig. 99).

Le sommet f de cette pyramide, étant équidistant des cinq sommets de la base, se projette horizontalement au centre du pentagone *abcde*.

Il nous reste encore six sommets à déterminer, qui sont : $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$, symétriques des premiers par rapport au centre, et formant une pyramide supérieure qui est vue.

Nous ajoutons le contour apparent horizontal, qui est le décagone régulier $ad_1be_1ca_1db_1ec_1a$.

Il nous reste à trouver les cotes relatives des différents sommets. Pour cela, nous remarquons que le pentagone $cdb_1f_1e_1$ se

rabat sur le plan horizontal *abcde* autour de l'arête *cd*, suivant le pentagone régulier *abcde*.

Nous connaissons donc, des sommets b_1, f_1, e_1, leurs projections horizontales b_1, f_1, e_1 et leurs rabattements *e*, *a*, *b*, ce qui permet de trouver leurs cotes.

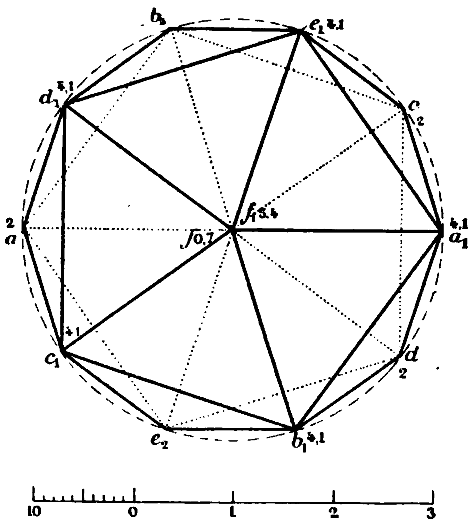


Fig. 99.

Considérons l'arête be_1, dont la longueur dans l'espace est C_5; sa projection a pour longueur C_{10}. Donc, la différence de cotes entre les sommets *b* et e_1 est donnée par la relation :

$$h^2 = C_5^2 - C_{10}^2 = R^2.$$

Ainsi, les sommets a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 sont à une distance, au-dessus du plan horizontal *abcde*, égale au rayon du cercle circonscrit au pentagone *abcde*.

Enfin, dans le pentagone $cdb_1f_1e_1$, considérons la diagonale cf_1, dont la longueur en projection est R ; elle a pour rabattement *ca*, dont la longueur est C'_5. Il en résulte que la différence de cotes, entre les deux sommets *c* et *f*, est donnée par la relation :

$$h_1^2 = C_5'^2 - R^2 = C'^2_{10} = \overline{de_1}^2.$$

Donc :

$$h_1 = de_1.$$

Enfin, le sommet f est à une distance, au-dessous du plan ho-zontal $abcde$, égale à $h_1 - h$.

Or :

$$h_1 - h = C'_{10} - R = C_{10}.$$

On a dans l'épure inscrit les cotes des différents somm- auprès de leurs projections.

LIVRE VII

COURBES

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

I. — COURBES.

203. — Un point de l'espace est défini par trois conditions, par exemple ses distances à trois plans donnés ou à trois points donnés. Lorsqu'on se donne seulement deux conditions, il existe alors une infinité de points remplissant ces deux conditions, et l'ensemble des positions de tous ces points constitue en général une courbe.

L'une des conditions étant que le point reste dans un plan, on dit alors que la courbe est plane.

Ainsi, les différents points d'une circonférence remplissent les conditions suivantes : 1° ils sont dans un même plan ; 2° la distance de chaque point de la circonférence à un point fixe est constante ; ou encore : 1° ils sont dans un même plan ; 2° ils sont sur une même sphère.

De même, une ellipse est définie par les deux conditions : 1° qu'elle est dans un plan ; 2° que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes du plan est constante.

Lorsque la courbe n'a pas tous ses points contenus dans le même plan, on dit qu'elle est gauche.

L'hélice, par exemple, est une courbe gauche ; les deux conditions qui la déterminent sont : 1° le cylindre sur lequel la courbe est tracée ; 2° son pas.

On peut donc dire qu'une courbe est le lieu des points de l'espace assujettis à deux conditions d'égalité.

La troisième condition qui définit chaque point de la courbe étant variable, si l'on fait varier cette troisième condition d'une façon continue, le point décrira la courbe.

Ainsi, dans le cas d'une circonférence, on définit un point M par l'angle du rayon OM avec un rayon fixe OA. En faisant varier l'angle MOA de 0 à 2π, le point M décrira la circonférence.

II. — TANGENTE.

204. — *On appelle tangente à une courbe en un point donné la limite de la position d'une corde passant par le point donné et par un deuxième point de la courbe, ce deuxième point tendant à se confondre avec le premier, qu'on appelle alors le point de contact.*

Dans le cas d'une circonférence, cette courbe n'étant coupée qu'en deux points par une ligne droite, d'après la définition précédente, la tangente n'aura qu'un point de commun avec la courbe. Nous retrouvons ainsi la définition élémentaire de la tangente à la circonférence.

Nous avons dit que, pour obtenir une courbe, il fallait assujettir un point de l'espace à deux conditions déterminées et faire varier une troisième condition d'une manière continue ; cette troisième condition étant par exemple une longueur.

Si, au lieu de cela, on donne à cette longueur des valeurs différant d'une quantité très petite, mais déterminée, on obtient alors un nombre fini de points de la courbe, et en les joignant deux à deux, dans l'ordre suivant lequel ils sont obtenus, on forme un polygone inscrit dans la courbe.

On peut donc dire qu'une courbe est la limite d'un polygone dont les côtés tendent vers zéro, et par suite, la tangente à une courbe est la limite de l'un de ces éléments prolongé de part et d'autre de ses deux sommets.

205. — THÉORÈME. — *La tangente à une courbe se projette suivant la tangente à la projection de la courbe.*

Soit en effet M un point d'une courbe, m sa projection. Considérons un point M_1 de la courbe très rapproché de M, ce point se

projettera en m_1 sur la projection de la courbe, et la corde MM_1 aura pour projection la corde mm_1 de la projection de la courbe.

Supposons maintenant que le point M_1 se rapproche indéfiniment de M, la corde MM_1 aura, par définition, pour limite la tangente MT à la courbe proposée. Or, en même temps, le point m_1 vient coïncider avec m, donc mm_1 a aussi pour limite la tangente mt à la projection de la courbe.

D'ailleurs mm_1 est constamment la projection de MM_1, quelle que soit la distance MM_1, par suite il en est de même à la limite, ce qui prouve que mt est la projection de MT.

Cette démonstration est indépendante du mode de projection employé, elle est donc vraie pour les projections coniques, obliques et orthogonales.

La démonstration suppose cependant qu'à la limite, la tangente MT se projette bien suivant une droite; elle est donc en défaut, lorsque la tangente se projette suivant un seul point.

III. — NORMALE.

206. — On appelle normales à une courbe les perpendiculaires sur la tangente menées par le point de contact.

L'ensemble des normales menées en un même point à une courbe forme le plan normal à cette courbe au point considéré. Dans le cas particulier d'une courbe plane, on ne considère généralement comme normale que celle qui se trouve contenue dans le plan de la courbe.

IV. — ASYMPTOTE.

207. — En chaque point d'une courbe, il existe toujours une tangente. Il en est de même lorsque le point qui décrit la courbe s'éloigne indéfiniment. Mais alors il se présente deux cas. Ou bien la tangente reste constamment à distance finie, et alors la limite de cette tangente, lorsque le point de contact est à l'infini, s'appelle une asymptote. Ou bien la tangente s'éloigne aussi tout entière à l'infini, et la courbe présente une forme parabolique.

V. — TRACÉ DES COURBES.

208. — Comme nous n'avons pas à notre disposition d'instruments parfaits autres que le compas, pour tracer des courbes, il faudra nécessairement les dessiner toutes à la main, sauf les circonférences. On commencera donc par déterminer un certain nombre de points de la courbe, d'après sa définition géométrique, en s'attachant surtout à déterminer tous les points remarquables, par exemple les points de contact avec des tangentes connues, les asymptotes, etc., puis on déterminera les tangentes à la courbe en différents points courants.

Quant au nombre de points à déterminer, il dépend de la forme de la courbe et de ses dimensions. En général, on fera mieux d'en déterminer avec une très grande exactitude un petit nombre, plutôt que d'en chercher beaucoup, qui seraient alors tous faux parce qu'on aurait fait les constructions avec moins de soin. On déterminera ensuite les tangentes en tous ces points, puisque analytiquement une tangente équivaut à deux points réunis au point de contact. On réunira alors tous les points ainsi obtenus par un trait continu, en faisant bien attention à toutes les tangentes.

Comme il est difficile du premier coup d'arriver à un résultat satisfaisant, on fera bien d'employer un crayon tendre pour ce premier tracé. On jugera alors de l'aspect de la courbe, en la regardant à une certaine distance, et, à l'aide de retouches successives, on fera disparaître tous les genoux du premier tracé. Ces genoux paraîtront plus sensibles, en visant la courbe suivant ses différentes tangentes comme on procède pour lire des caractères d'écriture très étroits et très longs, par exemple de 1 millimètre de large sur 40 de hauteur.

En général, la courbe est bien tracée, lorsque, passant par tous les points connus et étant tangente à toutes les droites déterminées, sa forme plaît à l'œil.

Arrivé à ce résultat, on enlève légèrement avec la gomme à crayon tous les traits inutiles, et l'on trace de nouveau la courbe en suivant bien le trait auquel on s'est décidé, avec un crayon plutôt dur, mais en faisant cette fois un trait excessivement fin.

On recommande aussi quelquefois d'appuyer légèrement sur le papier, de manière à creuser une sorte de petite rigole qui, dans

la mise à l'encre, entraînera plus facilement la plume. Mais il ne faut pas abuser de ce procédé qui, poussé à l'excès, enlève à la feuille toute sa fraîcheur.

Enfin, pour la mise à l'encre, on emploiera de préférence un porte-plume ordinaire et une plume fine avec laquelle on se sent capable d'écrire facilement. Puis, on tiendra le plan de la plume tangentiellement à la courbe, de telle sorte qu'en appuyant plus ou moins fort sur le papier, les deux becs de la plume s'écartent suivant la tangente sans augmenter considérablement la largeur du trait. Il n'en serait pas de même évidemment si l'on tenait le plan de la plume normalement à la courbe.

On suivra alors le trait du crayon sur une petite longueur ; puis, à l'aide de petites retouches répétées, on augmentera successivement la largeur du trait, de manière à obtenir partout une largeur uniforme.

On aura soin aussi de placer la main du côté de la concavité de la courbe, la ligne tracée naturellement par la plume étant sensiblement une circonférence ayant son centre du côté de la main.

On se sert aussi pour tracer les courbes du tire-ligne avec un pistolet, mais cela n'empêche pas de suivre les recommandations indiquées plus haut pour le tracé au crayon ; le pistolet ne devant servir que pour la mise à l'encre, alors que la courbe est parfaitement dessinée au crayon.

Nous engageons d'ailleurs les commençants à n'employer le tire-ligne avec le pistolet que lorsqu'ils auront acquis une habileté assez grande pour ne pouvoir se servir à un moment donné que de la plume.

CHAPITRE II

I. — PROJECTION D'UNE CIRCONFÉRENCE.

209. — Pour trouver un point d'une circonférence dont on connaît le plan, le centre et le rayon, il suffit d'amener le plan de la circonférence à être horizontal, à l'aide d'un rabattement par exemple. Puis sur la circonférence rabattue on choisit un point quelconque que l'on relève dans le plan du cercle.

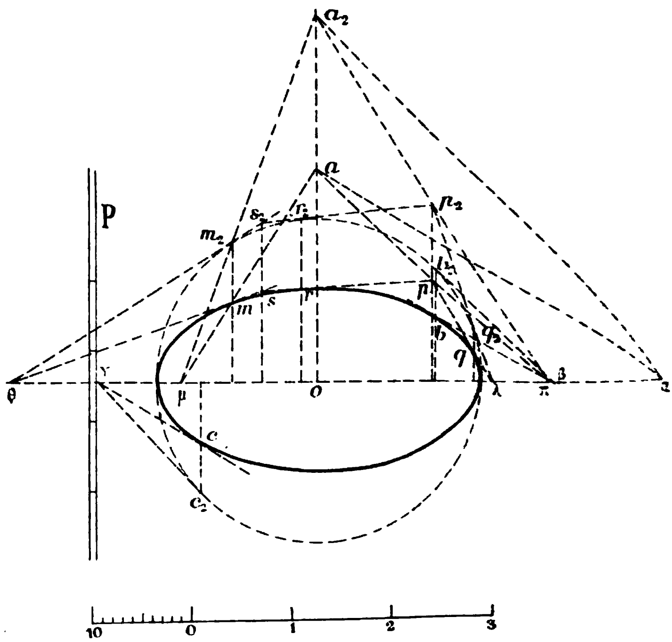


Fig. 100.

Soit (fig. 100) P l'échelle de pente du plan, o la projection horizontale du centre de la circonférence dont nous supposons connu le rayon.

Nous commençons par déterminer le rabattement d'un point quelconque du plan, a par exemple, autour de l'horizontale du plan menée par le centre o du cercle. Ce rabattement se trouve sur une perpendiculaire ao à la charnière, et à une distance a_2o de la charnière donnée par la relation $d = \delta\sqrt{1+m^2}$.

On a choisi oa égale à 3 modules du plan, donc $\delta = 3$; m, le module du plan, vaut 0,7 ; donc $d = 3\sqrt{1+\overline{0,7}^2} = 3{,}66$.

Le rabattement de la circonférence est alors la circonférence décrite de o comme centre avec le rayon donné.

Proposons-nous maintenant de relever un point quelconque, m_2 par exemple. Nous considérons la droite m_2a_2 qui coupe la charnière au point fixe μ et par suite se relève suivant $a\mu$. Le relèvement de m_2 se trouvera donc à l'intersection m de μa avec la perpendiculaire à la charnière menée par m_2. Quant à la cote du point m, il suffira de la compter sur l'échelle de pente du plan à l'aide de l'horizontale menée par m.

210. — Tangente. — La tangente en m_2 au rabattement de la circonférence rencontre la charnière au point θ qui est fixe, donc cette tangente est relevée suivant $m\theta$. Si le point θ dont nous venons de nous servir était en dehors des limites de l'épure, il suffirait de procéder pour un point quelconque de $m_2\theta$ comme nous l'avons fait pour le point m_2 lui-même.

II. — TANGENTE PAR UN POINT EXTÉRIEUR.

211. — Mener par un point p des tangentes à la circonférence. — Le point p donné par sa projection horizontale doit être considéré comme étant contenu dans le plan. Nous commençons par le rabattre (fig. 100) en joignant $ap\pi$ qui se rabat suivant $a_2\pi$. Le point p est donc rabattu en p_2. Menons ensuite par ce point p_2 des tangentes au rabattement de la circonférence, soit $p_2q_2\lambda$ et p_2r_2.

Il reste à relever ces deux tangentes, ainsi que leurs points de contact q_2, r_2.

Pour la première, p_2q_2, nous avons à notre disposition le point fixe λ sur la charnière, la tangente $p_2\lambda$ se relève donc suivant $p\lambda$; quant au point de contact q_2, il se relève au point q, à l'aide de la perpendiculaire à la charnière menée par q_2.

Pour relever la seconde tangente, nous nous sommes servis de son point de rencontre s_2 avec $m_2\theta$. Ce point se relève en s sur mt et par suite le point de contact r_2 se relève en r sur ps.

212. — Mener une tangente parallèle à une droite donnée. — Soit $a\alpha$ la direction donnée (fig. 100). Nous commençons par rabattre cette droite suivant a_2x, en la considérant comme étant contenue dans le plan du cercle.

On mène ensuite dans le rabattement les tangentes $b_2\beta$, $c_2\gamma$ parallèlement à $a_2\alpha$, puis on relève ces tangentes à l'aide des points fixes β, γ, parallèlement à $a\alpha$. Quant aux deux points de contact b_2, c_2, ils se relèvent en b et c sur les deux tangentes que nous venons de trouver.

III. — DÉTERMINATION DES AXES.

213. — Nous démontrerons plus loin que la projection d'une circonférence est une ellipse ; en admettant ce fait, nous pouvons nous proposer de trouver les axes de la projection horizontale.

Si dans une circonférence nous considérons deux diamètres rectangulaires, ils sont conjugués, c'est-à-dire que chacun d'eux est le lieu des milieux des cordes parallèles à l'autre. Or cette propriété se conserve en projection quand toutefois on emploie des projections obliques ou orthogonales.

Ainsi deux diamètres rectangulaires du cercle se projettent suivant deux diamètres conjugués. Pour trouver les axes, il faut choisir deux diamètres rectangulaires se projetant suivant deux diamètres rectangulaires. Mais, pour qu'un angle droit se projette orthogonalement sur un plan suivant un angle droit, il faut et il suffit que l'un des côtés soit parallèle au plan de projection.

Donc les axes de la projection horizontale d'une circonférence sont les projections horizontales du diamètre horizontal et du diamètre ligne de plus grande pente.

Le diamètre horizontal se projetant suivant un diamètre égal et tous les autres suivant des diamètres plus petits, le diamètre horizontal sera le grand axe de la projection horizontale, tandis que le diamètre ligne de plus grande pente sera en projection le petit axe.

Soit P (fig. 101) l'échelle de pente du plan, o (5,3) le centre de la circonférence, 1,2 son rayon. Le grand axe de la projection

horizontale est le diamètre horizontal oa, sur lequel nous prenons les longueurs $oa = ob = 1{,}2$.

Le petit axe est parallèle à P mené par o. Les deux sommets s'obtiennent en portant sur cette ligne de plus grande pente une longueur égale au rayon 1,2.

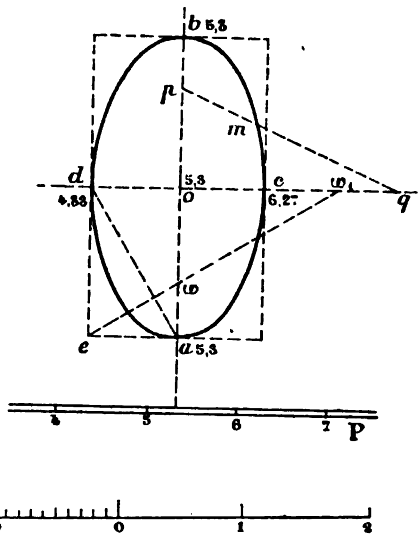


Fig. 101.

La différence de cotes entre les deux sommets inconnus c ou d et le centre est donnée par la relation :

$$\delta = \frac{d}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{1,2}{\sqrt{1+\overline{0,72}^2}} = 0{,}97.$$

Cette différence de cotes équivaut à un intervalle :

$$0{,}97 \times m = 0{,}97 \times 0{,}72 = 0{,}70.$$

On a donc compté 0,97 sur l'échelle de pente du plan, puis on a porté cette longueur, valant d'ailleurs 0,70 de l'échelle du dessin, suivant oc et od, ce qui donne les sommets du petit axe ayant pour cotes respectives :

$5{,}3 + 0{,}97 = 6{,}27$ pour le sommet c
et $5{,}3 - 0{,}97 = 4{,}33$ pour le sommet d.

IV. — TRACÉ D'UNE ELLIPSE.

214. — Ayant ainsi déterminé les axes de la projection horizontale de la circonférence, on peut s'en servir à l'aide de telle construction analytique qu'on voudra, pour déterminer de nouveaux points de l'ellipse.

On peut, par exemple, déterminer les foyers et considérer la courbe comme le lieu des points dont la somme des distances aux deux foyers est constante et égale au grand axe.

On peut aussi considérer l'ellipse comme le lieu décrit par un point d'une droite de longueur constante, dont les extrémités glissent sur deux droites fixes.

Sur une bande de papier on porte à la suite l'une de l'autre deux longueurs *pm*, *mq* égales respectivement aux demi-axes de l'ellipse : *pm* étant égale au demi-grand axe *oa*, *mq* aura pour longueur le demi-petit axe *oc* (fig. 101).

On place ensuite le point *q* de la bande de papier sur le grand axe et le point *p* sur le petit axe.

La position correspondante du point *m* donne un point de l'ellipse; de plus, la normale à l'ellipse en *m* passe par le quatrième sommet du rectangle *qop*.

Il est aussi très avantageux de construire les cercles de courbure de l'ellipse aux quatre sommets. Pour les obtenir, on commence par construire le rectangle des axes, puis du sommet *e* de ce rectangle on abaisse une perpendiculaire sur la diagonale *ad*. Cette perpendiculaire rencontre les deux axes aux points ω, ω_1, qui sont les centres de courbure relatifs aux sommets *a* et *d*.

Ainsi, la circonférence décrite de ω comme centre avec ωa pour rayon a, dans le cas actuel, quatre points communs avec l'ellipse réunis en *a*, de telle sorte que, dans le voisinage du point *a*, l'ellipse diffère très peu de son cercle de courbure.

Les mêmes rayons ωa, $\omega_1 d$ serviront pour construire les cercles de courbure en *b* et *c*. Dans l'épure, on ne dessine ces cercles de courbure qu'au crayon seulement.

LIVRE VIII

SURFACES

CHAPITRE PREMIER

I. — DÉFINITIONS.

215. — Une surface est engendrée par une courbe mobile, pouvant varier de forme et de position, mais toujours parfaitement déterminée, en se donnant l'un des paramètres variables de la courbe.

Cette courbe mobile s'appelle *courbe génératrice ;* elle est généralement assujettie à rencontrer constamment des lignes fixes tracées sur la surface, et qu'on appelle alors les courbes directrices.

La courbe génératrice est donc supposée parfaitement définie de forme et de position, lorsqu'on se donne le point de rencontre de cette courbe génératrice avec l'une des courbes directrices.

216. — **Cône.** — *On appelle cône la surface engendrée par une ligne droite passant constamment par un point fixe qui est le sommet du cône, puis s'appuyant constamment sur une ligne fixe plane ou gauche, ou bien sur une surface.*

217. — **Cylindre.** — *On appelle cylindre la surface engendrée par une ligne droite restant parallèle à une droite fixe et s'appuyant constamment sur une ligne fixe plane ou gauche, ou bien sur une surface.*

Un cylindre peut donc être considéré comme la limite d'un cône dont le sommet est rejeté à l'infini dans la direction des génératrices du cylindre.

Les prismes et les pyramides, le plan lui-même peuvent être considérés comme des cas particuliers des cônes et des cylindres.

218. — Surface de révolution. — *On appelle surface de révolution la surface engendrée par une ligne plane ou gauche tournant autour d'une droite fixe.*

On peut dire aussi que c'est *la surface engendrée par une circonférence dont le plan reste perpendiculaire à une droite fixe, dont le centre décrit cette droite fixe, la circonférence rencontrant constamment une ligne fixe, plane ou gauche.*

Cette circonférence variable, qui alors est choisie comme génératrice de la surface, s'appelle un *parallèle.*

En revenant à la première définition, c'est au contraire la courbe tournant autour de l'axe qui sert de génératrice. Lorsque cette courbe est contenue dans un plan passant par l'axe, on l'appelle la *méridienne.*

219. — *L'ellipsoïde de révolution allongé est engendré par une ellipse tournant autour de son grand axe.*

220. — *L'ellipsoïde de révolution aplati est au contraire engendré par une ellipse tournant autour de son petit axe.*

221. — *La sphère,* qui peut être considérée comme la limite de l'ellipsoïde de révolution allongé ou de l'ellipsoïde aplati, *est engendrée par une circonférence tournant autour de l'un de ses diamètres.*

222. — *L'hyperboloïde de révolution à une nappe est engendré par une hyperbole tournant autour de l'axe qui ne rencontre pas la courbe.*

223. — *L'hyperboloïde à deux nappes est au contraire engendré par une hyperbole tournant autour de l'axe transverse.*

224. — Le cône de révolution, qui peut être considéré comme la limite entre l'hyperboloïde de révolution à une nappe et l'hyperboloïde de révolution à deux nappes, est engendré par le système de deux droites, tournant autour de l'une des bissectrices de l'angle de ces deux droites.

225. — *Le paraboloïde de révolution est engendré par une parabole tournant autour de son axe.*

226. — Le cylindre de révolution peut être considéré comme la limite d'un paraboloïde de révolution dont la méridienne se réduirait à deux droites parallèles à l'axe.

227. — *La surface gauche de révolution est engendrée par une ligne droite tournant autour d'une autre droite fixe qui ne coupe pas la première.* On démontre que la surface gauche de révolution n'est autre chose qu'un hyperboloïde de révolution à une nappe.

228. — *Le tore est engendré par une circonférence tournant autour d'une droite contenue dans son plan.* Lorsque l'axe de rotation passe par le centre de la circonférence, le tore devient une sphère.

229. — *On appelle surface réglée toute surface engendrée par une ligne droite.*

Trois directrices suffisent pour déterminer la surface. Ainsi, on peut assujettir la droite à s'appuyer constamment sur trois lignes fixes, planes ou gauches, ou bien sur des surfaces. On peut encore assujettir la droite à être parallèle successivement aux différentes génératrices d'un cône qu'on appelle alors le cône directeur.

230. — *L'hyperboloïde à une nappe est engendré par une ligne droite s'appuyant constamment sur trois droites fixes non parallèles à un même plan.*

231. — *Les conoïdes sont engendrés par une droite restant parallèle à un plan directeur fixe et s'appuyant sur une droite fixe, puis sur une ligne fixe plane ou gauche, ou bien sur une surface.*

232. — *Le paraboloïde hyperbolique ou plan gauche est un cas particulier des conoïdes; il est engendré par une droite restant parallèle à un plan fixe en s'appuyant sur deux droites fixes.*

233. — Les surfaces réglées se divisent en *surfaces gauches* et en *surfaces développables*. Ces dernières surfaces peuvent être considérées comme engendrées par la tangente à une courbe gauche; elles jouissent de la propriété suivante, qu'on peut les appliquer sur un plan, sans déchirure ni duplicature. Les cônes et les cylindres sont des cas particuliers des surfaces développables.

234. — *Les hélicoïdes* que nous citerons comme exemple de surfaces fréquemment employées *sont engendrés par une droite s'appuyant sur une hélice, en faisant avec l'axe de l'hélice et avec la tangente à l'hélice des angles constants.*

235. — *La surface de la vis à filet carré est un hélicoïde dans lequel la génératrice rencontre l'axe en restant constamment perpendiculaire sur cet axe.* C'est donc un cas particulier des conoïdes.

236. — *La surface de la vis à filet triangulaire est aussi un hélicoïde dans lequel la génératrice rencontre l'axe de l'hélice en faisant naturellement avec cet axe un angle constant qui n'est pas droit.*

237. — Enfin, *l'hélicoïde développable est engendré par la tangente à l'hélice.*

II. — PLAN TANGENT.

238. — **THÉORÈME.** — *Les tangentes menées en un même point, à toutes les courbes tracées sur une surface, et passant par ce point, sont contenues dans un même plan, qu'on appelle le plan tangent à la surface au point considéré.*

En effet, soit M (fig. 102) un point d'une surface, C et C_1 deux courbes tracées sur la surface et passant par le point M.

Supposons la surface engendrée par une troisième courbe mobile c assujettie à rencontrer constamment les deux courbes fixes C et C_1, et parfaitement définie de forme et de position, lorsqu'on se donne le point de rencontre P de la courbe mobile avec l'une des courbes fixes C.

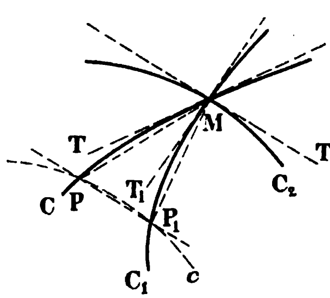


Fig. 102.

Dans cette hypothèse, la courbe mobile passera à un moment donné par le point M. Soit C_2 la position de la courbe génératrice au moment où elle passe par le point M.

Or, pour une position quelconque de la courbe mobile, les trois cordes MP, MP_1, PP_1 sont constamment dans le même plan; il en

est donc de même à la limite, c'est-à-dire que les limites de ces trois cordes sont dans le même plan.

Mais les cordes MP, MP_1 ont pour limite par définition les tangentes MT, MT_1 aux deux courbes C et C_1 au point M. Quant à la corde PP_1, dont les extrémités viennent coïncider en M sur C_2, nous admettrons qu'elle a aussi pour limite la tangente MT_2 à la courbe C_2 au point M. Donc les trois tangentes MT, MT_1, MT_2 sont dans le même plan.

D'ailleurs, pour engendrer la surface, on aurait pu prendre une autre courbe quelconque, telle que *c*, ayant pour limite au moment où elle passe par M une courbe quelconque, telle que C_2 ; donc les tangentes à toutes ces courbes sont dans un même plan, c'est le plan des deux droites MT, MT_1.

Cette démonstration suppose que la corde PP_1 a réellement pour limite la tangente MT_2 à la courbe C_2 au point M, et cette hypothèse est permise chaque fois que le point M n'est pas un point singulier de la courbe C_2.

Il résulte de là que la démonstration peut être en défaut pour certains points de la surface. Ces points s'appellent des points singuliers de la surface et doivent être étudiés d'une façon toute spéciale. Comme exemple de point singulier d'une surface, citons le sommet d'un cône. Il est facile de vérifier que les tangentes au sommet d'un cône à toutes les courbes tracées sur la surface du cône et passant par ce sommet ne sont autre chose que les génératrices du cône. Ainsi donc, dans ce cas particulier, les tangentes, au lieu de former un plan qui serait le plan tangent considéré, forment le cône lui-même.

Citons encore comme point singulier d'une surface le point de rencontre d'une surface de révolution avec son axe, lorsque en ce point la méridienne n'est pas normale à l'axe. Ici, le cône des tangentes est de révolution.

III. — NORMALE.

239. — *On appelle normale à une surface la perpendiculaire sur le plan tangent menée par le point de contact.*

Le théorème du plan tangent peut donc s'énoncer de la manière suivante :

Les plans normaux menés en un même point à toutes les courbes tracées sur une surface et passant par ce point passent

tous par une même droite qui est la normale à la surface au point considéré.

240. — Construction du plan tangent. — Pour déterminer le plan tangent en un point d'une surface, il suffira de dessiner sur la surface deux lignes passant par le point considéré. les tangentes à ces deux lignes détermineront le plan tangent demandé.

Dans le cas particulier d'une surface réglée, une ligne droite étant à elle-même sa tangente, nous choisirons comme première ligne la génératrice rectiligne passant par le point, ce sera une droite du plan tangent. Donc, tout plan tangent à une surface réglée contient la génératrice passant par le point de contact.

Si, accidentellement, on pouvait dessiner sur la même région de surface deux droites passant par le même point, le plan de ces deux droites serait le plan tangent en ce point.

Il ne faut donc pas s'étonner, d'après cela, qu'un plan tangent coupe la surface, car nous ne donnons pas comme définition du plan tangent qu'il n'a qu'un point commun avec la surface, mais que c'est le lieu des tangentes aux lignes tracées sur la surface. Ces deux définitions ne s'accordent que dans le cas où la surface est convexe, comme cela a lieu pour la sphère.

Les plans tangents aux différents points d'une même génératrice d'une surface réglée contiendront donc la génératrice considérée; mais, en général, ces plans tangents varient avec la position du point de contact sur la génératrice.

Il peut arriver cependant que le plan tangent reste le même, quelle que soit la position du point de contact; la surface est alors développable. Dans le cas contraire, la surface est dite gauche. Nous verrons plus loin que les cônes et les cylindres sont des cas particuliers des surfaces développables.

241. — Construction de la normale. — Ayant trouvé le plan tangent en un point d'une surface, si l'on mène la perpendiculaire sur ce plan tangent par le point de contact, on aura la normale au même point.

Remarquons cependant qu'il est possible de construire directement la normale, sans passer par l'intermédiaire du plan tangent; il suffit en effet de construire les plans normaux aux deux courbes dessinées sur la surface et passant par le point considéré, et de prendre leur intersection.

IV. — PLANS TANGENTS AUX CONES ET AUX CYLINDRES.

242. — THÉORÈME. — *Tout plan tangent en un point de la surface d'un cône est aussi tangent à la surface aux différents points de la génératrice passant par le premier point de contact.*

Soit en effet A (fig. 103) une génératrice d'un cône, M, M_1 deux points de cette génératrice. Pour construire le plan tangent au point M de cette génératrice, dessinons sur la surface du cône une ligne C passant par le point M, en ayant soin de ne pas choisir cette ligne tangente à la génératrice A. Le plan tangent sera alors déterminé par la génératrice A et par la tangente MT à cette courbe C.

Pour être certain que la courbe C n'est pas tangente à A, au lieu de la choisir arbitrairement, on peut prendre la directrice sphérique du cône, c'est-à-dire l'intersection du cône avec la sphère de centre S ayant pour rayon SM.

Cette courbe s'obtient en portant sur chaque génératrice, à partir du sommet, une longueur constante et égale à SM. De cette façon, on est bien certain que la courbe C n'est jamais tangente à la génératrice, puisqu'elle lui est constamment normale.

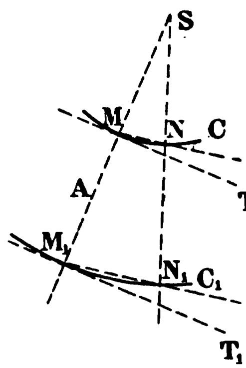


Fig. 103.

Le plan tangent en M_1 sera de même déterminé par la génératrice A et par la tangente M_1T_1 à la directrice sphérique C_1 qui passe par M_1. Or, si nous considérons une génératrice quelconque du cône, elle rencontre les deux directrices sphériques C, C_1 en deux points N, N_1 qui s'obtiennent en prenant $SN = SM$ et $SN_1 = SM_1$, et les deux cordes MN, M_1N_1 sont constamment dans un même plan, elles sont même parallèles entre elles. Ce résultat est vrai aussi à la limite, lorsque la génératrice SNN_1 vient coïncider avec SMM_1; donc les tangentes MT, M_1T_1, qui sont les limites de MN, M_1N_1, sont aussi dans le même plan.

Ce plan MNM_1N_1 n'est autre chose que le plan tangent en M et en M_1, donc ces deux plans sont confondus.

Ce raisonnement s'applique à tous les points de la génératrice A, et par suite les plans tangents en ces différents points coïncident avec le plan tangent en l'un d'eux, SMT.

Ce théorème est applicable également au cylindre, qui est un cas particulier du cône.

243. — Il résulte de ce théorème que, pour construire le plan tangent en un point de la surface d'un cône, il suffit de construire le plan tangent au cône au point de rencontre de la directrice avec la génératrice passant par le point de contact. Autrement dit, le plan tangent en un point de la surface d'un cône est déterminé premièrement par la génératrice passant par le point de contact, deuxièmement par la tangente à la directrice au point où cette directrice est rencontrée par la génératrice de contact.

Le plan tangent à un cône ou à un cylindre étant le même tout le long d'une génératrice, on a le droit pour ces surfaces d'employer l'expression génératrice de contact.

V. — TANGENTE A L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES.

244. — **THÉORÈME.** — *La tangente en un point de l'intersection de deux surfaces est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces au point considéré.*

En effet, l'intersection de deux surfaces est une ligne dessinée simultanément sur les deux surfaces, donc sa tangente est bien contenue dans le plan tangent à chacune des surfaces au point considéré.

245. — **THÉORÈME.** — *La tangente en un point d'une section plane d'une surface est l'intersection du plan sécant avec le plan tangent à la surface au point considéré.*

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du précédent, le plan sécant étant à lui-même son plan tangent.

246. — **THÉORÈME.** — *La tangente en un point de l'intersection de deux surfaces est la perpendiculaire sur le*

plan des deux normales aux deux surfaces au point considéré.

En effet, l'intersection étant dessinée sur les deux surfaces, son plan normal contient les normales aux deux surfaces au point considéré. Or le plan normal à une courbe est perpendiculaire à la tangente; donc, inversement, la tangente à la courbe est bien perpendiculaire sur le plan des deux normales.

La construction de la normale à une surface étant quelquefois plus rapide que celle du plan tangent, il sera dans ce cas préférable d'appliquer ce dernier théorème plutôt que le premier, pour trouver la tangente à l'intersection.

CHAPITRE II

I. — CONES ET CYLINDRES CIRCONSCRITS AUX SURFACES.

247. — Étant donnés une surface et un point extérieur S, on peut en général mener par ce point S une infinité de plans tangents à la surface. Soit C (fig. 104) la courbe lieu des points de contact de tous ces plans tangents. Nous allons reconnaître que le cône qui a pour sommet S et pour directrice la courbe C est circonscrit à la surface tout le long de la courbe C, c'est-à-dire qu'en tous les points de la courbe C, la surface donnée et le cône admettent le même plan tangent.

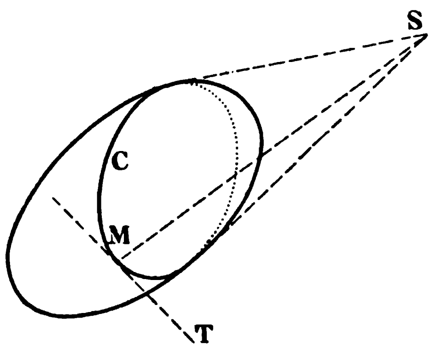


Fig. 104.

En effet, soit M un point de la courbe C. Le plan tangent en ce point M à la surface contient d'abord la tangente MT à la courbe C qui est dessinée sur la surface, puis la droite MS, puisque par hypothèse le plan tangent en M passe par le point S.

D'un autre côté, le plan tangent en M au cône est déterminé également par la génératrice MS et par la tangente MT à la directrice C.

Les deux surfaces sont donc bien tangentes entre elles tout le long de la courbe C.

On conçoit de même l'existence d'un cylindre circonscrit à une surface, parallèlement à une direction donnée, la courbe de contact étant le lieu des points de contact des plans tangents menés à la surface, parallèlement à la direction donnée.

II. — CONTOURS APPARENTS.

248. — *On appelle contour apparent dans l'espace d'une surface la courbe de contact du cône circonscrit à la surface ayant pour sommet le centre de projection.*

249. — *On appelle contour apparent en projection la projection du contour apparent de l'espace;* c'est donc la trace sur le plan de projection du cône circonscrit à la surface ayant pour sommet le centre de projection.

Dans le cas des projections obliques ou orthogonales, le cône circonscrit précédent devient le cylindre circonscrit parallèle à la direction des projetantes.

Ainsi, pour trouver le contour apparent horizontal d'une surface, il faudra construire le lieu des points de contact des plans tangents parallèles à une verticale. Ce lieu dans l'espace, cc', constituera le contour apparent horizontal dans l'espace; sa projection horizontale c, qui est dessinée dans le plan horizontal et par suite se projette verticalement sur la ligne de terre, formera le contour apparent horizontal en projection.

Dans une épure, au point de vue de la ponctuation, il y a à faire une importante distinction entre le contour apparent dans l'espace et le contour apparent en projection.

Les contours apparents dans l'espace, quand on a l'occasion de les figurer, doivent être dessinés en ligne de construction, et l'on ne dessine en noir, c'est-à-dire en traits pleins, petits points ou traits mixtes, que les contours apparents en projection.

III. — OMBRES PROPRES ET PORTÉES.

250. — Le contour de l'ombre propre d'une surface est la courbe de contact du cône circonscrit à la surface ayant pour sommet le point lumineux, dans le cas de l'ombre au flambeau, ou du cylindre circonscrit parallèle aux rayons lumineux, dans le cas de l'ombre au soleil.

251. — Le contour de l'ombre portée est la trace du cône ou du cylindre circonscrit précédent sur la surface qui reçoit l'ombre.

Ces définitions des ombres sont donc identiques à celles des contours apparents, ce dont nous étions prévenus déjà, le problème des ombres étant de même espèce que celui de la ponctuation.

Les théorèmes que nous allons démontrer relativement aux contours apparents seront donc applicables également aux ombres.

IV. — THÉORÈMES SUR LES CONTOURS APPARENTS.

252. — THÉORÈME. — *Le contour apparent d'une surface développable contient des lignes droites.*

Nous avons déjà démontré que, pour les cônes et les cylindres, le plan tangent était le même tout le long de la génératrice ; cette propriété est vraie aussi pour toutes les surfaces développables.

Soit donc M un point du contour apparent dans l'espace d'une surface développable. Par hypothèse, le plan tangent en M passe par le centre de projection, mais ce plan tangent contient la génératrice G qui passe par le point M, et de plus il est tangent à la surface en tous les points de la génératrice G. Donc, en tous les points de la droite G le plan tangent passant par le centre de projection, il faut que cette droite tout entière fasse partie du contour apparent de la surface.

Il est bien entendu que nous supposons les surfaces complètes, c'est-à-dire que les définitions géométriques des contours apparents ne s'appliquent pas entièrement à des fragments de surface.

253. — THÉORÈME. — *Toute ligne tracée sur une surface et rencontrant le contour apparent dans l'espace a sa projection tangente au contour apparent en projection de la surface.*

En effet, soit A (fig. 105) le contour apparent dans l'espace d'une surface, C une ligne dessinée sur la surface et rencontrant le contour apparent de l'espace au point M. Soit de plus MT, MT_1 les tangentes à ces deux lignes.

Le contour apparent en projection *a* et la courbe *c*, projection de C, se rencontrent au point *m*, projection de M.

Or les tangentes MT, MT_1 sont contenues toutes deux dans le plan tangent à la surface au point M, de plus ce plan tangent passe par le centre de projection O, puisque le point M appartient au contour apparent dans l'espace A. Donc, le plan $OMTT_1$ est un

plan projetant, et par suite toutes les droites MT, MT_1 de ce plan se projettent suivant une même droite mtt_1 qui est la trace du plan sur le plan de projection. D'ailleurs, la tangente à une courbe se projette suivant la tangente à la projection de la courbe, donc les deux courbes *a*, *c* sont bien tangentes entre elles, puisqu'elles admettent la même tangente $mtmt_1$.

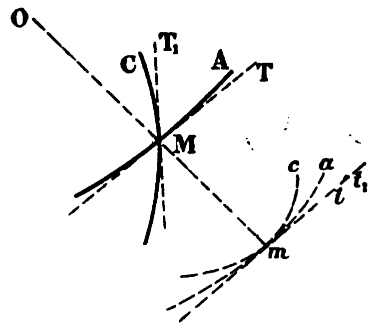


Fig. 105.

Dans toute épure, chaque fois qu'on aura à construire une courbe sur une surface, on devra déterminer, lorsqu'on pourra le faire, les points sur les contours apparents, ou tout au moins en tenir compte, parce que ces points servent de limites entre les parties vues et cachées de la courbe sur la région de surface correspondante.

On peut, en effet, considérer les génératrices du cône circonscrit à une surface comme les limites de droites menées par le sommet du cône, coupant d'abord la surface en deux points réels, lorsqu'elles sont à l'intérieur du cône, et ne coupant plus la surface dans la même région, lorsqu'elles sont extérieures au cône.

Donc le contour apparent dans l'espace d'une surface partage la surface en deux régions : l'une d'elles, dirigée du côté du centre de projection et qui est vue par un observateur placé en ce point ; l'autre, opposée au centre de projection et qui est cachée pour le même observateur.

La courbe C, en traversant le contour apparent dans l'espace A au point M sans être tangente à ce contour apparent dans l'espace, passe donc d'une région vue à une région cachée.

Si la courbe C était tangente au contour apparent dans l'espace A, elle serait ou tout entière vue, ou tout entière cachée sur la région de surface dont on s'occupe.

254. — Le théorème précédent est en défaut, lorsque la tangente à la courbe C passe par le centre de projection, puisque alors la tangente se projette suivant un seul point.

Imaginons (fig. 106) un plan passant par OM et par un point M_1 de la courbe C très voisin de M, ce plan aura pour trace sur le

plan de projection la corde mm_1 de la projection c, m et m_1 étant les projections de M, M_1. Si le point M_1 se rapproche indéfiniment de M, le plan M_1OM a pour limite, par définition, le plan *osculateur* à la courbe C au point M. En même temps la corde mm_1 a pour limite la tangente mt à la courbe c au point m.

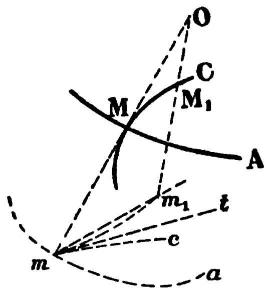


Fig. 106.

Donc, dans ce cas particulier, la tangente à la courbe c est la trace du plan osculateur à la courbe C au point M.

D'ailleurs, la projection de la courbe doit rester à l'intérieur du contour apparent en projection a; donc la projection c de la courbe, atteignant le contour apparent en projection a sous un angle qui n'est pas nul, doit rebrousser en m en conservant la même tangente pour rester à l'intérieur du contour apparent.

Comme dans le cas général, le point m sert de limite entre les parties vues et cachées de la courbe sur la surface.

255. — Le théorème précédent permet de trouver le contour apparent en projection d'une surface, en le considérant comme l'enveloppe des projections de toutes les lignes tracées sur la surface.

Par exemple, le contour apparent en projection d'une surface réglée est l'enveloppe des projections de même nom des génératrices.

De même, les contours apparents en projection d'un cône s'obtiennent en menant, par les projections du sommet, des tangentes aux projections de même nom de la directrice. Dans le cas d'un cylindre, il suffira de mener aux projections de la directrice des tangentes parallèles aux projections des génératrices.

Appliqué aux ombres, on dira : l'ombre d'une ligne tracée sur une surface est tangente à l'ombre portée par la surface, d'où l'on déduit que l'ombre portée par une surface est l'enveloppe des ombres portées par toutes les lignes dessinées sur la surface.

256. — **THÉORÈME.** — *Deux surfaces tangentes entre elles tout le long d'une même courbe ont leurs contours appa-*

rents en projection tangents entre eux, et en même temps à la projection de la courbe de contact.

En effet, soit C (fig. 107) la courbe de contact de deux surfaces, A le contour apparent dans l'espace de la première surface, et M le point de rencontre de ces deux courbes.

Montrons d'abord que le contour apparent dans l'espace A_1 de la seconde surface passe aussi par le point M. En effet, le point M appartenant à C, c'est qu'en ce point les plans tangents aux deux surfaces coïncident.

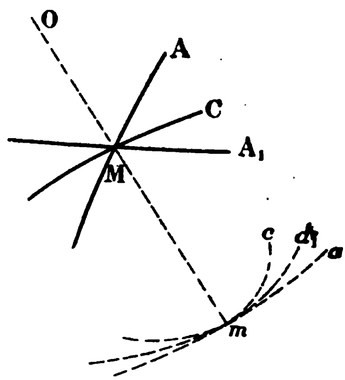


Fig. 107.

Mais le point M appartient aussi à A, donc le plan tangent en ce point à la première surface passe par le centre de projection. Il résulte de là que le plan tangent en M à la seconde surface passe par le centre de projection et que par suite le point M appartient bien au contour apparent dans l'espace A_1 de la seconde surface.

D'après le théorème précédent, la courbe C, étant dessinée sur la première surface, a sa projection *c* tangente au contour apparent en projection *a* en *m*.

De même, la courbe C, étant dessinée sur la seconde surface, a sa projection *c* tangente au contour apparent en projection a_1 en *m*.

En résumé, les trois courbes *c*, *a*, a_1 sont tangentes entre elles en *m*.

Ce théorème permet de construire le contour apparent en projection d'une surface, en le considérant comme l'enveloppe des contours apparents en projection de toutes les surfaces inscrites dans la première.

Ainsi, une surface de révolution pouvant être considérée comme l'enveloppe de sphères, on figurera les contours apparents des sphères inscrites dans la surface, et, en prenant l'enveloppe de ces circonférences, on aura le contour apparent en projection de la surface.

LIVRE IX

PLANS TANGENTS AUX CONES ET AUX CYLINDRES

CHAPITRE PREMIER

I. — DÉTERMINATION D'UN POINT, PLAN TANGENT

257. — Étant donnée en *m* la projection horizontale d'un point de la surface d'un cône, le point dans l'espace est à l'intersection de la surface avec la verticale *m*.

Pour trouver ce point, on procède comme dans le cas d'une pyramide. Par le sommet du cône et par la droite, on mène un plan, dont on cherche la trace sur le plan de base. Cette trace coupe la base du cône en un certain nombre de points que l'on joint au sommet. On a ainsi les génératrices d'intersection du cône avec le plan auxiliaire. Enfin, ces génératrices rencontrent à leur tour la droite donnée aux points demandés.

Si, au lieu d'un cône, on avait un cylindre, il faudrait choisir comme plan auxiliaire un plan passant toujours par la droite, mais parallèle aux génératrices du cylindre.

Lorsqu'on aura défini le point, pour avoir le plan tangent, on remarquera que ce plan tangent est le même tout le long de la génératrice. Donc le plan tangent sera déterminé par la génératrice du point de contact, puis par la tangente à la directrice, au point où cette directrice est rencontrée par la génératrice de contact.

258. — **Exemple.** — *On donne un plan* P *défini par son échelle de pente* (*fig.* 108). *Dans ce plan se trouve une ellipse dont la projection horizontale est la circonférence* C. *Cette ellipse*

sert de base à un cône de sommet S(10). ***Trouver les points de la surface projetés horizontalement en*** m, ***ainsi que le plan tangent en l'un de ces points.***

Les points inconnus sont à l'intersection de la surface avec la verticale *m*. Par cette verticale *m* et le sommet S du cône, on mène un plan, dont on cherche la trace sur le plan de base. Cette trace se projette horizontalement suivant S*m*, elle rencontre la

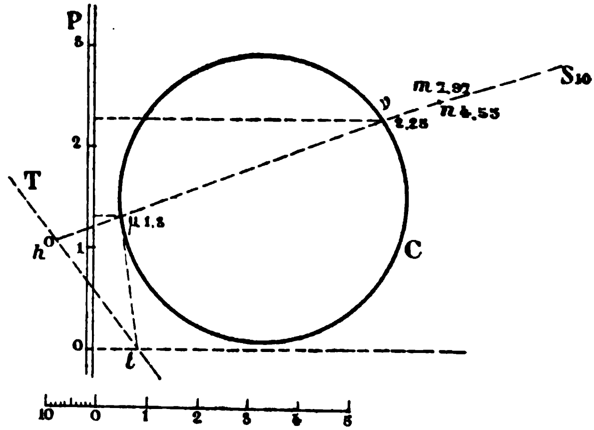


Fig. 108.

projection horizontale de la base C aux points μ, ν dont les cotes, d'après l'échelle de pente du plan, sont respectivement (1,3) pour μ et (2,25) pour ν.

Il suffit ensuite de prendre les intersections de la verticale *m* avec les deux génératrices S(10) μ(1,3) et S(10) ν(2,25).

La cote *mm'* de *m* est donnée par la relation :

$$mm' = \mu\mu' + \frac{\mu m \times \delta}{\mu S},$$

$\mu\mu'$ étant la cote du point μ et δ la différence de cotes des points SS', μμ'. Dans notre exemple :

$$\mu\mu' = 1{,}3, \quad \mu m = 6{,}6, \quad \delta = 10 - 1{,}3 = 8{,}7, \quad \mu S = 8{,}8\,;$$

$$mm' = 1{,}3 + \frac{6{,}6 \times 8{,}8}{8{,}7} = 1{,}3 + 6{,}67 = 7{,}97.$$

De même, la cote de n est :

$$nn' = \nu\nu' + \frac{\nu n \times \delta'}{\nu S},$$

$\nu\nu'$ étant la cote du point ν, δ' la différence de cotes de S et n.

Donc :

$$nn' = 2{,}25 + \frac{1 \times 7{,}75}{3{,}25} = 2{,}25 + 2{,}3 = 4{,}55.$$

Proposons-nous maintenant de déterminer le plan tangent au point m. Ce plan est déterminé par la génératrice $Sm\mu$ et par la tangente à la directrice au point μ.

Comme la directrice est donnée par sa projection horizontale, on a immédiatement la projection horizontale de la tangente, c'est μt dont la trace horizontale est en t sur la trace horizontale du plan de base.

Nous avons cherché d'un autre côté la trace horizontale de la génératrice $S\mu$ à l'aide de la relation :

$$\mu h = \frac{S\mu \times \mu\mu'}{\delta},$$

où $\mu\mu'$ est la cote du point μ, et δ la différence de cotes des points S et μ :

$$\mu h = \frac{8{,}8 \times 1{,}3}{8{,}7} = 1{,}31.$$

On en déduit suivant ht la trace horizontale du plan tangent. Pour éviter ce dernier calcul, on aurait pu figurer le point de rencontre de la tangente μt avec l'horizontale (10) du plan P, et, en joignant ce point au point S, on aurait trouvé l'horizontale (10) du plan tangent.

259. — Exemple. — *Étant donné un cylindre de révolution défini par son axe* A *et son rayon, trouver les points du cylindre projetés horizontalement en* m *et le plan tangent en l'un de ces points.*

Nous commençons par mettre en évidence une base du cylindre, en choisissant comme plan de base le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre mené par le point o(2) de l'axe (fig. 109).

La trace horizontale P du plan de base est perpendiculaire sur A, à une distance $o\omega$ égale à deux fois le module du plan. Or, le module de A étant 1,65, celui du plan est $\frac{1}{1,65}$ et, par suite :

$$o\omega = \frac{2}{1,65} = 1,33.$$

Rabattons ensuite le plan P sur le plan horizontal autour de sa trace horizontale. Le centre o de la base se rabat en o_2 sur A, à une distance $o_2\omega$ de la charnière donnée par la relation :

$$o_2\omega = \sqrt{\overline{2}^2 + \overline{1,33}^2} = 2,39.$$

On a alors dessiné une circonférence ayant pour centre o_2 et pour rayon le rayon du cylindre, c'est le rabattement de la base.

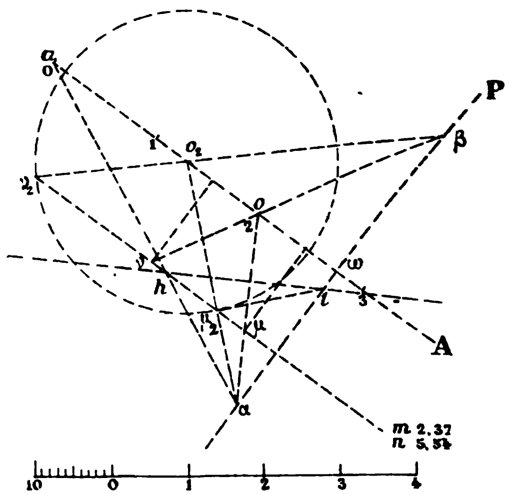


Fig. 109.

Les points inconnus sont à l'intersection de la surface du cylindre avec la verticale m.

Par cette verticale m, nous menons un plan parallèle aux génératrices du cylindre, soit le plan vertical $m\mu\nu$. Ce plan coupe le plan de base P suivant une droite dont la projection horizontale est $m\mu\nu$, et dont le rabattement autour de P est aussi $m\mu\nu$ qui rencontre la base rabattue en $\mu_2\nu_2$.

Pour relever le point μ_2, nous considérons la droite $\mu_2 o_2 \alpha$ qui se relève suivant $o\alpha$ à l'aide du point fixe α. Le point μ_2 se relève donc en μ sur $o\alpha$.

De même, le point ν_2 se relève en ν sur $o\beta$. D'ailleurs les cotes des points μ, ν sont données par l'échelle de pente o (2) ω du plan P ou bien par les échelles des droites o (2) α (0), o (2) β (0), soit (0,9) pour la cote du point μ et (3,1) pour celle du point ν.

260. — Disons à ce propos que, pour trouver rapidement la cote d'un point d'une droite définie par deux points, on peut employer le procédé suivant : sur une feuille de papier, on dessine à l'aide d'une règle à hachures des droites parallèles et équidistantes très rapprochées, de 1 millimètre, par exemple, avec un trait fin. Pour plus de commodité, on emploie un trait plus fort de dix en dix et un trait moyen pour la division intermédiaire.

Sur le côté de la feuille, on numérote ces parallèles 1, 2, 3, 4, 5, etc. Étant donnée une droite AB, définie par sa projection et les cotes des deux points A, B, (2,1), (4,7) par exemple, proposons-nous de trouver la cote d'un nouveau point P de la droite. On pose une bande de papier sur l'épure suivant ABP et l'on marque sur cette bande de papier les points A, B, P. On reporte ensuite cette bande de papier sur l'échelle de façon que le point A se trouve sur la parallèle 2,1 et le point B sur la parallèle 4,7. Il suffira alors de lire sur la parallèle 7,5 passant par P la cote (7,5) de ce point.

Un procédé analogue permet de trouver un point d'une droite connaissant sa cote.

261. — Pour revenir à la question primitive, considérons maintenant les génératrices du cylindre passant par μ, ν et déterminons leurs points de rencontre avec la verticale m. La cote de m est égale à celle de μ augmentée du produit de $m\mu$ par la pente de la génératrice :

$$0{,}9 + 2{,}23 \times 0{,}66 = (2{,}37).$$

De même, la cote de n vaut : $3{,}1 + 3{,}7 \times 0{,}66 = (5{,}54)$.

L'échelle de partage proportionnel nous permettra, comme précédemment, d'éviter ces calculs. Nous marquons d'abord sur une bande de papier deux points A, B dont la distance est égale à l'intervalle de l'axe du cylindre, puis nous portons cette bande de papier sur l'échelle proportionnelle de façon que A se trouve

sur la parallèle 0 et B sur la parallèle 1, ce qui nous permet de marquer sur la bande de papier le point correspondant à μ (0,9).

On revient ensuite sur l'épure en plaçant le point μ_1 de la bande de papier sur le point μ du dessin et l'on marque le point m de l'épure en m_1 sur la bande de papier.

Enfin, en reportant de nouveau la bande de papier sur l'échelle proportionnelle, on lira sur cette échelle la cote (2,37) correspondant au point m.

Il nous reste maintenant à déterminer le plan tangent au cylindre au point m. Ce plan tangent est défini premièrement par la génératrice $m\mu$ dont nous avons pu marquer la trace horizontale h à l'aide de l'échelle proportionnelle ou encore en remarquant qu'elle se trouve sur $a\alpha$, trace horizontale du plan $\alpha\mu A a$; deuxièmement, par la tangente à la base. Or, la base étant donnée par son rabattement, sa tangente est donnée aussi dans le rabattement, soit $\mu_2 t$. Nous avons relevé cette tangente suivant μt, à l'aide du point fixe t sur la charnière P. Finalement ht est la trace horizontale du plan tangent.

II. — PLAN TANGENT A UN CONE PAR UN POINT EXTÉRIEUR.

262. — Par le point donné A et par le sommet du cône S (fig. 110), on mène une droite SA, dont on cherche la trace σ sur le plan de base P. On mène ensuite par le point σ une tangente σm à la base. Cette tangente σm détermine avec la génératrice Sm qui passe par le point de contact le plan tangent demandé.

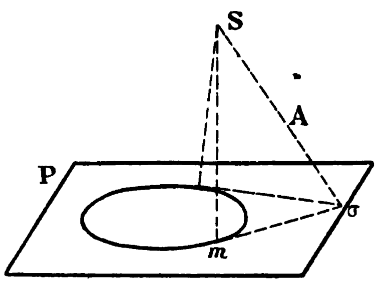


Fig. 110.

Lorsque la base est donnée par sa projection, la tangente σm s'obtient directement dans cette projection. Si la base était donnée par son rabattement, il faudrait d'abord rabattre le point σ en σ_2, mener ensuite la tangente $\sigma_2 m_2$ dans le rabattement et enfin relever cette droite suivant σm dans le plan de base. Si le point σ par lequel on doit mener des tangentes à la base se

trouvait en dehors des limites de l'épure, on devrait alors changer de plan de base, ce qui nécessiterait la recherche d'une section plane du cône. Il est avantageux de choisir un nouveau plan de base parallèle au premier, la nouvelle base étant homothétique de la première, et en particulier il est bon de prendre le nouveau plan de base passant par le point A. Il suffit alors de mener par A des tangentes à la nouvelle base.

III. — PLAN TANGENT A UN CYLINDRE PAR UN POINT EXTÉRIEUR.

263. — On mène par le point A une parallèle aux génératrices du cylindre (fig. 111), dont on détermine la trace σ sur le plan de base P. Puis par le point σ on mène des tangentes à la base. Soit σm l'une d'elles, elle détermine avec σA et la génératrice de contact mg le plan tangent cherché. Les remarques faites dans le problème précédent sur la détermination de la base et la position

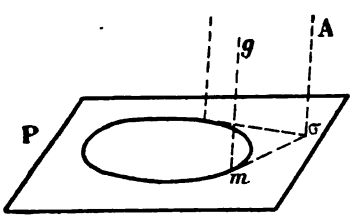


Fig. 111.

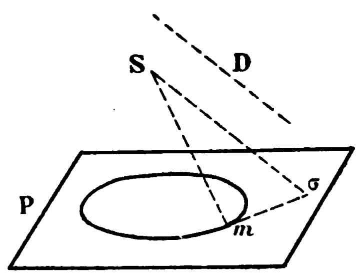


Fig. 112.

du point σ sont applicables ici et le seront aussi pour les deux problèmes suivants.

IV. — PLAN TANGENT A UN CONE PARALLÈLE A UNE DROITE.

264. — Par le sommet du cône (fig. 112), on mène une parallèle à la droite D et l'on détermine sa trace σ sur le plan de base P. On mène ensuite par σ une tangente σm à la base, elle détermine avec la génératrice de contact Sm le plan tangent demandé.

V. — PLAN TANGENT A UN CYLINDRE PARALLÈLE A UNE DROITE.

265. — Par un point de l'espace *o* (fig. 113), on mène une parallèle *oδ* à la direction donnée D, puis une parallèle *oσ* à la direction des génératrices du cylindre. On forme ainsi un plan dont on cherche la trace *σδ* sur le plan de base P du cylindre. Enfin, on mène à la base une tangente *mt* parallèle à cette trace *σδ*. Finalement, la tangente *mt* détermine avec la génératrice *mg* qui passe par le point de contact le plan tangent cherché.

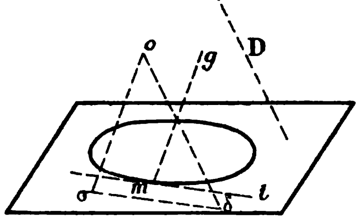


Fig. 113.

VI. — CONTOURS APPARENTS. — OMBRES.

266. — Une des principales applications des problèmes que nous venons d'étudier est la détermination des contours apparents et celle des ombres.

Le contour apparent horizontal dans l'espace d'un cône ou d'un cylindre est formé par les génératrices de contact des plans tangents à la surface parallèles à une verticale.

Le contour apparent horizontal en projection se compose des projections horizontales des mêmes génératrices.

De même, le contour apparent vertical dans l'espace est formé par les génératrices de contact des plans tangents parallèles à une ligne de bout, le contour apparent vertical en projection étant l'ensemble des projections verticales des mêmes génératrices.

Le contour de l'ombre propre d'un cône ou d'un cylindre est formé par les génératrices de contact des plans tangents passant par le point lumineux, dans le cas de l'ombre au flambeau, ou parallèles aux rayons lumineux, dans le cas de l'ombre au soleil.

Enfin, le contour de l'ombre portée est donné par les traces des plans tangents précédents sur la surface qui reçoit l'ombre.

267. — **Exemple.** — *On donne un cône de révolution défini par son sommet* S (5), *le centre de la base* o (2), *on sait que*

la base, dans un plan perpendiculaire à l'axe, est tangente au plan horizontal. On demande, premièrement, de figurer le cône limité à son sommet et à la base; deuxièmement, de déterminer les ombres produites en prenant comme point lumineux le point L (10) (fig. 114).

Menons d'abord, par le point *o* (2) de l'axe, un plan perpendiculaire sur l'axe S*o*. Sa trace horizontale P est à une distance de *o* égale à deux fois le module de ce plan ou deux fois l'inverse

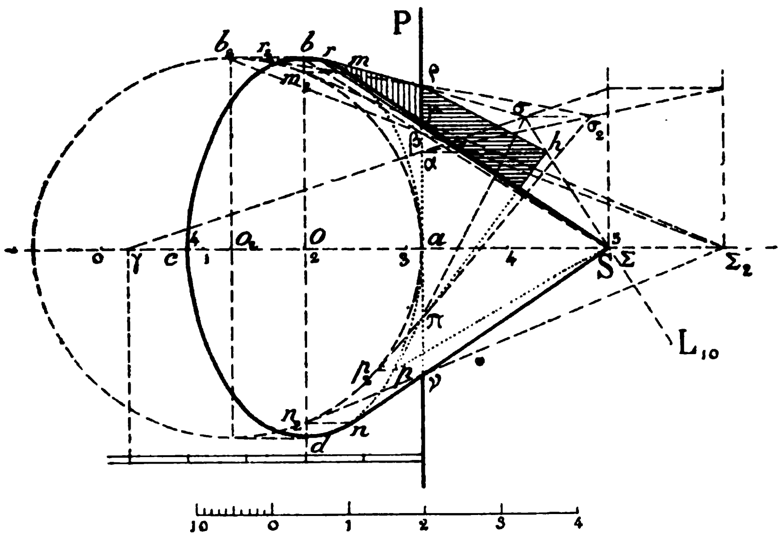


Fig. 114.

du module de l'axe. Or le module de l'axe est 1,3; la longueur cherchée *oa* vaut donc : $2 \times \frac{1}{1,3} = 2 \times 0,76 = 1,52$. En même temps nous graduons le plan de base. Rabattons ensuite le plan de base sur le plan horizontal. Le centre *o* se rabat en o_2 à une distance o_2a de la charnière égale à $2\sqrt{1 + \overline{0,76}^2} = 2,5$.

La base rabattue est alors la circonférence décrite de o_2 comme centre avec o_2a pour rayon, puisqu'elle doit être tangente au plan horizontal.

Pour trouver le contour apparent horizontal, il faut mener au cône des plans tangents parallèles à une verticale. La verticale S coupe le plan de base au point Σ dont il faut trouver le rabatte-

ment. Nous nous sommes servis pour cela de l'horizontale o_2 du plan qui a pour rabattement o_2b_2. La droite Σb coupe alors la charnière au point fixe β, elle a donc pour rabattement $b_2\beta$, d'où l'on déduit en Σ_2 le rabattement de Σ.

On mène alors par Σ_2 les tangentes $\Sigma_2 m_2$, $\Sigma_2 n_2$ qui se relèvent suivant $\Sigma\mu m$, $\Sigma\nu n$ à l'aide des points fixes μ, ν sur la charnière, les points de contact m_2, n_2 étant eux-mêmes relevés en m et n.

En résumé, Sm, Sn forment le contour apparent horizontal. Le cône étant d'ailleurs limité au plan de base, il convient aussi de figurer la projection horizontale de cette base. Elle sera tangente au contour apparent horizontal en m et n. Le point a est le sommet inférieur, le sommet supérieur c étant symétrique du précédent par rapport au centre. Quant aux deux autres sommets b et d, ils se trouvent sur l'horizontale o, et à des distances de part et d'autre du centre égales au rayon o_2a de la base.

La verticale a coupe le cône au point a de cote nulle, puis sur la génératrice Sc dont la cote est assurément positive, puisque S a pour cote (5) et c pour cote (4). Donc, le point a est caché, et par suite la base est cachée dans la région man.

Traitons maintenant le problème d'ombre. Il faut pour cela mener par L (10) des plans tangents au cône. On a donc joint S,L dont la trace horizontale h est à une distance Sh = SL. Nous déterminons ensuite la trace σ de cette droite LSh sur le plan de base à l'aide du plan auxiliaire mené par LSh et ayant pour trace horizontale $h\alpha$.

Les traces horizontales du plan de base et du plan auxiliaire se coupent en α, puis les horizontales (5) des deux mêmes plans se coupent en γ. L'intersection des deux plans est donc $\alpha\gamma$ qui rencontre LSh en σ.

La base étant donnée par son rabattement, nous avons aussi rabattu σ en σ_2. Les tangentes rabattues sont $\sigma_2 p_2$, $\sigma_2 r_2$ qui se relèvent suivant $\sigma\pi p$, $\sigma\rho r$, à l'aide des points fixes π, ρ. Les points de contact se relèvent eux-mêmes en p et r.

Le contour de l'ombre propre est donc formé par les génératrices Sp, Sr qui sont la première cachée et la seconde vue. La seule région vue de l'ombre est celle qui va de la génératrice Sr au contour apparent Sm.

L'ombre portée sur le plan de base, supposé opaque, se compose des deux tangentes $\sigma\pi p$, $\sigma\rho r$, dont les parties utiles se réduisent

à $p\pi$ et ρr. Enfin l'ombre portée sur le plan horizontal se compose de deux droites $h\pi$, $h\rho$.

Du contour final $r\rho h\pi p$, il n'y a de vue que la région en dehors du contour apparent du cône.

268. — Exemple. — *On donne un cylindre dont la base dans le plan* P (fig. 115) *se compose, en projection horizontale, des deux demi-circonférences concentriques* oad, obc, *puis des deux demi-circonférences également concentriques* $o_1$cf, $o_1$de, *et enfin des portions de droite* ab, ef.

Les génératrices sont parallèles à la droite oσ *de pente* $\frac{1}{1}$. *Déterminer les contours apparents de ce cylindre supposé illimité au-dessus du plan de base, et solide à l'intérieur du contour* abmcpfeqdna. *Chercher ensuite les ombres produites, en supposant les rayons lumineux parallèles à la direction* oλ *de pente* $\frac{1}{1}$.

La base du cylindre étant donnée ici par sa projection horizontale, il suffit de mener à cette base des tangentes parallèles aux directions $o\sigma$ des génératrices en projection horizontale.

Le contour apparent horizontal se compose donc simplement des génératrices m, n, p, q, parallèles à $o\sigma$ et tangentes à la projection de la base. Les génératrices n et p sont seules vues, les deux autres m et q sont cachées.

Il faut ajouter pour la représentation de l'objet, à ces contours apparents, les arêtes a et b qui sont vues, puis les arêtes e et f qui sont cachées, et enfin la base, dont les régions an, ab et prc jusqu'à l'aréte b sont seules vues.

Pour trouver maintenant les ombres, menons par le point o (2) une parallèle $o\sigma$ aux génératrices du cylindre, elle coupe le plan horizontal au point σ, qui a été obtenu en prenant $o\sigma$ égale à 2 unités de l'échelle du dessin, parce que la pente des génératrices est de $\frac{1}{1}$. Puis, par le même point o (2), menons une parallèle $o\lambda$ aux rayons lumineux. Sa trace horizontale se trouve en λ, à une distance de o égale aussi à 2 unités de l'échelle du dessin. Nous formons ainsi un plan dont la trace horizontale est $\sigma\lambda\mu$, et qui coupe le plan de base suivant $o\mu$.

Menons ensuite à la base les tangentes ss_1, rr_1 parallèles à $o\mu$. Les génératrices issues des points s et r forment le contour de l'ombre propre sur le cylindre. La première s est cachée, la

seconde r est vue, de sorte que la région vue de l'ombre propre se réduit à la région comprise entre les deux génératrices r et p.

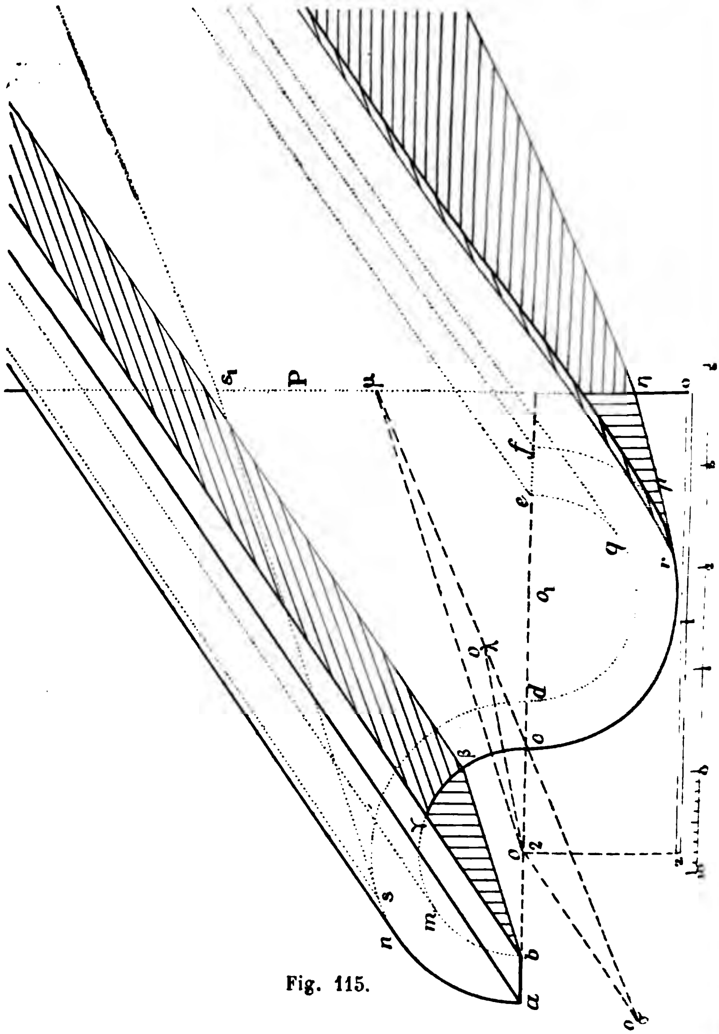


Fig. 115.

Nous avons, de plus, une ombre portée par l'arête b sur le cylindre. Pour l'obtenir, nous avons d'abord figuré l'ombre portée par l'arête b sur le plan de base, c'est la parallèle à $o\mu$ menée

par le point b, elle est limitée à son point de rencontre β avec la base. L'ombre de l'arête b sur le cylindre est donc la parallèle aux génératrices du cylindre menée par le point β, de telle sorte que la surface du cylindre comprise entre la génératrice β et la génératrice γ de la région $c\beta\gamma mb$ est dans l'ombre.

Les ombres portées par le cylindre sur le plan de base se composent de la tangente rr_1, de la tangente ss_1 et de la portion de droite $b\beta$. Enfin, l'ombre portée sur le plan horizontal est limitée aux parallèles à $\sigma\mu$ menées par r_1 et s_1.

CHAPITRE II

I. — PLAN TANGENT PAR UNE DROITE.

269. — Les problèmes que nous allons étudier ne sont généralement pas possibles. Nous nous proposons précisément d'établir les conditions de possibilité de chacun d'eux.

Pour reconnaître s'il est possible de mener à un cône un plan tangent par une droite, par le sommet du cône et par la droite on mène un plan dont on cherche la trace sur le plan de base. Il faut alors que cette droite soit tangente à la base. La vérification se fait directement en projection lorsque la base est donnée par sa projection, ou bien après un rabattement lorsque la base est donnée par son rabattement.

La vérification ne peut plus se faire lorsque la droite passe par le sommet du cône. Cela tient à ce que, dans ce cas, le problème est possible, et alors le plan tangent s'obtient en menant à la base du cône une tangente par la trace de la droite sur le plan de base.

Ce dernier problème, comme nous venons de le dire, est possible ; mais les tangentes à la base peuvent être réelles ou imaginaires, ou, si l'on veut, les équations du problème sont compatibles et donnent lieu à des racines réelles ou imaginaires.

La construction employée pour effectuer la vérification précédente est la même que celle qui convient pour trouver l'intersection de la droite avec le cône. Le problème du plan tangent est possible lorsque la droite donnée est tangente au cône.

270. — Pour reconnaître s'il est possible de mener par une droite un plan tangent à un cylindre, on mène par la droite un plan parallèle aux génératrices du cylindre, sa trace sur le plan de base doit être tangente à la base.

Le problème est assurément possible lorsque la droite donnée

est parallèle aux génératrices du cylindre, et alors le plan tangent s'obtient en menant à la base une tangente par la trace de la droite sur le plan de base.

II. — PLAN TANGENT PARALLÈLE A UN PLAN DONNÉ.

271. — Pour reconnaître s'il est possible de mener à un cône un plan tangent parallèle à un plan donné, on mène par le sommet du cône un plan parallèle au plan donné, sa trace sur le plan de base doit être tangente à la base. La vérification se fait directement en projection lorsque la base est donnée par sa projection, ou bien après un rabattement lorsque la base est donnée par son rabattement.

272. — Dans le cas du cylindre, pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le plan donné soit parallèle aux génératrices du cylindre.

Pour effectuer cette vérification, par un point du plan donné on mène une parallèle à la direction des génératrices du cylindre, elle doit être contenue tout entière dans le plan donné, et, par suite, elle doit rencontrer une droite quelconque de ce plan.

Cette condition étant remplie, pour obtenir le plan tangent, il suffira de mener à la base une tangente parallèle à la trace du plan donné sur le plan de base.

III. — PLAN TANGENT COMMUN A DEUX SURFACES CYLINDRIQUES OU CONIQUES.

273. — Pour reconnaître s'il est possible de mener à deux cônes un plan tangent commun, on mène à chaque cône un plan tangent passant par le sommet de l'autre cône. Les deux plans ainsi obtenus doivent coïncider, et, par suite, leurs traces sur un même plan ou bien leurs points de rencontre avec une même droite doivent coïncider.

En supposant les deux bases dans le même plan, les constructions à effectuer sont les suivantes : on joint d'abord les sommets S, S_1 des deux cônes par une ligne droite, dont on détermine la trace σ sur le plan de base. On vérifie ensuite s'il est possible de mener par ce point σ une tangente commune aux deux bases.

Lorsque les bases sont dans des plans différents, on joint néanmoins les deux sommets S, S_1 par une ligne droite, dont on détermine les traces σ, σ_1 sur les deux plans de base. On mène ensuite par ces deux points σ, σ_1 des tangentes aux bases correspondantes. Ces tangentes σm, $\sigma_1 m_1$ doivent rencontrer l'intersection XX_1 des deux plans de base au même point μ.

Lorsque cette condition est remplie, le plan $\sigma m \mu m_1 \sigma_1$ est tangent au cône S suivant la génératrice Sm, puis au cône S_1 suivant la génératrice $S_1 m_1$; de telle sorte que les cônes proposés sont eux-mêmes tangents entre eux au point M, à l'intersection des génératrices de contact Sm, $S_1 m_1$.

Cette vérification ne peut plus se faire lorsque les deux cônes ont le même sommet. Cela tient à ce que, dans ce cas, le problème est possible, et alors le plan tangent commun s'obtient en menant une tangente commune aux deux bases supposées dans le même plan. Nous verrons cependant plus loin que, dans le cas particulier de deux cônes de révolution ayant même sommet, au lieu de les couper par un même plan, on peut très bien se servir de sphères inscrites dans chacun d'eux.

274. — Pour reconnaître s'il est possible de mener à un cône et à un cylindre des plans tangents communs, on mène d'abord au cône des plans tangents parallèles aux génératrices du cylindre, puis au cylindre des plans tangents passant par le sommet du cône. Deux des plans ainsi obtenus doivent coïncider, et, par suite, leurs traces sur un même plan, ou bien leurs points de rencontre avec une même droite doivent coïncider.

275. — Enfin, pour reconnaître s'il est possible de mener à deux cylindres un plan tangent commun, on mène à chaque cylindre un plan tangent parallèle aux génératrices de l'autre cylindre. Les deux plans ainsi obtenus doivent coïncider, les vérifications se faisant, d'ailleurs, comme dans les exemples précédents.

Cette vérification ne peut plus se faire lorsque les deux cylindres ont leurs génératrices parallèles. Dans ce cas, le problème est possible, et le plan tangent commun s'obtient en menant une tangente commune aux deux bases supposées dans le même plan.

Dans les trois cas, on est certain à l'avance que le problème est possible lorsque les deux surfaces ont la même base, ou bien lorsqu'elles sont circonscrites toutes deux à une même surface.

IV. — PLANS TANGENTS, PARALLÈLES ENTRE EUX, A DEUX SURFACES CYLINDRIQUES OU CONIQUES.

276. — Pour mener à deux cônes des plans tangents parallèles entre eux, on transporte d'abord les deux cônes parallèlement à eux-mêmes, de façon à leur donner le même sommet. Dans cette position, les cônes transportés admettent des plans tangents communs.

Considérons l'un de ces plans tangents communs θ. Il existe alors pour chacun des cônes primitifs un plan tangent t,t_1 parallèle à ce plan tangent commun. On forme ainsi un système de deux plans tangents t,t_1 parallèles entre eux.

D'ailleurs, pour transporter un cône parallèlement à lui-même, de façon à amener son sommet S en un point S_1, on doit mener par ce point S_1 des parallèles à toutes les génératrices du cône S. On forme ainsi un cône égal au cône primitif, mais il faut bien remarquer que les bases du cône proposé et du cône transporté dans un même plan ne sont pas pour cela égales entre elles, à moins que les deux sommets ne se trouvent à la même distance du plan de base commun.

Pour construire simplement le cône transporté, il est bon de remarquer que les sections par un même plan du cône primitif et du cône transporté sont homothétiques, le centre de similitude étant la trace de la ligne des sommets sur le plan de base commun.

Si, par exemple, le cône primitif a pour base dans le plan horizontal une circonférence, en menant par le nouveau sommet une parallèle à une génératrice du premier cône et à la droite qui joint le sommet primitif au centre de la première base, les traces horizontales de ces deux parallèles seront un point et le centre de la nouvelle base.

Rappelons encore une fois que, si les deux cônes transportés sont de révolution, au lieu de les couper par un même plan pour définir leurs plans tangents communs, nous nous servirons de sphères inscrites.

277. — Pour mener à un cône et à un cylindre des plans tangents parallèles entre eux, on mène d'abord au cône des plans

tangents parallèles aux génératrices du cylindre, puis au cylindre des plans tangents parallèles aux plans ainsi obtenus.

278. — Enfin, pour mener à deux cylindres des plans tangents parallèles entre eux, il suffit de mener à chaque cylindre des plans tangents parallèles aux génératrices de l'autre cylindre.

V. — NORMALE COMMUNE A DEUX SURFACES CYLINDRIQUES OU CONIQUES.

279. — Les plans tangents aux deux pieds de la normale commune à deux surfaces cylindriques ou coniques, étant perpendiculaires tous deux sur cette normale commune, sont parallèles entre eux. Donc, les deux pieds de la normale commune se trouvent déjà sur les génératrices de contact de deux plans tangents parallèles entre eux.

D'ailleurs, toute normale à une surface est en même temps normale à toutes les lignes tracées sur la surface et passant par son pied.

Donc, en résumé, la normale commune à deux surfaces cylindriques ou coniques est la perpendiculaire commune aux génératrices de contact de deux plans tangents parallèles entre eux.

Cette règle est en défaut lorsque les deux génératrices de contact des plans tangents parallèles sont elles-mêmes parallèles entre elles. Dans ce cas, ces deux génératrices admettent une infinité de perpendiculaires communes, mais aucune d'elles n'est normale, à moins que le plan des deux génératrices parallèles ne soit lui-même normal aux deux surfaces. Dans cette dernière hypothèse, les deux surfaces admettraient une infinité de normales communes.

VI. — EXERCICE.

280. — *Étant donné un cône déterminé par son sommet* S_1 *et sa directrice* D_1 *dans le plan* P_1, *on coupe ce cône par le plan* P_2; *la section* D_2 *ainsi obtenue sert de base à un deuxième cône de sommet* S_2. *Cette même opération étant répétée un certain nombre de fois, on arrive finalement à un dernier cône*

de sommet S_n, *et dont la base* D_n *est la section par le plan* P_n *du cône précédent* S_{n-1}.

On demande de mener par un point A *un plan tangent à ce dernier cône* S_n.

Dans ce problème, les éléments connus sont les différents sommets S_1, S_2, S_3, ...S_n, puis les plans de base P_1, P_2, P_3,... P_n, et enfin la première directrice D_1. Il faut éviter, bien entendu, de construire les directrices intermédiaires D_2, D_3, ... D_n.

Pour mener par A un plan tangent au cône S_n, nous joignons par une ligne droite le point A au sommet S_n, et nous déterminons la trace σ_n de cette droite sur le plan de base. Il faut ensuite mener par ce point σ_n une tangente à la base D_n.

Cette base D_n n'étant pas connue, on remarque que la courbe D_n est dessinée sur le cône S_{n-1}, donc sa tangente est contenue dans un plan tangent au cône S_{n-1} mené par σ_n.

On a donc ramené le problème primitif à un problème analogue, le rang du cône étant diminué d'une unité.

En répétant le même raisonnement, nous aurons finalement à mener par σ_2 un plan tangent au cône S_1.

Joignons $\sigma_2 S_1$, qui coupe le plan de base P_1 en σ_1, et menons par σ_1 la tangente $\sigma_1 m_1$ à la directrice D_1.

Cette dernière opération peut s'effectuer, puisque la directrice D_1 est connue.

Inversement, la génératrice de contact $S_1 m_1$ coupe le plan P_2 au point de contact m_2, et ainsi de suite, jusqu'à $S_{n-1} m_{n-1}$ qui coupe le plan P_n au dernier point de contact demandé m_n.

En résumé, $AS_n m_n$ est le plan tangent demandé.

Cette façon de procéder s'applique également au cas où la série de surfaces contiendrait des cylindres aussi bien que des cônes, et où l'on demanderait de mener à la dernière surface un plan tangent parallèle à une droite donnée.

Un raisonnement analogue permettrait de résoudre relativement à la dernière surface l'un des problèmes que nous avons traités précédemment relativement aux cônes et aux cylindres.

LIVRE X

SURFACES DE RÉVOLUTION

CHAPITRE PREMIER

I. — PROPRIÉTÉS DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

281. — Nous avons défini une surface de révolution la surface engendrée par une ligne plane ou gauche en tournant autour d'une droite. Les seules lignes connues sur cette surface sont les parallèles, c'est-à-dire les sections de la surface par des plans perpendiculaires à l'axe. Ces parallèles sont en effet des circonférences ayant leur centre sur l'axe.

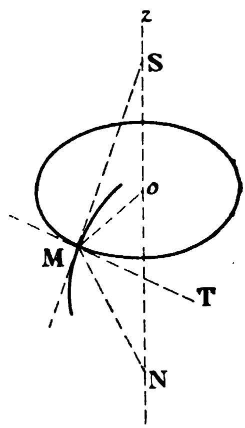


Fig. 116.

Pour qu'il soit facile d'utiliser ces parallèles, il est nécessaire de supposer leur plan parallèle au plan de projection ou, ce qui revient au même, il est nécessaire de supposer l'axe de révolution perpendiculaire au plan de projection. Si l'axe était quelconque, on commencerait par faire des changements de plans, rotations, rabattements ou encore des opérations équivalentes pour rendre l'axe perpendiculaire au plan de projection.

282. — **THÉORÈME.** — *Tout plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire sur le plan méridien qui passe par le point de contact.*

Soit en effet M (fig. 116) un point d'une surface de révolution.

Le plan tangent en ce point M contient la tangente MT au

parallèle qui passe par M. Or, d'un côté, le plan du parallèle est perpendiculaire à l'axe *oz* ; de l'autre, la tangente MT au parallèle est perpendiculaire sur le rayon *o*M, donc la tangente MT est perpendiculaire sur le plan du méridien M*oz*, et par suite il en est de même du plan tangent.

Ce théorème fondamental relatif aux surfaces de révolution peut encore s'énoncer de la façon suivante :

283. — THÉORÈME. — *Toutes les normales à une surface de révolution rencontrent l'axe.*

En effet, toute normale à une surface est en même temps normale à toutes les lignes tracées sur la surface et passant par son pied.

Donc, la normale MN est perpendiculaire sur la tangente MT au parallèle. Elle se trouve alors dans le plan méridien M*oz*, et par suite rencontre l'axe *oz*. Comme cas particulier, elle peut être parallèle à l'axe.

284. — THÉORÈME. — *Tous les plans tangents à une surface de révolution aux différents points d'un même parallèle rencontrent l'axe au même point.*

En effet, le plan tangent au point M (fig. 116) est déterminé par la tangente MT au parallèle, puis par la tangente MS à la méridienne qui passe par M. Lorsqu'on fait tourner la méridienne autour de l'axe, de façon à engendrer la surface, pendant que le point M décrit le parallèle, la tangente MS à la méridienne rencontre l'axe au point S qui reste fixe, donc tous les plans tangents aux différentes positions du point M passent également par le point fixe S.

Il résulte de ce théorème que le point S est le sommet d'un cône de révolution circonscrit à la surface tout le long du parallèle considéré.

Ce dernier théorème peut encore s'énoncer de la façon suivante :

285. — THÉORÈME. — *Les normales à une surface de révolution aux différents points d'un même parallèle coupent l'axe au même point.*

Ce théorème résulte en effet de ce que la normale à la surface au point M n'est autre chose que la normale à la méridienne au même point.

Ces normales forment un cône de révolution ayant pour sommet
point fixe N et qui coupe normalement la surface tout le long
u parallèle considéré.

Remarquons enfin que le même point fixe N est encore le centre
'une sphère ayant pour rayon MN et qui est inscrite dans la
urface tout le long du même parallèle.

II. — DÉTERMINER UN POINT D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION. — PLAN TANGENT EN CE POINT.

286. — 1er exemple. — *On donne dans un plan défini*
ar son échelle de pente P *une ellipse dont la projection hori-*
ontale est la circonférence c (fig. 117). *Cette ellipse tourne*

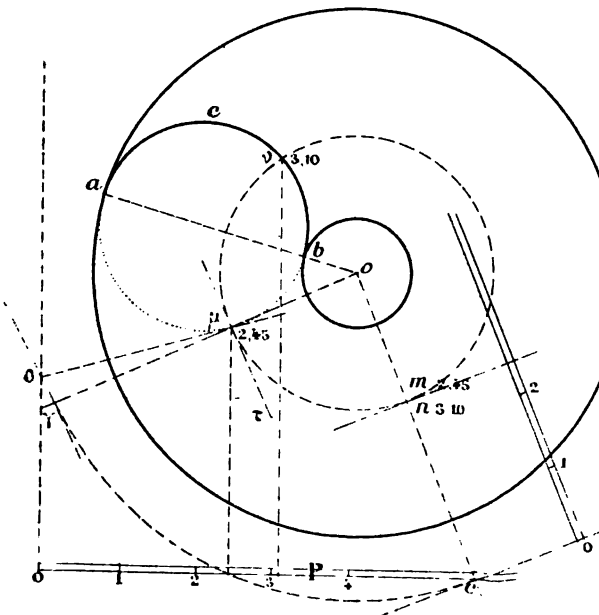


Fig. 117.

autour de la verticale o. *Trouver le point de la surface projeté horizontalement en* m.

Considérons le parallèle passant par le point inconnu, sa projection horizontale est une circonférence ayant pour centre

le point o et passant par le point m. Il rencontre la ligne qui décrit la surface au point μ qui, étant dans le plan P, a pour cote (2,45). Cette cote a été obtenue à l'aide d'une échelle de proportion.

Le point demandé a donc aussi pour cote (2,45).

Le problème présente une deuxième solution n (3,10), donnée par le point ν (3,10).

Pour trouver le plan tangent au point m (2,45) par exemple, on commence par faire tourner ce point autour de l'axe, de façon à l'amener en μ (2,45) sur la ligne qui décrit la surface. Puis on construit le plan tangent en μ, ce qui est possible, puisque en ce point on connaît deux lignes tracées sur la surface. Enfin, on fait tourner le plan ainsi obtenu en sens contraire de la rotation précédente.

Le plan tangent en μ est déterminé par la tangente $\mu\tau$ au parallèle, puis par la tangente $\mu\theta$ à la courbe c. La trace horizontale de ce plan tangent passe par le point θ et elle est perpendiculaire sur le plan méridien $o\mu$.

Nous faisons ensuite tourner ce plan tangent de l'angle $\mu o m$, le point γ sur $o\mu$ vient en c sur om et par suite la trace horizontale du plan tangent est la perpendiculaire sur om, menée par c. Connaissant la cote du point c qui est nulle et celle du point m (2,45), on en a déduit, à l'aide de l'échelle de proportion, l'échelle de pente cm du plan tangent.

Il est à remarquer que, dans toutes les constructions qui précèdent, on a pu éviter l'emploi de l'échelle du dessin, mais celle-ci devrait intervenir pour trouver la normale que l'on mènerait perpendiculaire sur le plan tangent en m.

287. — 2e exemple. — *On donne dans un plan vertical une ellipse dont les sommets du grand axe se projettent horizontalement en* o *et ont respectivement pour cotes* (1) *et* (5). *Le demi-axe horizontal a pour longueur* 1,5. *Cette ellipse tournant autour de l'axe vertical* o *engendre une surface de révolution. Trouver les points de cet ellipsoïde projetés horizontalement en* m (fig. 118).

Commençons par mettre en évidence la ligne qui décrit la surface et qui se trouve être ici une méridienne.

Cette courbe étant définie dans un plan vertical, un seul moyen se présente à nous pour la figurer, c'est celui qui consiste à

prendre un plan vertical auxiliaire. Autrement dit, il est nécessaire ici d'employer la méthode des deux plans de projection et de renoncer à employer exclusivement les plans cotés, en nous plaçant toutefois à ce point de vue que la courbe méridienne pourrait être tout autre chose qu'une ellipse. Nous indiquons cette restriction, parce que, dans le cas particulier où la méridienne est une courbe du second degré, on peut aussi calculer les ordonnées des deux points de la surface projetés en *m*.

Nous avons donc pris comme ligne de terre une droite quelconque *xy*. Pour le problème particulier qui nous occupe, nous prévenons qu'il y aurait avantage à prendre *om*. Puis nous avons figuré la projection verticale *c′* de la méridienne.

Le parallèle passant par le point inconnu se projette horizontalement suivant une circonférence décrite de *o* comme centre avec *om* pour rayon.

Ce parallèle rencontre la méridienne *cc′* aux points $\mu\mu'$, $\nu\nu'$. On en déduit les projections verticales des deux parallèles qui sont des parallèles à *xy* menées par μ', ν'. Finalement les points inconnus se projettent verticalement en *m′*, *n′*. Leurs cotes sont mesurées par $\mu\mu' = (4{,}35)$, $\nu\nu' = (1{,}65)$.

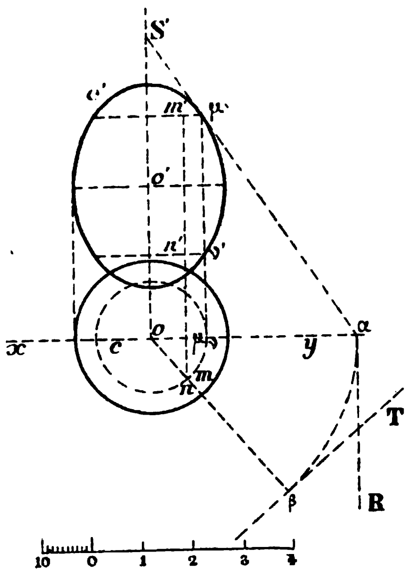


Fig. 118.

Encore une fois, dans le cas d'un ellipsoïde, on aurait pu calculer ces cotes directement, en multipliant la racine carrée de la puissance de *m* par rapport au contour apparent horizontal par le rapport $\frac{2}{1{,}5}$ des deux axes de l'ellipse. Le nombre ainsi obtenu 1,35 représente les distances des points inconnus au plan horizontal *o′* de cote 3. Les cotes cherchées sont donc $3 + 1{,}35 = (4{,}35)$ et $3 - 1{,}35 = (1{,}65)$.

Pour trouver le plan tangent au point mm' par exemple, nous commençons par faire tourner ce point autour de l'axe, de façon à l'amener en $\mu\mu'$ sur la méridienne connue et qu'on appelle la méridienne principale, parce qu'elle est de front.

En $\mu\mu'$, nous construisons le plan tangent à la surface. Ce plan tangent contient d'abord la tangente $o\mu S'\mu'$ à la méridienne, puis la tangente au parallèle en $\mu\mu'$. Or cette dernière tangente est de bout; il en est donc de même pour le plan tangent qui, alors, a pour trace verticale $S'\mu'\alpha$ et pour trace horizontale $R\alpha$.

Il reste à faire tourner ce plan tangent en sens contraire de la rotation précédente, c'est-à-dire de l'angle μom. Le point α vient en β sur om, et par suite la trace horizontale du plan tangent est $T\beta$, perpendiculaire sur om.

Le plan tangent est donc défini par sa trace horizontale $T\beta$ et par le point de contact m (4,35). L'échelle de proportion permet alors de le graduer.

288. — **3e exemple.** — *On donne un ellipsoïde de révolution défini par son axe horizontal* A (2) (fig. 119) *et sa méridienne principale* C, *trouver les points de la surface projetés horizontalement en* m.

Le parallèle passant par le point inconnu se projette horizontalement suivant une perpendiculaire à l'axe A menée par le point

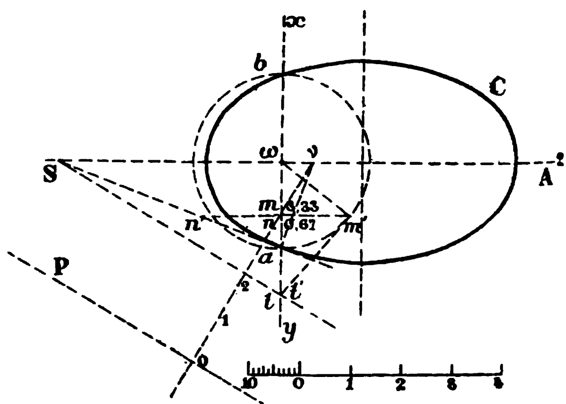


Fig. 119.

donné m. Pour le mettre en évidence, il suffirait de prendre oA comme ligne de terre. En comptant les cotes à partir du plan

horizontal (2) mené par l'axe, la projection verticale du parallèle est la circonférence décrite sur *ab* comme diamètre. Le point *m* se projette donc verticalement en *m'* ou *n'* sur cette circonférence. Si l'on ne veut pas exécuter cette construction graphique, on peut se contenter de dire que la cote *mm'* est moyenne proportionnelle entre les segments *ma*, *mb* :

$$mm' = \sqrt{ma \times mb} = 1{,}33.$$

La cote du point *m* est donc $2 + 1{,}33 = (3{,}33)$; celle du point *n* est $2 - 1{,}33 = (0{,}67)$.

Déterminons maintenant le plan tangent au point *m*, par exemple. Pour cela, nous faisons tourner le point autour de l'axe de façon à l'amener en *a* sur la méridienne. Le plan tangent en ce dernier point est vertical, et il a pour trace horizontale *a*S tangente à la méridienne principale.

Pendant la rotation inverse, le point de rencontre S avec l'axe reste fixe.

Le plan tangent en *m* est donc déterminé par le point fixe S (2) et par la tangente en *m* au parallèle.

Cette dernière tangente peut se dessiner dans la projection verticale auxiliaire *m't'mt*.

On peut aussi déterminer le point *tt'* à l'aide de la relation :

$$t\omega = \frac{\overline{a\omega}^2}{m\omega}.$$

Enfin, la considération de la normale nous conduit à une construction sans calcul de l'horizontale S*t* du plan tangent.

Nous savons en effet que les normales à une surface de révolution en tous les points d'un même parallèle coupent l'axe au même point.

Menons donc la normale en *a* à la surface ou à la méridienne principale, elle coupe l'axe au point fixe ν; il en résulte que *m*ν est la normale en *m*, et par suite S*t*, perpendiculaire sur *m*ν, sera l'horizontale (2) du plan tangent.

Connaissant l'horizontale (2) du plan tangent et le point de contact *m* (3,33), l'échelle de proportion permet de graduer le plan tangent et de trouver en particulier sa trace horizontale P.

III. — CONTOURS APPARENTS.

289. — Dans l'exemple 1 (n° 286), les parallèles de rayons maximum et minimum forment le contour apparent horizontal de la surface. En effet, soit oa la normale abaissée du pied de l'axe o sur la projection horizontale de la courbe (fig. 117). Au point a, la tangente à la courbe c et la tangente au parallèle ont la même projection horizontale, donc le plan de ces deux droites, c'est-à-dire le plan tangent, est vertical.

Il en est de même pour tous les points du parallèle, et par suite ce parallèle fait partie du contour apparent horizontal.

Le même raisonnement s'applique au parallèle du point b. Ce dernier parallèle, étant le plus petit des parallèles de la surface, s'appelle le collier ou cercle de gorge. Au contraire, le plus grand parallèle défini par a est nommé l'équateur.

Dans l'exemple 2 (n° 287, fig. 118), le contour apparent horizontal est encore formé par l'équateur comme dans l'exemple précédent.

Quant au contour apparent vertical, il est formé par la méridienne principale c', car, en tous les points de cette courbe, le plan tangent, étant perpendiculaire sur le plan de la méridienne, est de bout.

Enfin, dans l'exemple 3 (n° 288, fig. 119), le contour apparent horizontal est formé par la méridienne principale C, puisque, le plan méridien étant horizontal, les plans tangents en tous les points de cette méridienne sont verticaux.

290. — Ces contours apparents constituent la limite entre les parties vues et les parties cachées de chaque surface; les problèmes précédents donnent en même temps la ponctuation complète de ces surfaces. Ils peuvent s'énoncer, en effet, de la façon suivante : intersection de chaque surface avec la verticale m. Celui des deux points qui a la plus grande cote est vu, l'autre est caché. La région de la surface, allant d'un point reconnu vu jusqu'au premier contour apparent rencontré, est également vue.

CHAPITRE II

I. — PLAN TANGENT PARALLÈLE A UN PLAN DONNÉ.

291. — Lorsque le plan donné est perpendiculaire sur le plan méridien principal, c'est-à-dire lorsque le plan méridien connu est parallèle au plan de projection, le plan donné étant lui-même perpendiculaire sur ce plan de projection, le point de contact se trouve alors sur la méridienne principale. Ce point de contact s'obtient, dans ce cas, en menant à la méridienne principale une tangente parallèle à la trace du plan donné sur ce plan méridien principal.

292. — 1er exemple. — ***Un ellipsoïde de révolution a son axe vertical*** o (fig. 120); ***le centre a pour cote*** (2,5); ***le demi-axe de révolution a pour longueur*** 1,5 ***et le rayon de l'équateur est égal à*** 2. ***Mener à cette surface un plan tangent de pente*** 2 ***et ayant sa trace horizontale parallèle à*** P.

Comme il est nécessaire ici de figurer la méridienne de la surface, nous avons pris, comme plan vertical de projection, le plan vertical *xy*. Dans ce système, la projection verticale de l'ellipse méridienne principale est l'ellipse CC'. Quand on n'a que le problème primitivement énoncé à résoudre, il est avantageux de prendre la ligne de terre perpendiculaire sur la trace horizontale du plan P; on évite ainsi la rotation que nous effectuerons ultérieurement.

Par le point *aa'* de cote (2) sur l'axe, menons un plan parallèle au plan donné; son échelle de pente *ab* est perpendiculaire sur P. Son module étant $\frac{1}{2}$, la trace horizontale R sera parallèle à P et passera par *b*, en prenant $ab = 1$.

Faisons tourner maintenant le plan R autour de l'axe, de façon

à le rendre de bout. La rotation est mesurée par l'angle bab_1, et le plan devient le plan de bout $a'b'_1$.

Menons alors le plan $\alpha_1 m'_1$ parallèle au plan $a'b'_1$ et tangent à la surface. Sa trace verticale est $\alpha_1 m'_1$ parallèle à $a'b'_1$ et tangente à la méridienne principale.

Il ne reste plus qu'à effectuer pour ce plan et pour son point de contact une rotation inverse de la précédente.

Ainsi, le point α_1 vient en α sur ab ; donc la trace horizontale du plan est $T\alpha$, parallèle à P menée par α.

De même, le point de contact $m_1 m'_1$ vient par la rotation inverse se placer en mm'.

Tel qu'il est énoncé, le problème présente en tout quatre solutions.

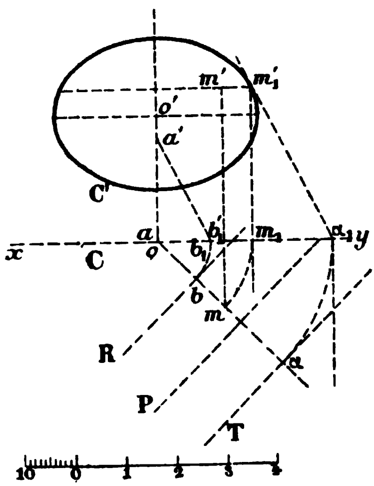


Fig. 120.

293. — 2ᵉ exemple. — *On donne dans le plan horizontal une ellipse* C *qui, en tournant autour de son grand axe* A, *engendre une surface de révolution. Mener à cette surface un plan tangent parallèle au plan* P *défini par son échelle de pente* (fig. 121).

Commençons par faire tourner toute la figure autour de l'axe A, de façon à amener le plan P à être vertical. Une première façon de procéder consisterait à choisir comme plan vertical de projection un plan perpendiculaire sur l'axe. Nous avons continué dans l'épure l'emploi unique de la méthode des plans cotés.

D'un point a de l'axe A abaissons d'abord une perpendiculaire ab sur le plan. Le module ab est 1,33, c'est l'inverse du module du plan 0,75. Cherchons ensuite le pied p de cette perpendiculaire sur le plan. Nous nous sommes servis pour cela du plan passant par ab et ayant pour trace horizontale ac. Les traces horizontales se coupent en c, les horizontales (1) se coupent en d. L'intersection des deux plans est donc cd, qui rencontre ab au point p (0,73).

Rabattons maintenant le plan pA sur le plan horizontal autour de A. Le point p se rabat sur une perpendiculaire $p\alpha$ à la charnière, à une distance $p_2\alpha$ de la charnière qui est :

$$p_2\alpha = \sqrt{\overline{0,73}^2 + \overline{p\alpha}^2} = \sqrt{\overline{0,73}^2 + \overline{0,75}^2} = 1,04.$$

Le plan P est donc maintenant vertical, et il a pour trace horizontale βp_2, car le point β reste fixe.

Menons ensuite à la méridienne une tangente Sm_2 parallèle

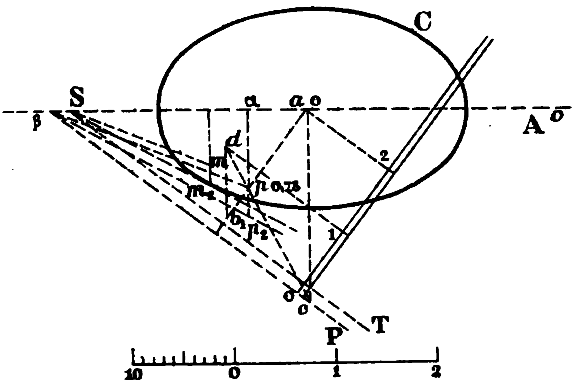


Fig. 121.

à βp_2. Le point S sera un point du plan tangent cherché. Sa trace horizontale est ST parallèle à βP.

Enfin, le point de contact m_2 se relève sur une perpendiculaire à la charnière A menée par m_2, puis sur la parallèle Sm à βp menée par S.

Le problème présente une deuxième solution symétrique de la première par rapport au centre de l'ellipsoïde.

On aurait traité d'une façon analogue le problème suivant : mener à la surface une normale parallèle à une direction donnée. On commence par faire tourner la direction donnée autour de l'axe, de façon à l'amener dans le plan méridien principal. On mène ensuite à cette méridienne une normale parallèle à la direction trouvée. Enfin, on fait tourner la normale ainsi que son pied en sens contraire de la rotation précédente.

II. — POINTS BRILLANTS.

294. — Les points brillants d'une surface éclairée par une source lumineuse sont les points où l'observateur verrait l'image de la source lumineuse si la surface était parfaitement polie.

Le rayon lumineux et le rayon visuel aboutissant à ce point sont donc dans un même plan avec la normale, l'angle d'incidence étant égal à l'angle de réflexion.

On peut dire aussi que la normale au point brillant est la bissectrice de l'angle formé par le rayon visuel et par le rayon lumineux. Il faudra donc déterminer d'abord la bissectrice de l'angle formé par les rayons lumineux et par les rayons visuels, puis on mènera à la surface une normale parallèle en supposant les rayons lumineux parallèles entre eux, ainsi que les rayons visuels.

295. — **Exemple.** — *On donne un demi-ellipsoïde creux ayant son axe horizontal et reposant par le point le plus bas de l'équateur sur le plan horizontal. Cet ellipsoïde est limité au plan horizontal mené par l'axe. Trouver le point brillant, en supposant l'ellipsoïde éclairé par des rayons lumineux parallèles à la droite passant par le centre* o *et ayant pour trace horizontale* h (fig. 122).

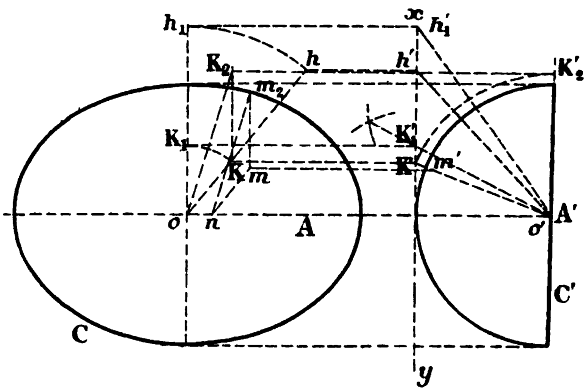


Fig. 122.

A titre d'exercice, nous ferons l'épure ici en employant deux plans de projection rectangulaires, et en choisissant comme

plan vertical de projection un plan xy perpendiculaire à l'axe A.

L'axe a donc pour projection verticale A′, l'ellipse méridienne étant l'ellipse horizontale CC′.

Commençons par déterminer la bissectrice de l'angle formé par le rayon lumineux oh et par le rayon visuel qui, ici, est vertical. Pour cela, nous avons fait tourner le plan des deux droites, c'est-à-dire le plan vertical oh, autour de la verticale o, de façon à le rendre de front. La droite $oho'h'$ prend la position $oh_1o'h'_1$; quant à la verticale, elle reste fixe. La bissectrice est alors $oK_1o'K'_1$, qu'il faut faire tourner en sens contraire de la rotation précédente pour l'amener dans la position $oKo'K'$.

Il faut maintenant mener à la surface une normale parallèle à $oKo'K'$.

Pour cela, nous faisons tourner cette droite autour de l'axe de l'angle $K'A'K'_2$ pour la rendre horizontale suivant $oK_2o'K'_2$. Nous menons ensuite à la méridienne principale la normale m_2n parallèle à oK_2. Enfin, faisons tourner cette normale ainsi que son pied, en sens contraire de la rotation précédente. Le point m_2 se déplace sur une perpendiculaire à l'axe. D'ailleurs le point n est fixe, donc la normale devient nm parallèle à oK. Enfin, le point m se projette verticalement en m' sur $o'K'$. En résumé, m est le point brillant.

Nous avons choisi comme pied de normale le seul point existant, l'autre étant symétrique du premier par rapport au centre correspondant à la région enlevée de l'ellipsoïde.

Il existe une deuxième bissectrice perpendiculaire à $o'K'_1$, elle donnerait le point le plus éclairé de la région dans l'ombre.

296. — Remarque. — Il est bon de remarquer ici, à propos de points brillants, que, dans le cas des surfaces cylindriques ou coniques, il n'y a pas lieu de chercher ni des points brillants, ni des lignes brillantes. Il est en effet généralement impossible de mener à une surface cylindrique ou conique un plan tangent parallèle à un plan donné, et par suite une normale parallèle à une droite donnée. Dans les surfaces cylindriques ou coniques, et plus généralement dans les surfaces développables, on n'a que des génératrices paraissant plus éclairées que les génératrices voisines, et dont la détermination dépend de la nature physique de la surface.

III. — PLAN TANGENT AYANT SON POINT DE CONTACT SUR UN PARALLÈLE DONNÉ.

297. — 1° Plan tangent par un point extérieur. — Pour mener par un point extérieur un plan tangent à une surface de révolution, le point de contact étant sur un parallèle donné, on remarque que tous les plans tangents à une surface de révolution ayant leurs points de contact sur un même parallèle sont aussi tangents à un cône de révolution circonscrit à la surface tout le long du parallèle. On peut donc substituer à la surface proposée le cône circonscrit tout le long du parallèle. Ce cône a pour base le parallèle et pour sommet le point de rencontre de l'axe avec le plan tangent en un point quelconque du parallèle. On choisira comme point du parallèle l'intersection de ce parallèle avec la ligne qui décrit la surface.

Pour mener ensuite par le point extérieur un plan tangent au cône ainsi défini, on doit joindre par une droite le point donné au sommet du cône et déterminer la trace de cette droite sur le plan du parallèle. On mène enfin par ce dernier point une tangente au parallèle, son point de contact sera en même temps le point de contact cherché sur la surface.

298. — 1er exemple. — *On donne une surface de révolution à axe vertical* o, *définie par sa méridienne principale dont on a la projection verticale* C′ *dans le système* xy. *Mener à cette surface un plan tangent par* AA′, *le point de contact étant sur le parallèle* pp′ (fig. 123).

Commençons par construire le cône circonscrit à la surface tout le long du parallèle pp'. Il a pour sommet le point de rencontre SS′ de l'axe avec le plan tangent en $\mu\mu'$ à l'intersection du parallèle pp' avec la méridienne principale CC′.

Menons ensuite par AA′ un plan tangent au cône $SpS'p'$. Pour cela, nous joignons ASA′S′, qui rencontre le plan du parallèle au point $\sigma\sigma'$. Il suffit enfin de mener par ce point $\sigma\sigma'$ une tangente $\sigma m\sigma' m'$ au parallèle.

En résumé, mm' est le point de contact; quant au plan tangent, il est défini par $SmS'm', m\sigma m'\sigma'$, SAS′A′.

Cette construction peut ne pas toujours réussir, elle suppose en effet les points SS′, $\sigma\sigma'$ dans les limites de l'épure.

Lorsque la construction précédente ne réussit pas, on choisit **comme** plan de base le plan **perpendiculaire** à l'axe mené **par le** point AA'.

Ce nouveau plan de base **coupe** le cône $SpS'p'$ suivant **la circonférence** $p_1p'_1$, à laquelle on mène une tangente par le point A, soit Am_1.

La génératrice de contact ainsi obtenue Sm_1 rencontre le parallèle pp' au point de contact demandé mm'.

Il faut avoir soin de remarquer que, en projection horizontale, la génératrice Sm_1 coupe le parallèle p en deux points; un seul de ces points convient.

Lorsque les parallèles p, p_1 appartiennent à la même nappe du cône, on choisit le point m du même côté que m_1 par rapport à S.

Si les parallèles p, p_1 appartenaient à deux nappes différentes du cône, il faudrait choisir le point de contact m de l'autre côté de m_1 par rapport à S.

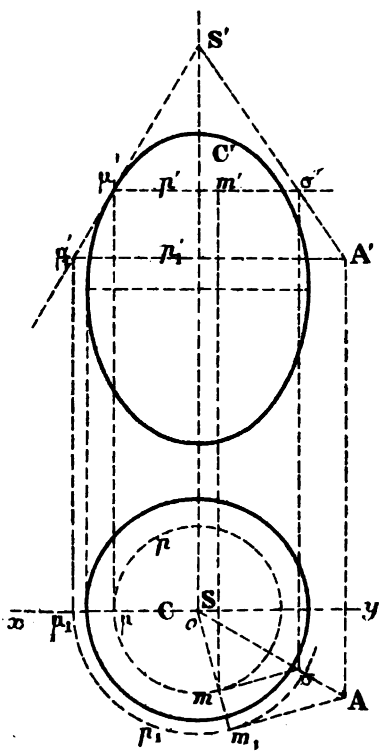


Fig. 123.

299. — **2ᵉ exemple.** — *On donne une surface de révolution à axe horizontal* A (3) (fig. 124) *définie par sa méridienne principale* C *et le point* P (7). *Mener par ce point un plan tangent ayant son point de contact sur le parallèle* p.

Le cône circonscrit à la surface tout le long du parallèle p a pour sommet le point S à l'intersection de l'axe A avec la tangente à la méridienne principale au point μ où cette méridienne est rencontrée par le parallèle p.

La droite PS coupe le plan du parallèle au point σ (5,2), par lequel il faut mener des tangentes au parallèle.

Or, en prenant comme ligne de terre xy et en comptant les cotes à partir du plan horizontal (3), la projection verticale du parallèle est la circonférence décrite de o' comme centre avec $o\mu'$ pour rayon.

D'un autre côté, le point σ a pour projection verticale σ', en prenant $\sigma\sigma' = 5,2 - 3 = 2,2$.

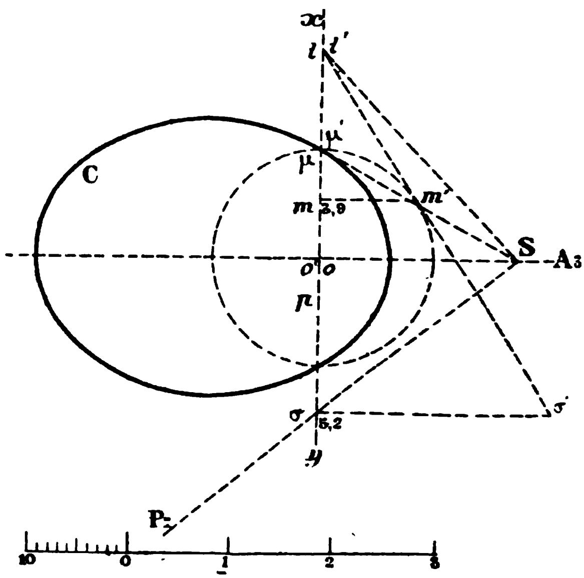


Fig. 121.

L'une des tangentes est alors $\sigma'm'$ qui donne le point de contact $m'm$ (3,9).

Le plan tangent est défini par la droite PσS et par la tangente $\sigma mt\sigma'm't'$; St est l'horizontale (3) du plan tangent.

300. — 2° Plan tangent parallèle à une droite. — Pour mener à une surface de révolution un plan tangent parallèle à une droite donnée, le point de contact étant sur un parallèle donné, on substitue comme précédemment à la surface le cône circonscrit tout le long du parallèle considéré.

Enfin, on mène à ce cône un plan tangent parallèle à la droite donnée. La génératrice de contact du cône coupera le parallèle de contact au point cherché.

301. — Exemple. — *On donne une surface de révolution définie par son axe* A *dont on a la projection et l'échelle, puis par son centre* o (3). *Le demi-axe de révolution a pour longueur* 3, *le rayon de l'équateur est égal à* 2. *Mener à cette surface un plan tangent parallèle à la droite* D *définie par sa projection et son échelle, le point de contact étant sur le parallèle le plus élevé de la surface dont le rayon est égal à* 1 (fig. 125).

Commençons par mettre en évidence la méridienne, en choisissant comme plan vertical le plan projetant horizontalement l'axe A; et, dans le même système, projetons aussi verticalement la droite D suivant D′. Pour déterminer ensuite le parallèle sur lequel doit se trouver le point de contact, nous avons fait un

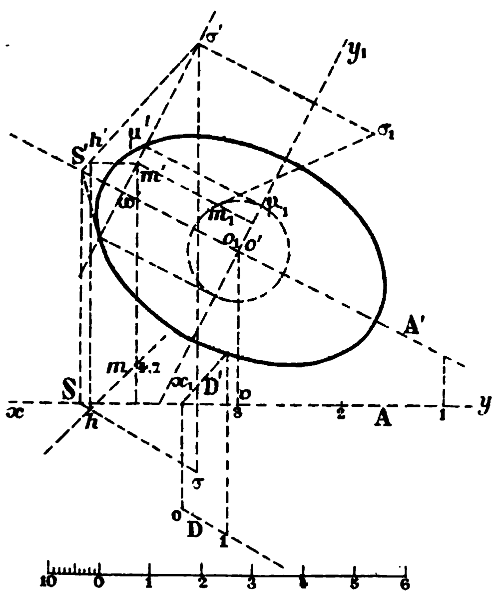


Fig. 125.

changement de plan horizontal, en prenant comme ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire sur A′. Le parallèle a pour projection horizontale une circonférence décrite de o_1 comme centre avec un rayon égal à 1; on en déduit la projection verticale $\mu'\omega'$, à l'aide de la ligne de rappel $\mu_1\mu'$.

Nous substituons alors à la surface le cône tangent tout le

long du parallèle $\mu'\omega'$; son sommet est en SS', à l'intersection de l'axe avec la tangente en μ' à la méridienne.

Menons maintenant à ce cône Sμ un plan tangent parallèle à la droite donnée. Pour cela, par le sommet SS' on a mené une parallèle à la direction donnée, elle coupe le plan du parallèle au point $\sigma'\sigma$. Par ce dernier point, il faut mener une tangente au parallèle; mais, comme ce parallèle n'est défini que dans le système x_1y_1, il faut aussi effectuer le changement de plan indiqué pour le point $\sigma\sigma'$; soit σ_1 sa nouvelle projection horizontale. La tangente demandée est donc $\sigma_1 m_1$, ce qui donne pour point de contact dans le système primitif mm' (4,7).

D'ailleurs le plan tangent est défini par SS', mm', $\sigma\sigma'$; on a figuré une horizontale de ce plan $mhm'h'$ définie par mm' et par son point de rencontre hh' avec SσS'σ'.

IV. — PLAN TANGENT AYANT SON POINT DE CONTACT SUR UNE MÉRIDIENNE DONNÉE.

302. — 1° Par un point extérieur. — Pour mener à une surface de révolution un plan tangent par un point extérieur, le point de contact étant dans un plan méridien donné, on profite de ce que tout plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire sur le plan méridien du point de contact. Donc, tous les plans tangents à une surface de révolution ayant leur point de contact sur une méridienne donnée sont tangents à un cylindre circonscrit à la surface tout le long de la méridienne, et admettent cette méridienne comme section droite. Autrement dit, on substitue à la surface proposée le cylindre ayant pour directrice la méridienne et ses génératrices perpendiculaires sur le plan de cette méridienne.

Il ne reste plus qu'à mener par le point extérieur un plan tangent à ce cylindre.

303. — 1er exemple. — *On donne un tore à axe vertical* o (fig. 126). *La méridienne a son centre à* 3 *de l'axe, elle a pour rayon* 2. *Mener par le point* p (8) *un plan tangent ayant son point de contact dans le plan méridien* M.

Nous substituons à la surface le cylindre circonscrit tout le long de la méridienne M. Pour mettre en évidence la base du

cylindre, nous prenons comme ligne de terre M. En comptant les cotes à partir du plan horizontal (4), la méridienne MM′ a pour projection verticale une circonférence ayant pour centre ω′ et pour rayon 2.

D'ailleurs, les génératrices du cylindre, étant perpendiculaires sur le plan méridien M, sont de bout.

On a donc mené par le point *p* (8) une perpendiculaire sur le plan méridien M, elle coupe ce plan au point σσ′ dont la cote est $8 - 4 = 4$; puis, par ce point, on a mené une tangente à la méridienne. Soit *mm′* le point de contact. La cote de ce point est $4 + mm' = 4 + 1{,}35 = (5{,}35)$. Le plan tangent lui-même est le plan de bout σ′m′ qui coupe le plan horizontal (4) suivant l'horizontale H ; il contient de plus l'horizontale *p*σ (8).

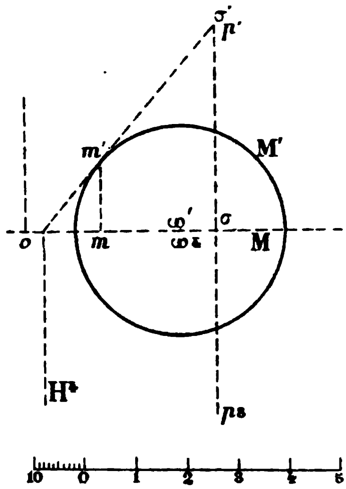


Fig. 126.

304. — **2e exemple.** — *On donne un tore défini par son axe horizontal* A (6) (fig. 127) *et son cercle méridien principal* M (6). *Mener par le point* p (10) *un plan tangent à la surface, le point de contact étant dans le plan méridien de pente* $\frac{1}{2}$.

Le plan méridien du point de contact est défini par l'axe A (6) et par l'horizontale B (7) à une distance de A égale au module 2 du plan. Nous substituons à la surface le cylindre ayant pour section droite la méridienne considérée. Menons donc par le point *p* (10) un plan tangent à ce cylindre. Pour cela, nous menons par *p* une parallèle aux génératrices, c'est-à-dire une perpendiculaire *ph*K sur le plan méridien. Son module est $\frac{1}{2}$. Soit *h* et K les points dont les cotes sont respectivement (6) et (7).

Déterminons ensuite l'intersection de cette droite avec le plan méridien à l'aide des deux horizontales hh_1, KK_1 qui se coupent en ω.

L'horizontale ω coupe phK au point cherché σ (7,13).

Il faut ensuite mener par ce point σ des tangentes à la méridienne.

Mais nous ne connaissons que le rabattement M de cette méri-

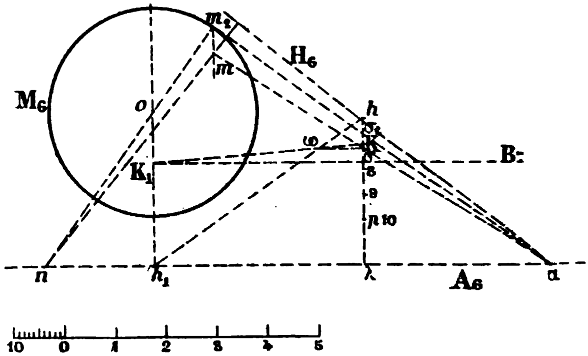


Fig. 127.

dienne autour de A. Il faut donc aussi rabattre le point σ, qui vient sur $\sigma\lambda$, à une distance de λ :

$$\sigma_2\lambda = 1{,}13\sqrt{1+2^2} = 2{,}52.$$

La tangente rabattue est $\sigma_2 m_2 \alpha$ qui se relève suivant $\alpha\sigma m$.

Le point de contact cherché est donc le point m (8,07).

La normale rabattue est $m_2 on$, elle se relève suivant mn, et par suite l'horizontale (6) du plan tangent passe par α et elle est perpendiculaire sur mn, soit H.

305. — 2° Parallèle à une droite. — Pour mener à une surface de révolution un plan tangent parallèle à une droite D, le point de contact étant dans un plan méridien donné M, on substitue à la surface le cylindre circonscrit tout le long de la méridienne donnée M, puis on mène à ce cylindre un plan tangent parallèle à la droite D. La génératrice de contact sur le cylindre rencontre la méridienne M au point de contact cherché.

On peut dire aussi que le plan tangent sera parallèle à une droite Δ perpendiculaire sur le plan méridien M. On est ainsi ramené au problème connu : mener à une surface de révolution un plan tangent parallèle à un plan P, ce plan P étant lui-même parallèle aux deux droites D et Δ..

LIVRE XI

DE LA SPHÈRE

CHAPITRE PREMIER

I. — DÉTERMINATION D'UN POINT. — PLAN TANGENT.

306. — *La sphère est une surface de révolution engendrée par une circonférence tournant autour de l'un de ses diamètres.*

On peut choisir comme axe de révolution un diamètre quelconque de la sphère. Le choix de l'axe peut donc donner lieu pour la résolution d'un même problème à différentes constructions.

Parmi les axes qu'il peut être avantageux de choisir, nous indiquerons l'axe perpendiculaire ou parallèle au plan de projection.

Le contour apparent dans l'espace de la sphère sur un plan quelconque est la section de la sphère par le plan parallèle au plan de projection mené par le centre de la sphère.

Ce grand cercle peut servir de méridienne principale ou d'équateur, suivant que l'on choisit comme axe de rotation le diamètre parallèle au plan de projection ou perpendiculaire sur ce plan.

307. — Détermination d'un point. — Soit la sphère o (5) (fig. 128) et le point m.

Si nous prenons comme ligne de terre la droite om, en comptant les cotes à partir du plan horizontal 5, dans ce système, le contour apparent vertical de la sphère est le grand cercle AA$'$. Le point m appartenant à ce contour apparent A se projette verticalement en m' sur A$'$. Sa cote est donc $5 \pm mm'$; or mm' vaut (2,55). Donc les deux points de la sphère projetés horizontalement en m ont respectivement pour cotes (7,55), (2,45).

On peut dire aussi que la cote relative mm' est moyenne proportionnelle entre les deux segments $ma = 4,58$ et $mb = 1,42$:

$$mm' = \sqrt{4,58 \times 1,42} = 2,55.$$

On arriverait au même résultat en prenant comme ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire sur om menée par m. Dans ce système,

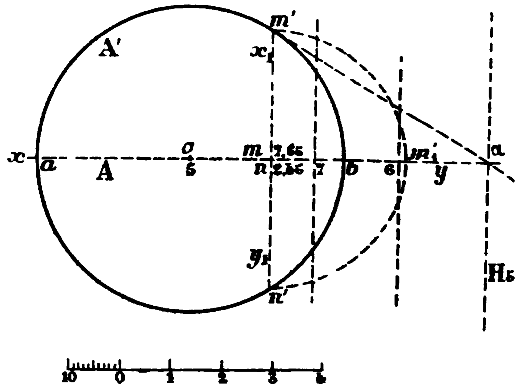


Fig. 128.

le parallèle de front de la sphère mené par m se projette verticalement suivant la circonférence décrite sur $m'n'$ comme diamètre. Le point m se projette donc verticalement en m'_1; sa cote relative est mm'_1 ou $mm' = (2,55)$.

308 — **Plan tangent.** — En prenant toujours comme ligne de terre xy, le plan tangent en mm' est perpendiculaire sur le rayon $omo'm'$, il a donc pour trace verticale $m'\alpha$ tangente au contour apparent vertical A' de la sphère. Sa trace horizontale, c'est-à-dire l'horizontale H (5), est perpendiculaire à om menée par α.

Nous voyons donc que la trace du plan tangent sur le plan horizontal du centre est la polaire du point de contact m par rapport au contour apparent horizontal.

Connaissant l'horizontale H (5) et le point m (7,55), l'échelle de proportion permet de graduer le plan tangent, dont on a figuré les horizontales (6) et (7).

II. — PLAN TANGENT PARALLÈLE A UN PLAN DONNÉ.

309. — Le rayon du point de contact doit être perpendiculaire sur le plan donné. Le problème revient donc à porter sur une

droite, à partir d'un point, une longueur connue et égale au rayon.

Soit la sphère $o(3)$ (fig. 129) et le plan P défini par son échelle de pente.

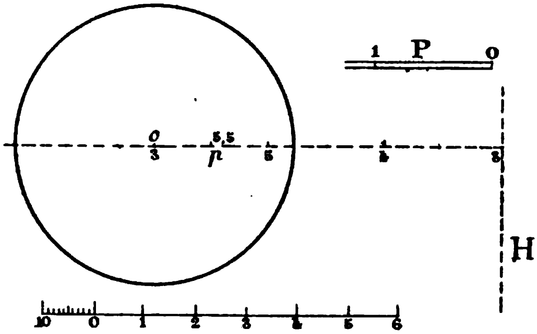


Fig. 129.

Nous abaissons d'abord du centre une perpendiculaire sur le plan; elle a pour module l'inverse du module du plan, soit $\frac{1}{2,3} = 0,43$.

Enfin, nous portons sur cette droite une longueur égale au rayon de la sphère 2,7.

La longueur op est donnée par la relation :

$$op = \frac{Rm'}{\sqrt{1 + m'^2}} = \frac{2,7 \times 0,43}{\sqrt{1 + \overline{0,43}^2}} = 1,07.$$

Quant à la cote relative du point p, c'est :

$$\frac{R}{\sqrt{1 + m'^2}} = \frac{2,7}{\sqrt{1 + \overline{0,43}^2}} = 2,5.$$

La cote véritable du point de contact p est donc $3 + 2,5 = (5,5)$.

Enfin, la trace du plan tangent sur le plan horizontal (3) est la polaire H du point p par rapport au contour apparent horizontal de la sphère, ou encore elle est à une distance du centre égale à $\frac{R^2}{op} = \frac{\overline{2,7}^2}{1,07} = 6,81$.

Le problème présente une seconde solution symétrique de la première par rapport au centre.

CHAPITRE II

I. — SPHÈRE CIRCONSCRITE A UN TÉTRAÈDRE.

310. — Le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre est le point commun aux plans perpendiculaires aux milieux des six arêtes du tétraèdre. Trois de ces plans suffisent pour déterminer le centre, en ayant soin de ne pas choisir trois arêtes d'une même face, parce qu'alors on ne tiendrait pas compte du quatrième sommet.

Soit le tétraèdre SABC (fig. 130) reposant par la face ABC sur le plan horizontal, la cote du sommet S étant connue et égale à (6).

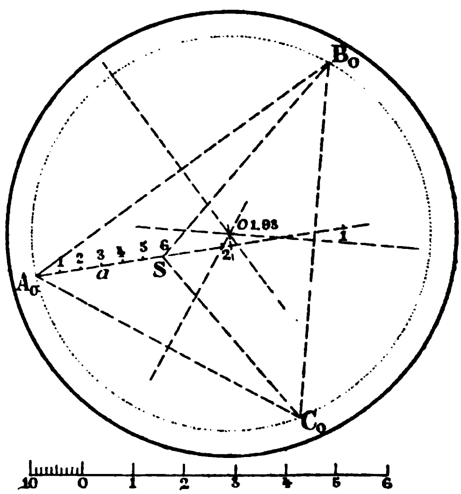


Fig. 130.

Les plans perpendiculaires aux milieux des arêtes AB, BC sont verticaux. Leurs traces horizontales sont perpendiculaires aux milieux des côtés AB, CD. Ces deux premiers plans se coupent suivant la verticale *o*.

Considérons maintenant le plan perpendiculaire au milieu de l'arête SA.

Le module de cette arête est 0,41 ; celui du plan sera :

$$\frac{1}{0,41} = 2,4.$$

Nous avons donc figuré l'échelle de pente de ce plan en partant du point a (3). Son intersection avec la verticale o a pour cote (1,93) qu'on a trouvé à l'aide de l'échelle de proportions.

Il reste enfin à trouver le rayon de la sphère. Il suffit pour cela de chercher la distance du centre o (1,93) à l'un quelconque des sommets, A (0) par exemple.

On a donc :

$$R = \sqrt{\overline{oA}^2 + \overline{1,93}^2} = \sqrt{\overline{3,9}^2 + \overline{1,93}^2} = 4,35.$$

Pour ne pas compliquer le problème, nous avons supposé une face dans le plan horizontal. La marche à suivre serait identique, mais plus longue naturellement, si les quatre sommets étaient arbitraires.

II. — SPHÈRES TANGENTES AUX QUATRE FACES D'UN TÉTRAÈDRE.

311. — 1re méthode. — Le centre d'une sphère tangente aux quatre faces d'un tétraèdre, étant équidistant de ces quatre faces, sera le point commun aux plans bissecteurs des dièdres du tétraèdre. Trois de ces plans suffisent pour déterminer le centre, en ayant soin de ne pas choisir trois dièdres d'un même trièdre, parce qu'alors on ne tiendrait pas compte de la quatrième face.

Nous choisirons par exemple les plans bissecteurs des dièdres adjacents à une même face ABC.

Le dièdre BC, formé par les deux faces ABC, SBC, admet deux plans bissecteurs. L'un d'eux coupe l'arête AS entre les deux points A et S; nous l'appellerons le plan bissecteur intérieur A_i. L'autre est perpendiculaire au premier, il coupe l'arête AS en dehors des deux points A et S; ce sera le plan bissecteur extérieur A_e.

De même, le dièdre AC admet les deux plans bissecteurs B_i, B_e ; enfin, le dièdre AB admet les deux plans bissecteurs C_i, C_e.

Nous aurons l'un des centres en prenant le point commun à trois de ces plans bissecteurs, les combinaisons étant formées en choisissant, chaque fois, les trois lettres A, B, C, et en faisant varier les indices *i* et *e*.

Voici un tableau de ces combinaisons, dans lequel on a pris d'abord tous les indices *i*, puis un seul indice *e*, affectant successivement les lettres A, B, C; après, nous avons les combinaisons contenant deux indices *e* et un seul indice *i*, affectant successivement A, B, C, et, enfin, les trois indices *e*.

$A_i \quad B_i \quad C_i,$

$A_e \quad B_i \quad C_i,$
$A_i \quad B_e \quad C_i,$
$A_i \quad B_i \quad C_e,$

$A_i \quad B_e \quad C_e,$
$A_e \quad B_i \quad C_e,$
$A_e \quad B_e \quad C_i,$

$A_e \quad B_e \quad C_e.$

Soit, en tout, huit sphères tangentes aux quatre faces d'un tétraèdre.

312. — Cherchons à nous rendre compte des positions de ces différentes sphères par rapport au tétraèdre, et, pour cela, considérons les différents solides obtenus en prolongeant les faces d'un tétraèdre indéfiniment. Ces solides sont au nombre de quinze.

Le premier est le tétraèdre SABC.

Nous en avons ensuite quatre autres, obtenus en prolongeant trois faces du tétraèdre au delà de la quatrième, soit $SBCS_aB_aC_a$ l'un d'eux (fig. 131). Il existe un pareil solide pour chaque face du tétraèdre. Prenons ensuite les combles obtenus en prolongeant les faces au delà d'une arête comme le comble $SBB_cB_aS_aS_c$.

Ces nouveaux solides sont au nombre de six, puisqu'il y en a un pour chaque arête du tétraèdre. Enfin, nous avons les trièdres obtenus en prolongeant les faces au delà d'un sommet, comme $SS_aS_bS_c$; mais, ces trièdres n'étant limités que par trois des plans, il n'y a pas lieu d'imaginer dans leur intérieur une sphère inscrite.

Nous voyons donc en tout onze solides, à l'intérieur desquels

on conçoit l'existence d'une sphère inscrite; mais nous avons vu qu'il n'y en avait réellement que huit. Cherchons à quoi tient ce résultat et, pour cela, rendons-nous compte des plans bissecteurs qui conviennent pour chaque solide.

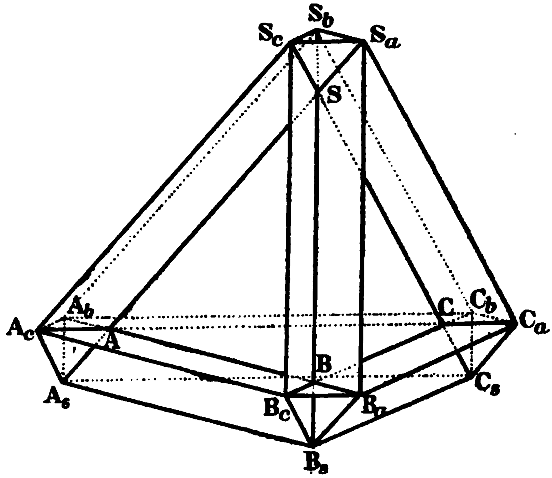


Fig. 131.

Nous dirons d'abord qu'étant donnée une sphère inscrite dans un solide, son centre se trouve dans les plans bissecteurs qui coupent ce solide.

Par conséquent, la combinaison $A_iB_iC_i$ donne la sphère inscrite dans le tétraèdre.

Considérons maintenant le solide $SBCS_aB_aC_a$, obtenu en prolongeant les trois faces issues de A au-delà de la face SBC.

Le dièdre BC qui convient pour ce nouveau solide est adjacent au dièdre BC qui convient pour le tétraèdre, puisque les deux solides sont au-dessus de la face ABC et de part et d'autre de la face SBC. Donc il faut prendre le plan bissecteur extérieur A_e.

Ensuite, le dièdre AC qui convient pour le nouveau solide est le même que le dièdre AC qui convient pour le tétraèdre, puisque les deux solides sont au-dessus du plan ABC et en avant du plan ASC; donc il faut prendre le plan bissecteur B_i. Le même raisonnement s'applique au dièdre AB, de telle sorte qu'en résumé la combinaison $A_eB_iC_i$ donne la sphère exinscrite opposée au sommet A.

De même $A_iB_eC_i$, $A_iB_iC_e$, $A_eB_eC_r$ donneront les sphères exinscrites opposées successivement aux sommets B, C, S.

Considérons maintenant le comble BC.

Le dièdre BC qui convient pour le comble BC est opposé par l'arête au dièdre BC qui convient pour le tétraèdre, car les deux solides sont de part et d'autre de la face ABC et de part et d'autre de la face SBC. Il faut donc prendre le plan bissecteur intérieur A_i. Ensuite, le dièdre AC qui convient pour le comble BC est adjacent au dièdre AC qui convient pour le tétraèdre, puisque les deux solides sont de part et d'autre de la face ABC et en avant de la face ASC. Il faut donc prendre le plan bissecteur extérieur B_e. Le même raisonnement s'applique au dièdre AB; de telle sorte que la sphère cherchée est donnée par la combinaison $A_iB_eC_e$.

En appliquant le même genre de raisonnement au comble opposé AS, nous constaterons qu'il faut prendre la même combinaison de plans bissecteurs A_i, B_e, C_e.

Ainsi donc, cette combinaison ne nous donnera qu'une seule sphère, placée dans l'un ou l'autre des deux combles opposés AS, BC.

Finalement, on aura une sphère inscrite, quatre sphères exinscrites et trois sphères seulement dans les combles.

313. — Le calcul des rayons des sphères permet aussi de reconnaître l'existence seulement de huit sphères tangentes aux quatre faces d'un tétraèdre.

Soit a, b, c, d les aires des quatre faces du tétraèdre et V le volume de ce tétraèdre.

En appelant o le centre de la sphère inscrite, joignons ce centre o aux quatre sommets; on forme ainsi quatre tétraèdres, dont la réunion forme le tétraèdre primitif. D'ailleurs, ces tétraèdres ont pour hauteur commune le rayon de la sphère inscrite; on a donc :

$$V = \frac{r}{3}(a + b + c + d).$$

Et, par suite, le rayon de la sphère inscrite est donné par la relation :

$$r = \frac{3V}{a + b + c + d}.$$

Joignons de même le centre o_a de la sphère exinscrite opposée au sommet A aux quatre sommets. Nous formons encore quatre

tétraèdres; trois d'entre eux réunis donnent le volume total o_aSABC et, en enlevant le quatrième o_aSBC, on retrouve le tétraèdre primitif.

Donc :

$$r_a = \frac{3\,V}{b + c + d - a}.$$

Remarquons qu'il suffit, pour avoir le rayon, de donner le signe moins à l'aire de la face que l'on a traversée.

De même :

$$r_b = \frac{3\,V}{a + c + d - b},$$

$$r_c = \frac{3\,V}{a + b + d - c},$$

$$r_s = \frac{3\,V}{a + b + c - d}.$$

Tous ces rayons sont positifs, car, dans un tétraèdre, une face quelconque est toujours plus petite que la somme des trois autres.

Considérons maintenant la sphère dans le comble BC. Pour passer du centre de la sphère inscrite o à ce nouveau centre o_{bc}, on a dû traverser les faces SBC ou a et ABC ou d. Il faut donc donner le signe moins aux deux termes a et d, et, par suite :

$$r_{bc} = \frac{3\,V}{b + c - a - d}.$$

De même :

$$r_{ca} = \frac{3\,V}{a + c - b - d},$$

$$r_{ab} = \frac{3\,V}{a + b - c - d},$$

$$r_{as} = \frac{3\,V}{a + d - b - c},$$

$$r_{bs} = \frac{3\,V}{b + d - a - c},$$

$$r_{cs} = \frac{3\,V}{c + d - a - b}.$$

Nous reconnaissons donc que les valeurs de r_{bc} et r_{a} sont égales et de signes contraires. Par suite, une seule de ces sphères peut exister.

Lorsque $b + c > a + d$, l'unique sphère correspondant aux deux combles BC, AS se trouve dans le comble BC.

Si, au contraire, $b + c < a + d$, cette sphère se trouve dans le comble AS. Si l'on avait $b + c = a + d$, le rayon de la sphère serait infini, son centre serait rejeté à l'infini, c'est-à-dire que les trois plans bissecteurs qui le déterminent seraient alors parallèles à une même droite.

Ainsi, dans le cas particulier du tétraèdre régulier, où l'on a : $a = b = c = d$, il n'y a en tout que cinq sphères tangentes aux quatre faces du tétraèdre, qui sont la sphère inscrite et les quatre sphères exinscrites ; celles des combles n'existent plus.

D'ailleurs on sait que réciproquement, si $a = b = c = d$, le tétraèdre est régulier ; donc, dans ce cas seulement, les huit sphères se réduisent à cinq.

314. — Épure. — Proposons-nous de trouver la sphère inscrite dans le tétraèdre SABC, défini par sa base dans le plan de comparaison et par son sommet, dont on a la projection S et la cote (8) (fig. 132).

Nous avons à déterminer les plans bissecteurs des dièdres AB, AC, BC et à chercher les intersections de ces plans deux à deux. Comme nous connaissons déjà les traces horizontales de ces trois plans, il suffit de trouver leurs intersections avec un autre plan horizontal quelconque.

Cherchons donc les traces des mêmes plans bissecteurs sur le plan horizontal (8) mené par le sommet. Nous choisissons ce plan horizontal particulier de préférence à un autre, parce qu'il donne lieu à un calcul plus simple.

Ainsi, le plan bissecteur A_i du dièdre BC est coupé par le plan horizontal S (8), suivant une parallèle à BC, à une distance Sa_i du côté de A égale à la longueur de la ligne de plus grande pente Sa du plan SBC, soit $\sqrt{\overline{8}^2 + \overline{2,9}^2} = 8,50$.

En prenant la même longueur dans l'autre sens, on aurait l'horizontale correspondant au plan bissecteur extérieur A_e. On s'en rendra compte en choisissant comme ligne de terre une perpendiculaire sur BC.

De même, le plan B_i est coupé suivant une horizontale parallèle

à AC, à une distance de S du côté de B égale à la longueur de la ligne de plus grande pente Sb, soit $\sqrt{8^2+3^2} = 8,54$.

Enfin, le plan C est coupé suivant une horizontale menée par γ, parallèle à AB, à une distance de S égale à $\sqrt{8^2+1,5^2} = 8,1$.

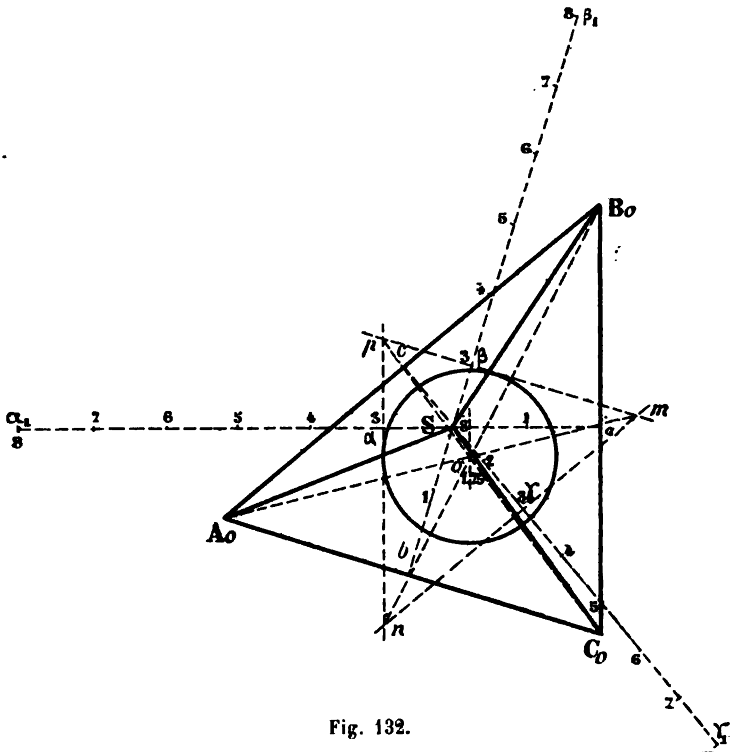


Fig. 132.

Comme les horizontales (8) des trois plans se coupent dans la figure en dehors des limites du dessin, nous avons, après avoir gradué les échelles de pente des trois plans à l'aide de l'échelle de proportions, coupé les trois plans par un autre plan horizontal (3), ce qui donne les horizontales α, β, γ parallèles à BC, AC, AB.

Prenons donc les deux plans B_i, C_i, ils sont coupés par le premier plan horizontal suivant AC, AB, ce qui donne le point A, puis par le plan horizontal (3) suivant β, γ, ce qui donne le point m. Donc mA est l'intersection de ces deux plans. De même Bn et Cp

seront les intersections de A_iC_i et de A_iB_i. Comme vérification, ces trois droites passent par le même point o, centre de similitude des triangles semblables ABC, *mnp*, et ce point o est la projection horizontale du centre cherché. D'ailleurs la cote déterminée à l'aide de l'échelle de proportions en considérant ce point comme appartenant à l'un des plans est (1,75), et c'est en même temps le rayon de la sphère inscrite.

Nous avons figuré dans l'épure le système formé par cette sphère inscrite supposée solide et par le tétraèdre réduit à ses six arêtes.

315. — 2° Méthode de M. Hermary. — Cette méthode utilise la propriété suivante : Étant donnée une sphère tangente aux deux faces d'un dièdre, si l'on rabat les deux faces du dièdre l'une sur l'autre, de façon à écraser la sphère, après le rabattement les deux points de contact coïncident.

Soit donc un tétraèdre SABC, et O, M, N, P les points de contact de la sphère inscrite successivement avec les faces ABC, SAB, SBC, SCA.

Si nous rabattons les faces SAB, SBC, SCA sur le plan ABC, de façon à écraser la sphère inscrite, les points de contact M, N, P se rabattent en O.

Or les longueurs SM, SN, SP sont égales comme tangentes issues du point S à la sphère inscrite, donc il en est de même des longueurs rabattues OS_{ai}, OS_{bi}, OS_{ci}, autrement dit, le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle $S_{ai}S_{bi}S_{ci}$.

Cette façon de procéder conduit comme la précédente à une discussion analogue concernant le nombre des sphères. Il y a lieu, en effet, d'envisager les rabattements intérieurs et extérieurs du point S successivement autour de AB, BC, CA. On doit donc considérer les huit combinaisons suivantes :

S_{ai} S_{bi} S_{ci},

S_{ae} S_{bi} S_{ci},
S_{ai} S_{be} S_{ci},
S_{ai} S_{bi} S_{ce},

S_{ai} S_{be} S_{ce},
S_{ae} S_{bi} S_{ce},
S_{ae} S_{be} S_{ci},

S_{ae} S_{be} S_{ce}.

316. — Épure. — Proposons-nous de trouver la sphère inscrite dans le tétraèdre qui a pour base le triangle ABC dans le plan de comparaison, et pour sommet le point S (7) (fig. 133).

Puisque nous désirons trouver seulement la sphère inscrite, il suffit de chercher les rabattements intérieurs du sommet S autour de AB, BC, CA.

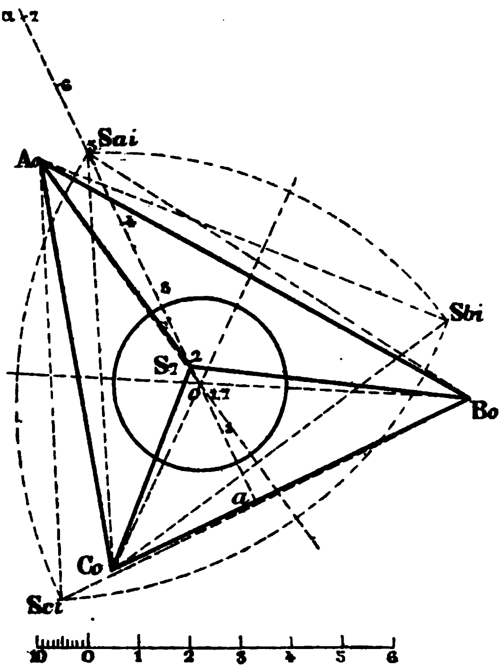


Fig. 133.

Le rabattement de S autour de BC se trouve sur la perpendiculaire Sa à BC, et à une distance aS$_{ai}$ du côté de A égale à :

$$\sqrt{2{,}9^2 + 7^2} = 7{,}57.$$

Connaissant ce premier rabattement de S, on en déduit les autres, car actuellement les dimensions du tétraèdre sont connues.

Ainsi le rabattement S$_{bi}$ de S autour de AC se trouve sur la perpendiculaire Sb à la charnière, à une distance de C égale à

CS_{ai}, car les deux longueurs CS_{ai}, CS_{bi} représentent toutes deux la longueur de l'arête SC.

Enfin, le rabattement S_{ci} de S autour de AB se trouve sur la perpendiculaire abaissée de S sur la charnière AB, puis sur la circonférence décrite de B comme centre avec BS_{ai} pour rayon. Comme vérification, le même point S_{ci} appartient à la circonférence décrite de A comme centre avec AS_{bi} pour rayon.

Finalement, le point de contact *o* de la sphère avec le plan horizontal, c'est-à-dire la projection horizontale du centre de la sphère, c'est le centre du cercle circonscrit au triangle $S_{ai}S_{bi}S_{ci}$.

Il ne reste plus qu'à trouver la cote de ce centre, en le considérant comme appartenant à l'un des plans bissecteurs.

Nous avons choisi le plan A_i dont la trace horizontale est BC et dont l'horizontale (7) dans le plan horizontal mené par le sommet passe par α sur S*a*, à une distance de S égale à la longueur de la ligne de plus grande pente S*a*, soit $aS_{ai} = 7{,}57$.

L'échelle de proportions appliquée à ce point *o* lui donne pour cote (1,7), qui est en même temps le rayon de la sphère inscrite. Ici encore nous avons figuré le système formé par la sphère solide et par le tétraèdre réduit à ses arêtes.

III. — SPHÈRE TANGENTE AUX QUATRE COTÉS D'UN QUADRILATÈRE GAUCHE.

317. — Le centre d'une telle sphère étant équidistant des quatre côtés du quadrilatère gauche, c'est le point commun aux plans bissecteurs des angles du quadrilatère gauche. Nous appellerons plans bissecteurs de l'un de ces angles ABC les plans menés par les bissectrices de l'angle ABC, perpendiculairement au même plan ABC.

Trois de ces plans suffisent pour déterminer le centre. Soit donc le quadrilatère gauche ABCD. L'angle A admet deux plans bissecteurs : l'un d'eux, compris entre les segments de droite AB, AD, sera le plan bissecteur intérieur A_i. L'autre est perpendiculaire sur le premier, nous l'appellerons le plan bissecteur extérieur A_e.

Le nombre des solutions est donc le même que celui des combinaisons des six plans A_i, A_e, B_i, B_e, C_i, C_e, en prenant chaque fois

les trois lettres A, B, C, et faisant varier seulement les indices, comme pour la sphère inscrite dans un tétraèdre.

On a donc les huit solutions suivantes :

$$A_i \quad B_i \quad C_i,$$
$$A_e \quad B_i \quad C_i,$$
$$A_i \quad B_e \quad C_i,$$
$$A_i \quad B_i \quad C_e,$$
$$A_i \quad B_e \quad C_e,$$
$$A_e \quad B_i \quad C_e,$$
$$A_e \quad B_e \quad C_i,$$
$$A_e \quad B_e \quad C_e.$$

Le point commun à l'un de ces huit groupes de plans se trouve dans l'un des plans bissecteurs de l'angle D, soit D_i ou D_e.

Nous allons nous proposer de reconnaître quel plan bissecteur D_i ou D_e il convient d'associer à la combinaison précédente primitivement choisie, et pour cela, au lieu de chercher le centre de la sphère, nous allons déterminer les points de contact.

Soit donc un quadrilatère gauche ABCD ayant deux côtés BC, CD dans le plan horizontal, le quatrième sommet étant donné par sa projection horizontale et sa cote. Complétons le tétraèdre défini par ce quadrilatère gauche, en joignant AC, BD, et rabattons la face ABD sur le plan horizontal autour de BD suivant BA_2D (fig. 134).

La sphère inconnue sera coupée par le plan BCD suivant une circonférence tangente aux deux droites BC, CD, et par la face ABD suivant une autre circonférence dont le rabattement sera également tangent à A_2B, A_2D. De plus, ces deux circonférences admettront comme axe radical la droite BD, car les points de rencontre de cette droite BD avec les deux circonférences sont en même temps les points de rencontre de la même droite avec la sphère.

Si nous appelons m_2npq_2 les quatre points de contact, le problème revient donc à déterminer sur les quatre côtés du quadrilatère A_2BCDA_2 quatre points m_2, n, p, q_2 tels qu'on ait :

$$A_2q_2 = A_2m_2, \quad Bm_2 = Bn, \quad Cn = Cp, \quad Dp = Dq_2.$$

Ces conditions doivent bien être remplies, puisque les segments A_2q_2, A_2m_2 par exemple sont les longueurs des tangentes issues du point A à la même sphère. Les directions des côtés du quadrila-

tère m_2npq_2 sont connues, elles sont parallèles aux bissectrices des angles A_2, B, C, D.

Si le premier point de contact était en a, en menant successivement ab, bc, cd parallèles aux bissectrices des angles A_2, D, C, on aurait en b, c, d les autres points de contact; il faut donc choisir a de telle façon que ad soit parallèle à une bissectrice de l'angle en B.

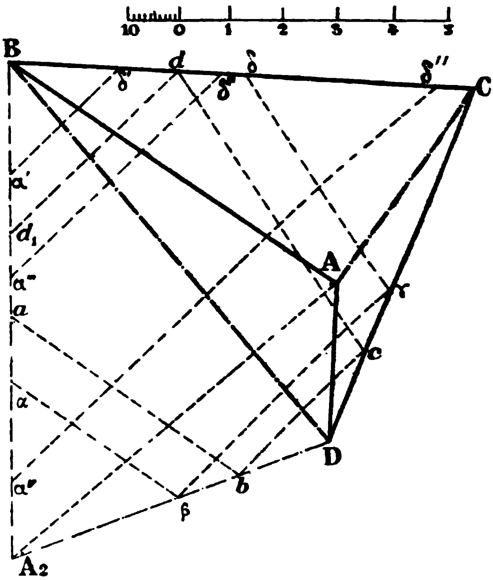


Fig. 131.

De même à α correspondent les points β, γ, δ, et nous remarquons qu'on a $a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta$; les longueurs $a\alpha$, $d\delta$ étant finalement égales et de même sens par rapport à B.

Ceci montre qu'il est impossible de trouver un point de départ α' tel que la droite $\alpha'\delta'$ soit parallèle à la bissectrice extérieure de l'angle A_2BC.

En effet, si nous menons par d la parallèle dd_1 à cette bissectrice et si nous figurons la parallèle $\alpha'\delta'$ à la direction choisie, on a toujours $d_1\alpha' = d\delta'$ et par suite :

$$a\alpha' - d\delta' = ad_1, \text{ quantité constante.}$$

Il en serait de même si, au lieu de $\alpha'\delta'$, on avait pris $\alpha''\delta''$, alors :

$$d\delta'' - a\alpha'' = ad_1, \text{ quantité constante.}$$

Si enfin on choisit $\alpha'''\delta'''$ entre a et d, les segments $a\alpha'''$, $d\delta'''$ ont de sens contraires et ne peuvent plus répondre à la question.

Donc, après avoir choisi la combinaison $A_iB_iC_i$ pour les trois premiers plans, il faut nécessairement prendre D_e pour le quatrième.

Un raisonnement analogue montre que les huit combinaisons les huit plans bissecteurs sont les suivantes :

$$\begin{matrix} A_e & B_i & C_i & D_i, \\ A_i & B_e & C_i & D_i, \\ A_i & B_i & C_e & D_i, \\ A_i & B_i & C_i & D_e, \\ A_i & B_e & C_e & D_e, \\ A_e & B_i & C_e & D_e, \\ A_e & B_e & C_i & D_e, \\ A_e & B_e & C_e & D_i, \end{matrix}$$

qui sont formées par trois plans de même nature, le quatrième étant de nature différente.

On peut aussi arriver au même résultat de la façon suivante : Soit a, b, c, d les points remplissant les conditions données (fig. 134) :

$$A_2a = A_2b, \quad Db = Dc, \quad Cc = Cd, \quad Bd = Ba.$$

Représentons par x les longueurs égales Db, Dc, et par y les longueurs égales Bd, Ba. Enfin, appelons μ, ν, π, ρ les longueurs des côtés A_2D, DC, CB, BA_2.

On a pour déterminer x et y les relations :

$$A_2a = A_2b \quad \text{ou} \quad \rho - y = \mu - x \ (1),$$

et :

$$Cd = Cc \quad \text{ou} \quad \pi - y = \nu - x \ (2).$$

Or, en retranchant ces égalités, membre à membre, on en déduit :

$$\rho - \pi = \mu - \nu \quad \text{ou} \quad \rho + \nu = \pi + \mu.$$

Les équations (1) et (2) sont donc généralement incompatibles, à moins que la condition $\rho + \nu = \pi + \mu$ soit remplie, ce qui n'a généralement pas lieu.

Supposons maintenant que l'on ait choisi trois plans bissecteurs intérieurs et un extérieur (fig. 135).

Soit a_2, b_2, c, d les quatre points de contact remplissant les conditions :

$$A_2a_2 = A_2b_2, \quad Db_2 = Dc, \quad Cc = Cd, \quad Bd = Ba_2.$$

Représentons de plus par x les longueurs égales Db_2, Dc, et

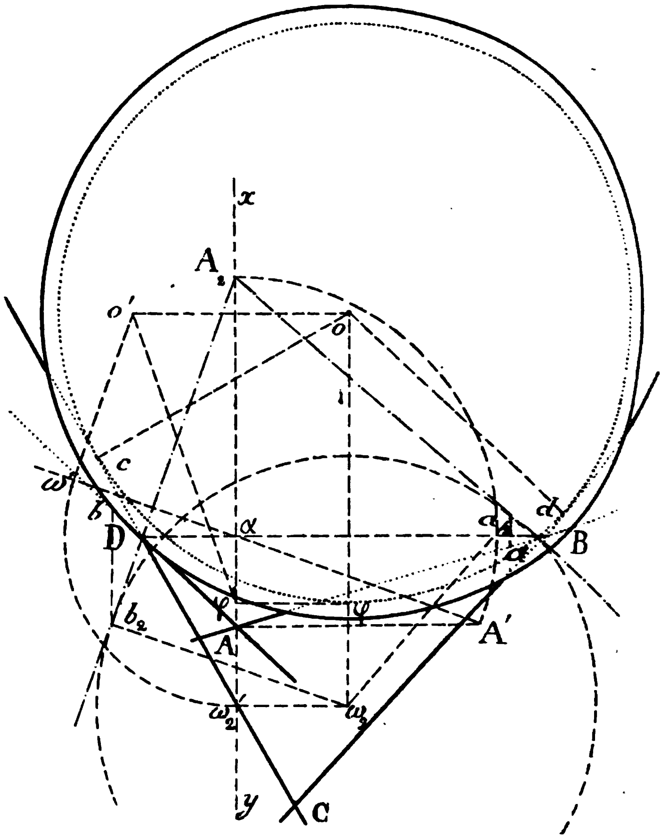


Fig. 135.

par y les longueurs égales Bd, Ba_2. Enfin, appelons toujours μ, ν, π, ρ les longueurs des côtés A_2D, DC, CB, BA_2.

On aura, pour déterminer x et y, les relations :

$$A_2a_2 = A_2b_2 \quad \text{ou} \quad x + \mu = \rho - y \ (3),$$
$$Cc = Cd \quad \text{ou} \quad x + \nu = \pi + y \ (4).$$

De ces égalités (3) et (4) on déduit :

$$x = \frac{\rho + \pi - (\mu + \nu)}{2},$$

et :

$$y = \frac{\rho + \nu - (\mu + \pi)}{2}.$$

Le problème est donc cette fois possible.

Lorsque les valeurs ainsi trouvées sont positives, on les porte dans le sens CD ou A_2B, pour x, et dans le sens BA_2 ou CB, pour y. Si les mêmes valeurs étaient négatives, il faudrait les porter en sens contraire du sens précédent.

Donc, encore une fois, les combinaisons utiles sont composées de trois plans bissecteurs de même nature, le quatrième étant de nature différente.

318. — Épure. — Nous avons rabattu comme précédemment la face ABD, suivant A_2BD, autour de BD sur le plan horizontal.

Puis, au lieu de construire directement les plans bissecteurs, nous avons utilisé les formules que nous venons de trouver :

$$x = \frac{\rho + \pi - (\mu + \nu)}{2} = \frac{AB + CB - (A_2D + CD)}{2};$$

$$y = \frac{\rho + \nu - (\mu + \pi)}{2} = \frac{AB + CD - (A_2D + BC)}{2}.$$

Ces différentes longueurs mesurées numériquement nous ont permis de marquer directement sur l'épure les points de contact a_2, b_2, c, d.

Le centre de la sphère se projette horizontalement au point o, à l'intersection des perpendiculaires sur BC, DC, menées par d et c.

La section par le plan ABD, rabattue sur le plan horizontal, a également pour centre ω_2, à l'intersection des perpendiculaires à A_2B, A_2D, menées par a_2, b_2.

Nous avons pris pour ligne de terre xy la droite A_2A. Cela nous permet de trouver en A'A la cote de A, et suivant A'α la trace verticale du plan ABD.

Le point $\omega_2\omega'_2$ se relève dans le plan ABD en ω'; on a alors

mené par ce point la perpendiculaire sur le plan ABD ; elle coupe la verticale o au centre cherché oo'.

La cote du centre est mesurée par la distance de o' à xy. Enfin, le rayon de la sphère est mesuré par la longueur du rayon de front $o\varphi\ o'\varphi'$; de telle sorte que le contour apparent horizontal de la sphère est la circonférence décrite de o comme centre avec $o'\varphi'$ poûr rayon.

Les points de contact a_2, b_2 sont relevés en a, b sur AB, AD à l'aide de perpendiculaires à la charnière BD.

Pour la ponctuation, on a supposé la sphère solide et le quadrilatère illimité, le plan horizontal étant d'ailleurs opaque.

319. — Remarque. — Nous avons reconnu qu'avec un quadrilatère quelconque A_2BCD (fig. 134), il était impossible de trouver généralement quatre points a, b, c, d, tels que ab, bc, cd, da soient chaque fois perpendiculaires sur les bissectrices intérieures des angles A_2, D, C, B.

Mais, si l'on trouvait un quadrilatère pour lequel ce problème soit possible, ce même problème présenterait alors une infinité de solutions. En effet, en prenant les longueurs $a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta$ dans le même sens par rapport aux sommets, les droites $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$ resteraient bien parallèles à ab, bc, cd, da.

Pour qu'un tel quadrilatère existe, il suffit évidemment que les quatre bissectrices intérieures du quadrilatère dans le rabattement passent par un même point, qui sera le centre d'un cercle inscrit dans le quadrilatère A_2BCD. Ou bien il faut que la somme de deux côtés opposés soit égale à la somme des deux autres.

Cette condition étant remplie, les plans bissecteurs dans l'espace passeront par une même droite, et la combinaison correspondante donnera une infinité de sphères tangentes aux quatre côtés du quadrilatère gauche.

Pour ces sphères particulières, les produits $Ab \times Dc \times Cd \times Ba$, $Aa \times Bd \times Cc \times Db$ sont égaux et de même signe, donc les quatre points de contact dans l'espace sont dans le même plan. La ligne commune Δ aux quatre plans bissecteurs sera perpendiculaire sur ce plan.

Une sphère ayant son centre en un point quelconque de Δ et tangente à l'un des côtés du quadrilatère sera tangente aux trois autres côtés. La plus petite sphère possible tangente à l'un des

côtés du quadrilatère sera aussi la plus petite sphère tangente aux autres côtés du quadrilatère. Soit ω son centre. Ce point sera le pied sur Δ de la perpendiculaire commune à Δ et aux quatre côtés du quadrilatère gauche.

De plus, ces quatre côtés forment évidemment avec Δ le même angle ; donc, comme nous le verrons plus tard, ces quatre droites sont les génératrices d'une même surface gauche de révolution, ayant Δ pour axe et ω pour centre.

CHAPITRE III

I. — SECTION PLANE D'UNE SPHÈRE.

320. — Pour trouver un point quelconque d'une section plane d'une sphère, on peut employer comme surface auxiliaire un plan horizontal quelconque ou encore un plan vertical qui coupe la sphère suivant un petit cercle et le plan sécant suivant une droite dont les points de rencontre sont les points cherchés.

321. — Soit la sphère *o* (5) (fig. 136) et le plan P défini par son échelle.

Pour plus de commodité et pour éviter des calculs, nous avons pris comme plan vertical de projection le plan vertical *xy* parallèle à P et nous avons compté les cotes à partir du plan horizontal (5).

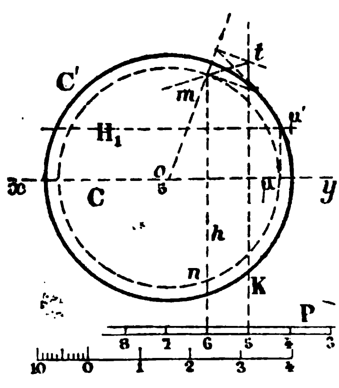


Fig. 136.

Comme plan auxiliaire, nous avons pris le plan horizontal (6) par exemple, dont la trace verticale H_1 est parallèle à *xy* à une distance au-dessus de *xy* égale à l'unité de l'échelle. Ce plan auxiliaire coupe le plan sécant suivant l'horizontale *h* (6) et la sphère suivant un petit cercle de centre *o* passant par le point μμ' où le plan auxiliaire coupe le contour apparent vertical CC' de la sphère. Nous obtenons ainsi en *m*, *n* les deux points de l'intersection dont la cote est (6).

322. — Dans la figure 137, nous avons au contraire pris comme plan auxiliaire un plan vertical *oxy* passant par le centre.

Il coupe la sphère suivant un grand cercle dont la projection verticale C′ coïncide avec le contour apparent horizontal de la sphère, en prenant comme ligne de terre *xy* et en comptant les cotes à partir du plan horizontal (5) mené par le centre. D'ailleurs, le plan auxiliaire coupe aussi l'horizontale *h* (6) du plan sécant en *aa′* et l'horizontale K (5) en *bb′*. Finalement, la droite *aba′b′*, rencontre le grand cercle CC′ aux points *mm′* (7,35), *nn′* (4,55).

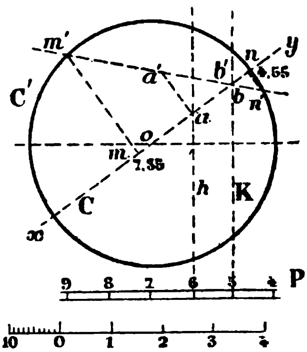


Fig. 137.

On suivrait une marche analogue à celle-ci en prenant comme plan auxiliaire un plan vertical quelconque, avec cette différence que la section dans la sphère par le plan auxiliaire serait un petit cercle quelconque au lieu d'un grand cercle.

323. — **Tangente.** — Proposons-nous, dans la figure 136, de trouver la tangente au point *m* (6). Cette tangente est l'intersection du plan sécant P avec le plan tangent à la sphère au point *m*. Nous connaissons déjà un point de la tangente, c'est le point de contact *m*. Il suffit donc d'en trouver un second ; pour cela, nous coupons le plan tangent et le plan sécant par un plan auxiliaire, par exemple le plan horizontal (5) qui passe par le centre de la sphère.

Le plan sécant est coupé suivant l'horizontale K (5) ; quant au plan tangent, il a pour trace sur le plan du contour apparent la polaire du point *m* par rapport au contour apparent. Ces deux horizontales se coupent au point *t* (5) ; donc *mt* est la tangente cherchée.

II. — DÉTERMINATION DES AXES.

324. — Toute section plane d'une sphère est une circonférence ayant pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan sécant. Les axes de la projection horizontale de la section seront donc les projections horizontales du diamètre horizontal et du diamètre ligne de plus grande pente (213).

Soit la sphère o (4) et le plan P défini par son échelle (fig. 138). Commençons par déterminer les points sur le diamètre ligne de plus grande pente de la section. Ce diamètre se projette horizontalement suivant la parallèle à la ligne de plus grande pente P menée par o, soit oxy. Nous allons donc couper les deux surfaces par le plan vertical oxy que nous choisissons en même temps comme plan vertical de projection.

Le contour apparent vertical de la sphère est le grand cercle

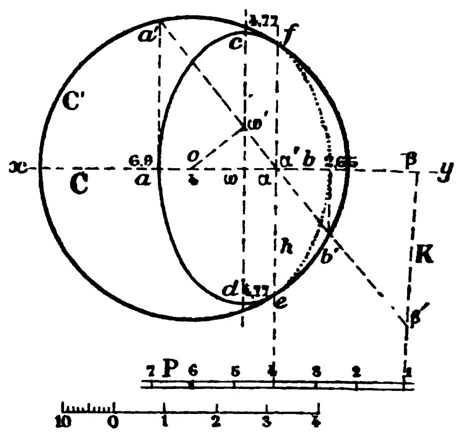


Fig. 138.

CC′. Quant à la trace verticale du plan, c'est $\alpha'\beta'$ obtenue en joignant les traces verticales $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ des horizontales h (4), K (1). Ces deux lignes se rencontrent aux points aa' (6,9), bb' (2,65), qui sont les sommets du petit axe de la projection horizontale.

Le grand axe est perpendiculaire au milieu de ab, et sa longueur cd est égale à $a'b'$. Les deux sommets c et d du grand axe ont pour cote $\frac{6{,}9 + 2{,}65}{2} = 4{,}77$.

325. — Points sur le contour apparent. — Ces points s'obtiennent en coupant la sphère et le plan sécant par le plan horizontal (4) mené par le centre de la sphère. L'horizontale h (4) du plan sécant rencontre le contour apparent horizontal de la sphère aux points demandés e et f. En ces deux points la projection de la courbe est tangente au contour apparent horizontal.

326. — Ponctuation. — La sphère étant supposée conservée tout entière, le point *a*, dont la cote (6,9) est plus grande que la cote (4) du centre de la sphère, est vu en projection horizontale. Donc la courbe est vue aussi dans le voisinage du point *a* jusqu'au premier contour apparent rencontré. Autrement dit, la région *ecadf* au-dessus du plan horizontal mené par le centre est vue, tandis que la région *ebf* est cachée.

III. — INTERSECTION DE DEUX SPHÈRES.

327. — Pour trouver un point de l'intersection de deux sphères, on peut couper ces deux sphères soit par un plan horizontal, soit par un plan vertical. Les deux circonférences ainsi obtenues se coupent en deux points appartenant à l'intersection demandée. Soit les deux sphères A (3), B (5) (fig. 139). Prenons comme plan auxiliaire le plan horizontal (4) par exemple. Le rayon de la section dans la sphère A est un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse le rayon 2,95 de la sphère et pour autre côté de l'angle droit la différence de cotes du plan horizontal (4) et du plan horizontal (3) de la sphère, soit :

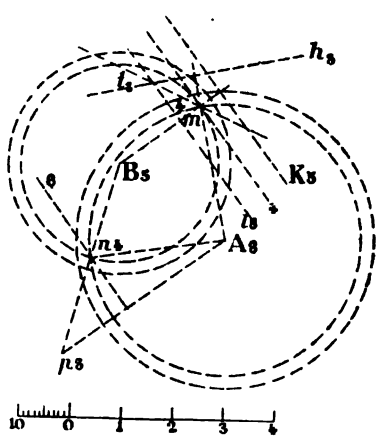


Fig. 139.

$$\sqrt{2,95^2 - 1} = 2,66.$$

De même le rayon de la section dans la sphère B est :

$$\sqrt{2,20^2 - 1} = 1,95.$$

Les deux sections ainsi obtenues se coupent aux points *m* (4), *n* (4).

328. — Pour trouver la tangente, on peut prendre l'intersection des plans tangents, ou mener une perpendiculaire sur le plan des deux normales.

Au point m, nous avons construit les deux plans tangents. Le plan tangent à A a pour trace, sur le plan horizontal du centre, la polaire h du point m par rapport au contour apparent. De même, K, polaire de m par rapport au contour apparent B, est l'horizontale (5) du plan tangent à B. On en déduit l'horizontale l(3), qui rencontre h (3) au point t (3). Donc mt est la tangente.

Au point n, les normales aux deux sphères sont les deux rayons n(4) A(3) et n (4) B (5). Soit p le point de nB de cote (3), pA est alors une horizontale du plan normal, et, par suite, la tangente est perpendiculaire sur pA.

329. — Détermination des axes. — L'intersection de deux sphères est une circonférence dont le plan est perpendiculaire sur la ligne des centres. Cette propriété ramène donc la recherche de l'intersection de deux sphères à celle d'une section plane. Soit les deux sphères A(5), B(7) (fig. 140). Menons une tangente commune aux contours apparents des deux sphères λ, μ, c'est la projection horizontale d'une tangente commune aux deux surfaces, les points λ, μ ayant pour cotes (7) et (5). Le point π, milieu de $\lambda\mu$, appartient au plan radical des deux sphères ; donc, en menant par π une horizontale perpendiculaire sur la ligne des centres, on aura une droite du plan radical.

Remarquons que cette horizontale π peut toujours s'obtenir; c'est, en effet, l'axe radical des contours apparents des deux sphères, et, de plus, sa cote est la demi-somme des cotes des deux centres.

Il ne reste plus, pour avoir le plan de la courbe plane, qu'à mener par π (6) un plan perpendiculaire sur la ligne des centres. Cette droite a pour module $m = 1,9$; le module du plan est donc $m' = \frac{1}{1,9} = 0,52$.

Le centre de la section est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre A sur le plan sécant ; or l'horizontale α (5) du plan sécant est à une distance de A qui vaut 3,5 ; donc la longueur oA est donnée par la relation :

$$oA = \frac{m}{m + m'} \times A\alpha = \frac{1,9}{1,9 + 0,52} \times 3,5 = 2,74.$$

La cote de ce centre par rapport au plan horizontal A (5) est :

$$\sqrt{oA \times o\alpha} = \sqrt{2,74 \times 0,76} = 1,44.$$

La cote véritable du centre est donc $5 + 1,44 = 6,44$.

Cherchons ensuite le sommet du grand axe, à l'aide du plan horizontal mené par le centre de la section. Il coupe la sphère suivant une circonférence dont le rayon est un des côtés de l'angle

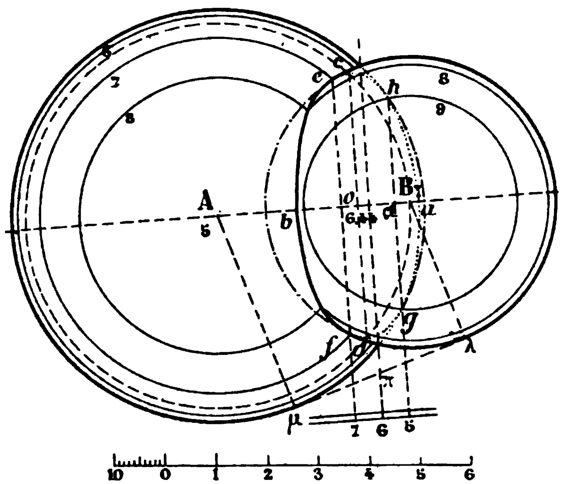


Fig. 140.

droit d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse le rayon de la sphère A, R = 4,05, et pour autre côté la cote relative de *o* par rapport au centre de la même sphère, 1,44. Ce rayon est donc :

$$\sqrt{\overline{4,05}^2 - \overline{1,44}^2} = 3,78.$$

La circonférence décrite de A comme centre avec 3,78 de rayon coupe l'axe horizontal aux sommets *c*, *d*, et nous donne pour rayon de la section $\frac{cd}{2} = 2,6$. Enfin, pour trouver les sommets du petit axe, il reste à porter sur le diamètre ligne de plus grande pente du plan sécant, à partir du centre *o* (6,44), une longueur égale au rayon que nous venons de trouver.

La longueur oa du petit axe est donc donnée par la relation :

$$oa = \rho \times \frac{m'}{\sqrt{1 + m'^2}},$$

dans laquelle ρ est le rayon de la section et m' le module du plan.

On a donc :

$$oa = 2{,}6 \times \frac{0{,}52}{\sqrt{1 + \overline{0{,}52}^2}} = 1{,}2.$$

Donc, en prenant sur AB : $oa = ob = 1{,}2$, on aura les sommets du petit axe.

330. — Points sur les contours apparents. — Ces points se trouvent simplement sur les horizontales (5) et (7) du plan sécant, dans les plans horizontaux menés par les deux centres, ils donnent les limites entre les parties vues et cachées de la courbe sur chacune des sphères.

331. — Ponctuation. — Proposons-nous de représenter le système des deux sphères solides et de même substance. Le point c (6,44) est au-dessus du plan horizontal A (5) et au-dessous du plan horizontal B (7), il est donc vu sur A, mais caché sur B. Il résulte de là que la région ebf est la seule vue sur les deux sphères, le reste est caché. Nous avons ensuite enlevé la portion de contour apparent de chaque sphère à l'intérieur de l'autre sphère. De plus, le contour apparent de B dans la partie conservée aboutissant à deux points vus e, f est vue aussi dans toute la partie conservée. Au contraire, le contour apparent de A, aboutissant à des point cachés g, h, est caché aussi avant d'arriver à ces deux points, à l'intérieur du contour apparent de B.

332. — Cet exemple, que nous avons choisi avec intention, montre bien qu'il n'est pas toujours bon de s'astreindre à l'avance à n'employer jamais que la méthode des plans cotés, car une projection verticale, en prenant AB comme ligne de terre, comme nous l'avons fait pour la section plane, nous aurait conduits beaucoup plus rapidement et plus simplement au résultat.

Autant certaines questions par leur nature même donnent lieu à des constructions simples, en géométrie cotée, autant d'autres deviennent compliquées par cette même méthode.

IV. — POINTS COMMUNS A TROIS SPHÈRES.

333. — Une première méthode pour résoudre cette question consiste à chercher l'axe radical des trois sphères, et à prendre l'intersection de cet axe radical avec l'une des sphères.

L'axe radical des trois sphères est la ligne commune aux plans radicaux des trois sphères prises deux à deux. Rappelons donc, comme nous l'avons vu précédemment, que le plan radical de deux sphères est perpendiculaire sur la ligne des centres et coupe le plan horizontal équidistant des centres suivant l'axe radical des contours apparents horizontaux.

On détermira donc l'intersection de deux de ces plans radicaux et enfin on cherchera l'intersection de cet axe radical avec l'une des sphères, comme nous le verrons plus loin.

334. — On peut aussi, pour trouver les points communs à trois sphères, amener le plan des trois centres à être horizontal à l'aide de deux changements de plan ou deux rotations ou encore un rabattement. Le plan des trois centres étant ainsi rendu horizontal, les intersections des trois sphères deux à deux se projettent horizontalement suivant trois droites qui sont les cordes communes aux contours apparents des trois sphères prises deux à deux. Il ne reste plus qu'à effectuer les opérations inverses pour les points communs, en ayant bien soin de déterminer auparavant leur cote par rapport au plan des trois centres.

335. — **Épure.** — Soit les trois sphères A(5), B(3), C(4) (fig. 141). Commençons par construire une horizontale du plan des trois centres, par exemple celle qui passe par le point B. Elle coupe AC au point *h* (3) de cette droite. C'est autour de cette horizontale B*h* que nous allons effectuer le rabattement.

Prenons donc comme ligne de terre *xy* une perpendiculaire sur la charnière B*h*. Dans ce système, le point A se projette verticalement en A′ à une distance au-dessus de *xy* égale à deux unités de l'échelle du dessin ; quant au point B, il se projette verticalement en B′ sur *xy*, parce que nous comptons les cotes à partir du plan horizontal de ce point B. La trace verticale du plan ABC est donc A′B′. Une rotation autour de la ligne de bout B′, mesurée par l'angle A′B′*x*, amène AA′ en $A_2A'_2$ dans le plan horizontal. Le point

CC' sur Ah se rabat en C_2 sur A_2h; d'ailleurs le point B reste fixe sur la charnière.

Figurons ensuite dans le rabattement les contours apparents des trois sphères, ce sont trois circonférences ayant pour centres les points A_2, C_2, B, et pour rayons les rayons des trois sphères. Les intersections des trois sphères deux à deux se projettent horizon-

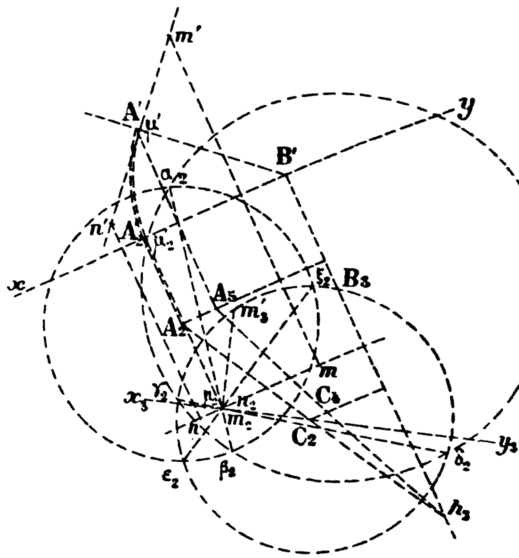


Fig. 141.

talement suivant les trois axes radicaux $\alpha_2\beta_2$, $\gamma_2\delta_2$, $\varepsilon_2\zeta_2$ de ces contours apparents. Les points communs aux trois sphères sont donc rabattus en m_2n_2.

Avant de relever ces deux points, il faut déterminer leur cote par rapport au plan des trois centres. En prenant C_2m_2 comme ligne de terre, le point m_2 se projette verticalement en m'_3 sur le contour apparent vertical de la sphère C.

Pour relever enfin le point $m_2m'_3$, nous relevons d'abord le point $\mu_2\mu'_3$ dans le plan des trois centres en μ', et c'est seulement maintenant que nous menons par μ' une perpendiculaire au plan des trois centres sur laquelle nous prenons la longueur $\mu'm'$ ou $\mu'n'$ égale à la cote $m_2m'_3$. D'ailleurs, en projection horizontale, les points se relèvent sur une perpendiculaire à la charnière Bh menée par m_2n_2.

Finalement, les points communs demandés sont mm', nn'.

r. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE SPHÈRE.

336. — Pour trouver l'intersection d'une droite et d'une phère, on fait passer par la droite une surface auxiliaire, un plan ɪar exemple, dont on détermine l'intersection avec la sphère. On ɪbtient ainsi une circonférence, dont les points de rencontre avec a droite sont les points cherchés. Le choix du plan peut donc lonner lieu à plusieurs procédés différents.

337. — 1er procédé. — Nous choisirons par exemple le plan projetant horizontalement la droite.

Soit donc la sphère O(5) (fig. 142) et la droite A définie par son échelle. Prenons comme plan auxiliaire le plan vertical A qui projette horizontalement la droite. Il coupe la sphère suivant un petit cercle, et, pour le mettre en évidence, prenons comme ligne de terre la droite A. Si nous comptons les cotes à partir du plan horizontal O (5), ce petit cercle a pour projection verticale la circonférence décrite sur $a'b'$ comme diamètre. D'ailleurs les points α (5), β (8) de la droite se projettent verticalement en α' et β'. Nous trouvons donc comme points d'intersection les points $m'm$ (7,6), $n'n$ (3,85).

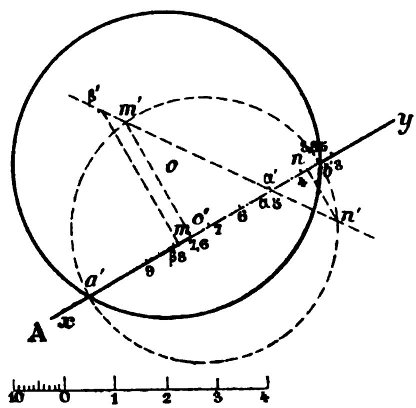


Fig. 142.

338. — 2^{e} procédé. — Dans ce deuxième procédé, nous prendrons comme plan auxiliaire le plan passant par la droite et par le centre de la sphère, il coupe la sphère suivant un grand cercle que nous mettrons en évidence, en le rabattant sur le plan horizontal mené par le centre de la sphère suivant le contour apparent horizontal de la sphère. Il ne reste donc plus qu'à rabattre la droite.

L'horizontale autour de laquelle se fait le rabattement passe par le centre o (4) (fig. 143) et le point α(4) de la droite A.

Le rabattement du point β (7) de A se fait sur une perpendiculaire βω de la charnière, à une distance de la charnière :

$$\beta_2\omega = \sqrt{\overline{\beta\omega}^2 + \overline{3}^2} = \sqrt{\overline{1,02}^2 + \overline{3}^2} = 3,16.$$

La droite est donc rabattue suivant $\alpha\beta_2$ qui rencontre le rabat-

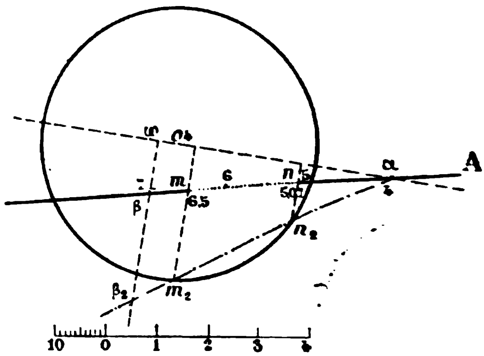


Fig. 143.

tement du grand cercle en m_2n_2. Enfin, ces deux points se relèvent en *m* (6,5) et *n* (5,07) sur A.

339. — Ponctuation. — Dans le premier exemple (fig. 142), on a figuré le système formé par la droite illimitée et la sphère solide de même substance que la droite. La région de la droite m à l'intérieur de la sphère est donc enlevée. Le point *m* de cote (7,6) est au-dessus du plan horizontal mené par le centre, il est donc vu, et par suite la région *βa'* jusqu'à l'infini de la droite est vue. Au contraire, le point *n* (3,85) est caché, et par suite, dans la région *nb'*, la droite est cachée pour redevenir vue en dehors du contour apparent de la sphère.

Dans le deuxième exemple (fig. 143), nous avons supposé la droite de substance différente de la sphère, dans ces conditions elle existe matériellement à l'intérieur de la sphère; mais, dans cette région, elle est cachée. D'ailleurs, les deux points d'intersection *m* et *n* étant vus, puisque leurs cotes (6,5) et (5,07) sont plus grandes que celles du centre *o* (4), il en résulte que la région de la droite en dehors des points *m* et *n* est vue tout entière.

CHAPITRE IV

I. — COURBE DE CONTACT D'UN CONE OU D'UN CYLINDRE CIRCONSCRIT A UNE SPHÈRE.

340. — Pour trouver un point de la courbe de contact d'un cône ou d'un cylindre circonscrit à une sphère, il suffit de mener par le sommet du cône ou parallèlement aux génératrices du cylindre un plan tangent à la surface, en assujettissant le point de contact à se trouver sur un parallèle ou sur un méridien donné, comme nous l'avons fait dans le cas d'une surface de révolution quelconque. Il ne nous reste plus qu'à déterminer les éléments de la courbe.

Or la courbe de contact d'un cône circonscrit à une sphère est une courbe plane, dont le plan est perpendiculaire sur l'axe du cône, c'est-à-dire sur la droite qui joint le sommet du cône au centre de la sphère. Nous sommes ainsi ramenés à la recherche d'une section plane, ce qui nous permettra de trouver les sommets.

Lorsqu'on veut employer le procédé numérique, on commence par mener par S (fig. 144) des tangentes au contour apparent horizontal de la sphère, S*e*, S*f*. Les points *e* et *f* ainsi obtenus sont les points de rencontre de la courbe de contact avec le contour apparent horizontal de la sphère.

Il en résulte que la droite *ef*, polaire de S par rapport au contour apparent de la sphère, est une horizontale du plan de la courbe de contact contenue dans le plan horizontal mené par le centre de la sphère *o* (3).

D'ailleurs, le module de ce plan est l'inverse de celui de la droite *o* (3) S (9), et en même temps changé de signe. Il resterait donc à effectuer toutes les opérations que nous avons indiquées à propos des sections planes. Mais, ces opérations étant trop longues,

nous préférons ici prendre un plan **vertical**, en choisissant comme ligne de terre la droite oS.

Si nous comptons les cotes à partir du plan horizontal mené par le centre de la sphère, le point S se projette verticalement en s' à une distance Ss' au-dessus de xy égale à 6. L'axe du cône est alors la ligne de front oSo'S'. Le plan de la courbe de contact est donc de bout, et il a pour trace verticale la droite $a'b'$ passant par les points de la courbe de contact sur le contour apparent de la sphère.

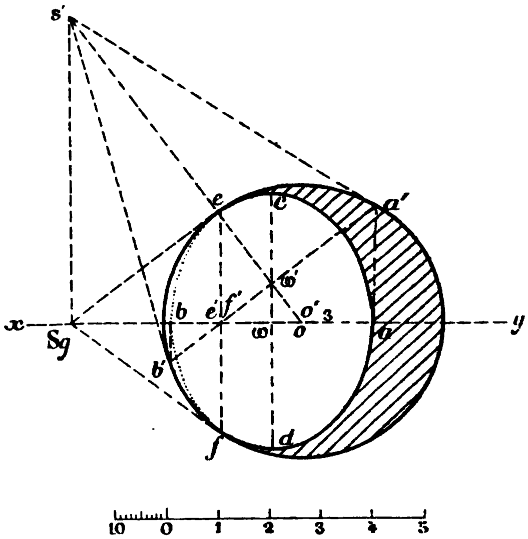


Fig. 144.

Les points a', b' se projettent horizontalement sur xy et donnent en a, b les sommets du petit axe.

Le centre est le milieu de $aba'b'$, soit $\omega\omega'$; quant aux deux sommets du grand axe, ils sont sur $\omega\omega'$, à des distances ωc, ωd égales à $\omega' a'$.

Nous retrouvons de cette façon les points sur le contour apparent horizontal de la sphère, en coupant cette sphère et le plan de la courbe par le plan horizontal o', ce qui donne la ligne de bout $e'f'$ et, par suite, les deux points e et f.

341. — Ponctuation. — Le point a, étant au-dessus du plan horizontal mené par le centre de la sphère, est vu en pro-

jection horizontale et, par suite, la région *ecadf* est vue, tandis que la région *ebf* est cachée.

Si le point S est considéré comme un point lumineux, la courbe de contact *acbefd* constitue le contour de l'ombre propre de la sphère. Cette ombre propre partage la surface de la sphère en deux régions : l'une d'elles du côté du point lumineux, et qui est éclairée, l'autre, opposée au point lumineux ; cette dernière est dans l'ombre. Nous avons rempli avec des hachures parallèles la région vue de l'ombre propre et, pour ne pas avoir à déterminer l'ombre portée sur le plan horizontal, nous avons supposé le plan horizontal transparent.

342. — Cas du cylindre. — Dans le cas d'un cylindre circonscrit, les constructions se simplifient légèrement, parce qu'alors la courbe de contact est un grand cercle dont le plan est perpendiculaire sur les génératrices du cylindre et mené par le centre.

Soit la sphère O(5) de rayon (3) et D la direction des généra-

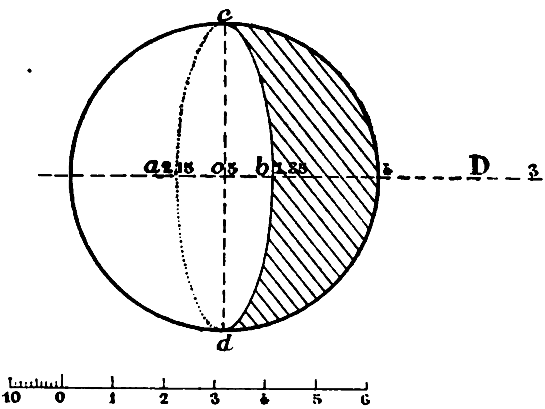


Fig. 145.

trices du cylindre, dont la pente est $\frac{1}{3}$ (fig. 145). Le plan de la courbe de contact a pour trace sur le plan horizontal du centre la perpendiculaire à D menée par *o*, ce qui donne en *c* et *d* les sommets du grand axe. Le module du plan est aussi $\frac{1}{3}$. Donc les

sommets du petit axe s'obtiennent en prenant les longueurs:

$$oa = ob = \mathrm{R}\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1+(\frac{1}{3})^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0{,}95.$$

Ces deux sommets ont pour cotes : $a=(2,15)$, $b=(7,85)$, en supposant que les génératrices du cylindre soient dirigées en descendant dans le sens *ab*.

La région *bcd*, étant au-dessus du plan horizontal (5), est vue en projection horizontale, tandis que la région *cad* est cachée. Enfin, en supposant la source lumineuse du côté de *a*, la région opposée est dans l'ombre; nous avons rempli avec des hachures la région vue de cette ombre.

II. — PLAN TANGENT PAR UNE DROITE A UNE SPHÈRE.

343. — Pour mener par une droite un plan tangent à une surface quelconque et, en particulier, à une sphère, on circonscrit à la surface un cône ayant pour sommet un point de la droite; puis par la droite on mène un plan tangent à ce cône.

Le choix du sommet du cône peut donner lieu à différents procédés pour résoudre la question.

344. — **1er procédé.** — Nous prendrons, par exemple, comme sommet de cône, le point de rencontre de la droite avec le plan horizontal mené par le centre *o* (5), soit S (5) ce point (fig. 146).

La courbe de contact que nous avons l'intention de choisir comme base se projette horizontalement suivant la polaire *ab* de S par rapport au contour apparent de la sphère. Pour mettre cette base en évidence, nous avons choisi comme ligne de terre *xy* la droite *ab*, en comptant les cotes à partir du plan horizontal (5). Alors la base du cône se projette verticalement, suivant la circonférence décrite sur *ab* comme diamètre.

Pour mener maintenant par la droite A un plan tangent au cône ainsi défini, nous cherchons la trace σ(7,42) de la droite sur le plan de base, et nous menons par ce point des tangentes à la base. Comme cette base est définie dans un système auxiliaire, il

faut aussi projeter le point σ (7,42) dans le même système en σ'. Nous menons donc les tangentes $\sigma'm'\sigma m$, $\sigma'n'\sigma n$, ce qui donne en $m'm$, $n'n$ les deux points de contact. Les cotes de ces deux points sont respectivement $mm' = 7,85$, $nn' = 4,5$.

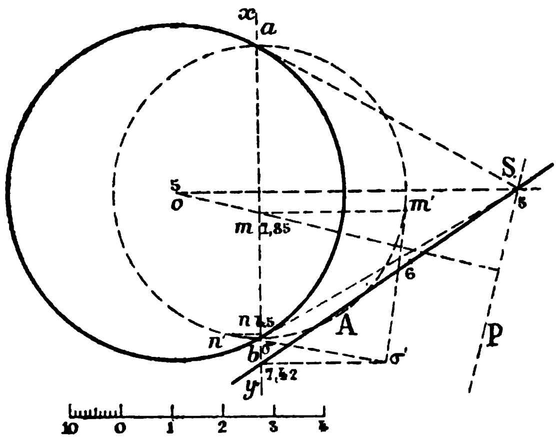


Fig. 146.

Le plan tangent est défini par la droite donnée A et par le point de contact m (7,85). Il est facile de trouver immédiatement la direction de ses horizontales, car elle est perpendiculaire sur om; par exemple, la droite P perpendiculaire sur om, menée par S, est l'horizontale (5) du plan tangent.

345. — 2[e] procédé. — Dans ce deuxième procédé, nous choisirons comme sommet du cône le point à l'infini sur la droite; autrement dit, nous allons circonscrire à la sphère un cylindre parallèle à la droite donnée.

La courbe de contact que nous avons encore l'intention de choisir comme base est un grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite et mené par le centre de la sphère.

Pour le mettre en évidence, nous le rabattrons sur le plan horizontal du centre, suivant le contour apparent de la sphère.

Soit la sphère o (4) et la droite A (fig. 147). Cette droite a pour module $m = 1,5$. Le plan perpendiculaire mené par le centre a pour module $m' = \frac{1}{1,5} = 0,66$, il est de plus défini par l'horizontale $o\alpha$ (4) perpendiculaire sur A.

Le plan du grand cercle de contact coupe la droite A au point σ défini par la relation :

$$\sigma\alpha = \alpha h \frac{m'}{m + m'} = \frac{5{,}05 \times 0{,}66}{2{,}16} = 1{,}54.$$

Nous devons mener par le point σ des tangentes à la base du cylindre ; mais, comme cette base est définie par son rabattement,

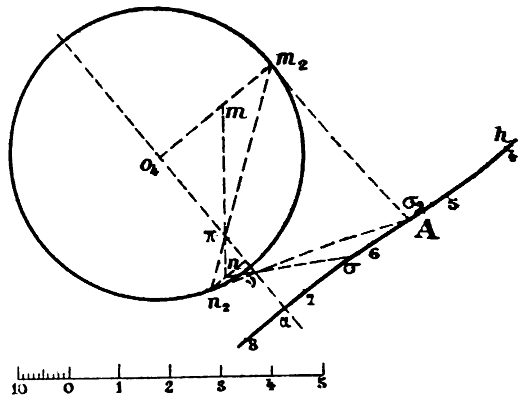


Fig. 147.

il faut aussi rabattre le point σ en σ_2 sur αh, à une distance σ_2 de α donnée par la relation :

$$\sigma_2\alpha = \sqrt{\alpha\sigma \times \alpha h} = \sqrt{1{,}54 \times 5{,}05} = 2{,}78.$$

Les tangentes rabattues sont donc $\sigma_2 m_2$, $\sigma_2 n_2$. Cette dernière se relève suivant $\sigma\nu n$, à l'aide du point fixe ν. Quant au point de contact m_2, on l'a relevé à l'aide de la droite $m_2 n_2$, dont le relèvement passe par n et par le point fixe π.

346. — 3e procédé. — On peut aussi, pour mener par une droite un plan tangent à une sphère, circonscrire à la surface deux cônes, ayant pour sommets deux points de la droite. Les deux courbes de contact se rencontrent en deux points, qui sont les points cherchés.

Les plans des deux courbes de contact se coupent suivant une droite qui est fixe, quels que soient les sommets de cônes que l'on a choisis sur la droite donnée. Cette droite fixe s'appelle la

polaire conjuguée de la droite donnée par rapport à la sphère; elle est le lieu des pôles de la droite donnée par rapport à toutes les sections de la sphère par des plans passant par cette même droite.

La considération de cette polaire conjuguée permet donc de ramener le problème du plan tangent par une droite au problème intersection avec une droite et réciproquement. Il nous

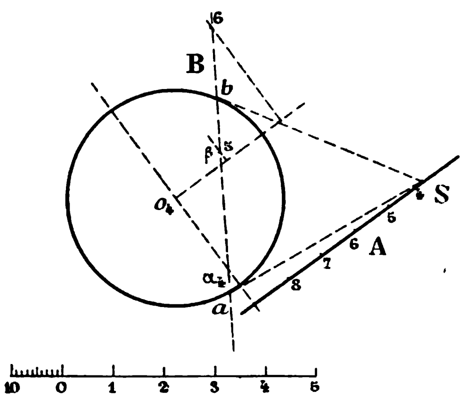


Fig. 148.

reste à montrer dans un exemple la construction de cette polaire conjuguée.

Soit la sphère o (4) et la droite A (fig. 148). Nous devons prendre les plans polaires de deux points de la droite. Ces points peuvent être pris arbitrairement; mais il est avantageux de prendre comme premier point celui de A, qui est dans le plan horizontal (4) mené par le centre de la sphère, soit le point S (4). Le plan polaire de ce point est vertical, et il a pour trace horizontale ab, la polaire de S par rapport au contour apparent horizontal de la sphère.

Prenons ensuite comme deuxième point le point à l'infini sur la droite A. Le plan polaire correspondant est le plan perpendiculaire à la droite mené par le centre o de la sphère. Le module de A étant 0,8, celui de ce plan est $\frac{1}{0,8} = 1,25$.

La polaire conjuguée de A est donc l'intersection des deux plans, sa projection horizontale est B et l'on a son échelle à l'aide de ses

points de rencontre α (4), β (5) avec les horizontales à cote ronde du second plan.

En résumé, les points de contact des plans tangents menés par A sont les points de rencontre de B avec la sphère.

Nous indiquerons plus loin, à propos des sections antiparallèles du cône à base circulaire, un autre procédé intéressant pour résoudre ces deux questions d'intersection et de plan tangent par une droite.

III. — PLANS TANGENTS COMMUNS A DEUX SPHÈRES.

347. — Les rayons aboutissant aux deux points de contact d'un plan tangent commun à deux sphères, étant perpendiculaires sur le plan tangent commun, sont parallèles entre eux, donc la droite qui joint les deux points de contact passe par l'un des centres de similitude des deux sphères, et par suite il en est de même du plan tangent commun.

Il résulte de là que tous les plans tangents communs à deux sphères enveloppent un même cône de révolution, qui a pour sommet l'un des centres de similitude et qui est circonscrit simultanément aux deux sphères. Le contour apparent de ce cône se composera des tangentes communes aux contours apparents des deux sphères. On en déduit que les centres de similitude de deux sphères se projettent au centre de similitude des contours apparents en projection des deux sphères.

348. — **1er problème.** — *Mener par un point un plan tangent commun à deux sphères.*

On joindra par une ligne droite le point donné à l'un des centres de similitude des deux sphères, puis on mènera par cette droite un plan tangent à l'une des sphères.

Le point de contact sur la seconde sphère est homologue du premier par rapport au centre de similitude qu'on a choisi.

Ce dernier problème présente deux solutions ; mais, comme il y a deux centres de similitude, le problème présentera en tout quatre solutions.

Lorsque le centre de similitude direct est en dehors des limites de l'épure, la construction est en défaut ; voici alors comment on procède pour arriver au résultat :

On remarque que tous les plans tangents à une sphère passant

par un point S sont aussi tangents à toutes les sphères inscrites dans le cône circonscrit à la première sphère et ayant pour sommet le point S.

On peut donc substituer aux sphères proposées A et B deux autres sphères inscrites dans les deux cônes circonscrits à A et B, et ayant pour sommet commun S.

On profite de cette propriété pour substituer aux deux sphères deux nouvelles sphères égales entre elles. Pour celles-ci, le centre de similitude direct sera à l'infini. Quant au centre de similitude inverse, il se trouve au milieu de la ligne des centres.

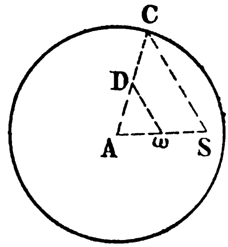


Fig. 149.

D'ailleurs, étant donné un cône de sommet S circonscrit à une sphère A, pour inscrire dans ce cône une sphère de rayon connu (fig. 149), il suffit de porter sur un rayon quelconque du contour apparent de A une longueur CD égale au rayon de la sphère donnée. On mène ensuite par D une parallèle à la génératrice SC qui coupe l'axe SA au point ω, centre de la sphère cherchée.

Ce problème présente deux solutions, ω, ω_1, symétriques par rapport à S.

349. — 2e problème. — *Mener à deux sphères un plan tangent commun parallèle à une droite.*

On détermine comme précédemment l'un des centres de similitude des deux sphères, puis on mène par ce point une parallèle à la droite donnée; en menant par cette droite un plan tangent à l'une des sphères, on a le plan tangent commun. Le problème présente encore quatre solutions, puisqu'il y a deux centres de similitude et que chacun d'eux donne lieu à deux plans tangents.

Si le centre de similitude direct se trouve en dehors des limites de l'épure, on transforme la construction de la manière suivante :

On circonscrit aux deux sphères deux cylindres parallèles à la direction donnée, puis on mène à ces deux cylindres un plan tangent commun.

Soit par exemple les deux sphères *a* (3), *b* (8) et la direction D (fig. 150).

Considérons les deux cylindres circonscrits à a et b parallèles à D, et coupons-les par un même plan perpendiculaire aux axes passant par a (3) par exemple. La droite D ayant pour module $m = 0,8$, ce plan a pour module $m' \frac{1}{0,8} = 1,25$, il coupe l'axe du cylindre circonscrit à b, soit b (8) α (3), au point ω donné par la relation :

$$\omega\beta = \alpha\beta \times \frac{m'}{m + m'} = \frac{7,8 \times 1,25}{2,05} = 4,75.$$

Rabattons ensuite ce plan sur le plan horizontal (3) autour de l'horizontale $o\beta$. Le point a est fixe ; quant au point ω, il se rabat

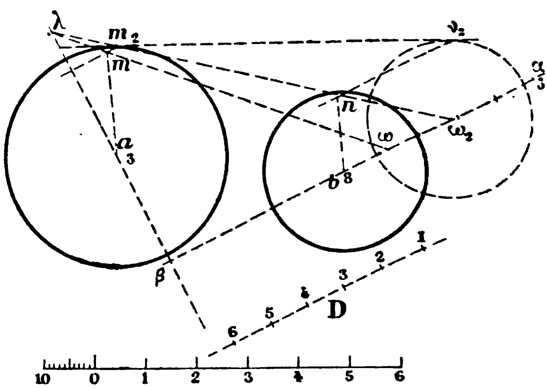


Fig. 150.

en ω_2 sur $\omega\beta\alpha$, la distance $\omega_2\beta$ étant moyenne proportionnelle entre $\omega\beta$ et $\alpha\beta$:

$$\omega_2\beta = \sqrt{4,75 \times 7,8} = 6,08.$$

Les bases des deux cylindres, après le rabattement, sont donc la circonférence décrite de a comme centre avec le rayon de la sphère a pour rayon, puis la circonférence décrite de ω_2 comme centre avec le rayon de la sphère b pour rayon.

Menons ensuite une tangente commune $m_2\nu_2$ aux deux bases rabattues. Les génératrices de contact des deux cylindres sont les parallèles à D menées par m_2, ν_2.

Le point de contact m_2 a été relevé à l'aide de $\omega_2 m_2 \lambda$, qui se relève suivant $\omega\lambda$. Le point de contact sur la sphère a est donc m.

Enfin le point de contact sur la sphère b se trouve sur le rayon parallèle à am, puis sur la génératrice ν_2 du second cylindre.

IV. — PLANS TANGENTS COMMUNS A TROIS SPHÈRES.

350. — Les plans tangents communs à trois sphères passent par les centres de similitude de ces trois sphères prises deux à deux. Ces centres de similitude sont au nombre de six par groupes de trois sur quatre droites. Les trois centres de similitude directe sont en ligne droite, et chaque centre de similitude directe est en ligne droite avec deux centres de similitude inverse.

Si par l'une de ces quatre droites on mène un plan tangent à l'une des sphères, on aura un plan tangent commun. Le problème présente donc en tout huit solutions.

Voyons comment on procède lorsque les centres de similitude directe sont en dehors des limites de l'épure.

Soit a, b, c (fig. 151) les trois sphères nommées dans leur ordre de grandeur. Le plan tangent inconnu sera tangent au cône circonscrit aux deux sphères a et c, et par suite il sera également

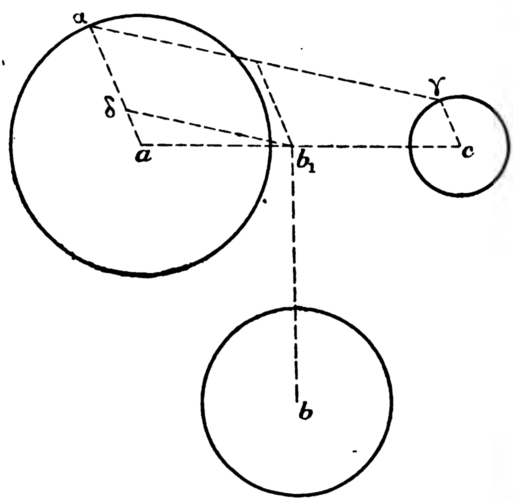


Fig. 151.

tangent à toutes les sphères inscrites dans ce cône. On profite de cette remarque pour remplacer l'une des sphères a ou c par une sphère égale à la sphère moyenne b.

Pour obtenir son centre, figurons les rayons parallèles $a\alpha$, $c\gamma$ et joignons $\alpha\gamma$.

Prenons ensuite la longueur $\alpha\delta$ égale au rayon de la sphère b, et menons δb_1 parallèle à $\alpha\gamma$. Le point b_1 est le centre d'une sphère égale à la sphère b et tangente au plan inconnu.

Il résulte de là que l'un des plans tangents communs est parallèle à bb_1, de telle sorte qu'on est ramené au problème précédent: mener à deux des sphères un plan tangent commun parallèle à la droite bb_1.

351. — Le problème précédent, plans tangents communs à trois sphères, peut encore se résoudre simplement en amenant le plan des centres à être horizontal.

Soit les trois sphères $a(2,5)$, $b(6)$, $c(4)$ (fig. 152). Rabattons le plan des trois centres sur le plan horizontal (4), autour de l'ho-

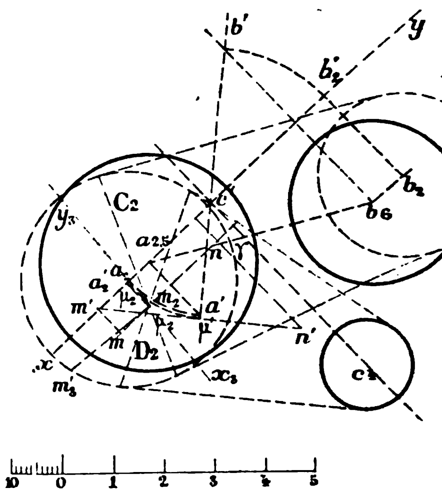


Fig. 152.

rizontale $c\gamma$ passant par le centre $c(4)$ et par le point $\gamma(4)$ de la droite ab.

Nous avons pris pour ligne de terre xy une perpendiculaire sur la charnière, et nous avons compté les cotes à partir du plan horizontal (4). Les trois centres se projettent verticalement en a', b', c' sur la trace verticale du plan $a'b'c'$. Une rotation autour de la

ligne de bout c' mesurée par l'angle $b'c'y$ amène ces trois centres en a'_2a_2, $b'_2b'_2$, cc' dans le plan horizontal.

Le cône circonscrit aux deux sphères a_2, b_2, ayant pour sommet le centre de similitude direct, touche la sphère a_2 suivant un parallèle dont la projection horizontale est C_2. De même, le cône circonscrit aux deux sphères a_2, c, ayant pour sommet le centre de similitude direct, touche la sphère a_2 suivant un parallèle dont la projection horizontale est D_2.

Ces deux parallèles se coupent en m_2, qui représente dans le rabattement la projection horizontale du point de contact sur la sphère a_2. La cote actuelle de ce point est mesurée par $m_2m'_3$, qui a été obtenue en prenant comme ligne de terre x_3y_3 la droite a_2m_2.

Il reste maintenant à relever les deux points ainsi définis. Nous commençons pour cela par relever $\mu_2\mu'_2$ en μ', et c'est seulement maintenant que nous menons par $\mu\mu'$ une perpendiculaire sur le plan abc, sur laquelle nous prenons $\mu'm' = \mu'n' = m_2m'_3$.

Les points ainsi obtenus se projettent horizontalement en m, n, sur la parallèle à xy menée par μ_2.

Les points de contact sur les sphères b et c seront les points homologues des précédents.

CHAPITRE V

I. — PLAN PASSANT PAR UNE DROITE ET FAISANT UN ANGLE CONNU AVEC UN PLAN OU UNE DROITE.

352. — Le plan inconnu sera tangent à un cône de révolution ayant pour sommet S, un point de la droite A, pour axe une perpendiculaire sur le plan P ou une parallèle à la droite B et pour demi-angle au sommet le complément de l'angle avec le plan P ou l'angle avec B.

Pour mener par A un plan tangent au cône ainsi défini, on peut se servir d'une base de ce cône dans un plan perpendiculaire à l'axe, comme nous l'avons déjà fait à propos des plans tangents aux cônes et aux cylindres, ou encore on peut substituer à ce cône une sphère inscrite.

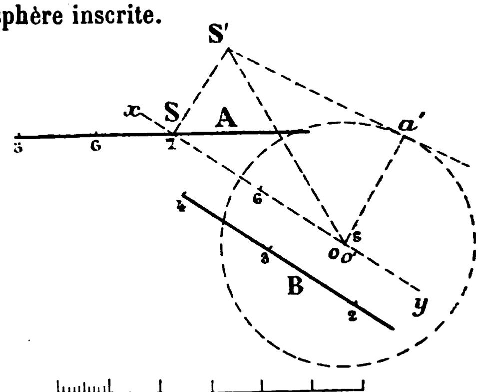


Fig. 153.

Nous allons nous proposer de déterminer cette sphère :

Soit A, B les deux droites données (fig. 153). Nous choisissons sur A un point arbitraire S (7) que nous prenons comme sommet d'un cône de révolution ayant son axe xSy parallèle à B. Prenons

cette droite comme ligne de terre en comptant les cotes à partir du plan horizontal o(5). Dans ce système, l'axe du cône est la ligne de front $SoS'o'$. Le plan vertical coupe le cône suivant la génératrice principale $S'a'$ telle que l'angle $a'S'o'$ soit égal à l'angle connu.

La sphère inscrite dans le cône ayant pour centre oo' a pour rayon la distance $o'a'$ de ce point à la génératrice principale du cône $S'a'$. Le problème primitif est donc ramené au suivant que nous avons déjà traité : mener par A un plan tangent à la sphère de centre o (5) ayant pour rayon $o'a'$.

353. — 1er cas particulier. — Le plan donné est horizontal, ou la droite B est verticale. Ici il est préférable de conserver le cône dont la base dans un plan horizontal est une circonférence. Soit la droite Sh, par laquelle nous nous proposons de mener un plan faisant avec le plan horizontal un angle de 72 degrés, par exemple (fig. 154). Le plan inconnu est tangent au cône de révo-

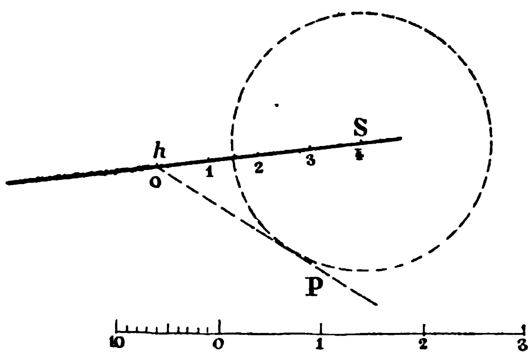


Fig. 154.

lution à axe vertical, ayant pour sommet S (4). Une génératrice de ce cône doit faire avec le plan horizontal l'angle de 72 degrés, donc son module est : $\text{tang}\,(90° - 72°) = \text{tang}\,18° = 0{,}32$.

La base du cône est donc dans le plan horizontal une circonférence de centre S, ayant pour rayon $4 \times 0{,}32 = 1{,}28$. Il ne reste plus qu'à mener par h, trace horizontale de Sh, une tangente à cette circonférence ; on a ainsi suivant hP la trace horizontale du plan demandé.

Nous avons donné à la fin du volume, comme application de ce cas, les exercices du tas de sable, du saillant de fortification et de la plate-forme avec rampe.

354. — 2e cas particulier. — Le plan donné P est vertical (fig. 155). Nous choisissons sur la droite A un point arbitraire S (3). et nous le prenons comme sommet d'un cône de révolution ayant son axe Sb perpendiculaire sur le plan P. Cet axe est donc ici horizontal. Le plan horizontal mené par l'axe coupe le cône suivant la génératrice principale Sa qui fait avec l'axe l'angle connu aSb, complément de l'angle du plan cherché avec le plan PS'ax.

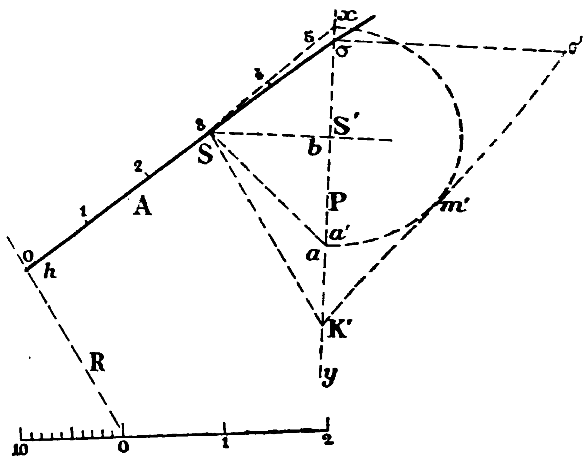


Fig. 155.

Si nous prenons comme ligne de terre xy perpendiculaire sur Sb, dans ce système, la base du cône est dans le plan vertical la circonférence décrite de S' comme centre avec S'a' pour rayon.

Pour mener enfin par A un plan tangent au cône ainsi défini, nous déterminons la trace $\sigma\sigma'$ de la droite sur le plan de base et nous menons par ce point une tangente $\sigma' m'$K' à la base.

La trace de ce plan tangent sur le plan horizontal (3) est SK', sa trace horizontale est une parallèle à SK' menée par h, soit R.

II. — MENER PAR UN POINT UN PLAN FAISANT AVEC DEUX PLANS DONNÉS DES ANGLES DONNÉS.

355. — Le plan inconnu sera tangent à deux cônes de révolution ayant pour sommet commun le point donné, pour axes des

perpendiculaires aux deux plans donnés, et pour demi-angle au sommet les compléments des angles donnés.

Après avoir défini ces deux cônes, nous leur substituerons deux sphères inscrites, de préférence des sphères égales, et il suffira de mener à ces deux sphères un plan tangent commun passant par le point donné.

On procéderait de la même manière, si le plan inconnu devait faire avec deux droites des angles donnés.

III. — PLAN TANGENT A UN CONE FAISANT AVEC UN PLAN UN ANGLE DONNÉ.

356. — Le plan inconnu sera tangent à un cône de révolution ayant pour sommet le sommet du cône proposé, pour axe une perpendiculaire sur le plan connu, et pour demi-angle au sommet le complément de l'angle donné.

Il suffira donc de mener un plan tangent commun au cône donné et à ce cône de révolution.

Si, au lieu du cône primitif, on avait un cylindre, on mènerait au cône de révolution un plan tangent parallèle aux génératrices du cylindre, puis au cylindre un plan tangent parallèle au plan ainsi obtenu.

IV. — PLAN TANGENT A UNE SPHÈRE FAISANT UN ANGLE DONNÉ AVEC UN PLAN DONNÉ.

357. — Le plan inconnu sera aussi tangent à un cône de révolution circonscrit à la sphère, ayant son axe perpendiculaire sur le plan donné, et pour demi-angle au sommet le complément de l'angle donné.

Le plan inconnu passera donc par le sommet du cône, ou bien encore son point de contact se trouvera dans le plan polaire du sommet du cône par rapport à la sphère.

Proposons-nous de déterminer le sommet du cône et son plan polaire, soit la sphère *o* (3) (fig. 156) et le plan P. Commençons par prendre pour ligne de terre *xy* une parallèle à la ligne de plus grande pente P du plan donné, et comptons les cotes à partir

du plan horizontal (3). Le plan donné a pour trace verticale P_1 dans le système xy.

L'axe des cônes est T'o'S' ToS perpendiculaire sur le plan donné et mené par le centre oo'. Les sommets sont les points de rencontre SS', TT' de cet axe avec des tangentes au contour apparent vertical de la sphère faisant avec l'axe S'o'T' le complément de l'angle donné.

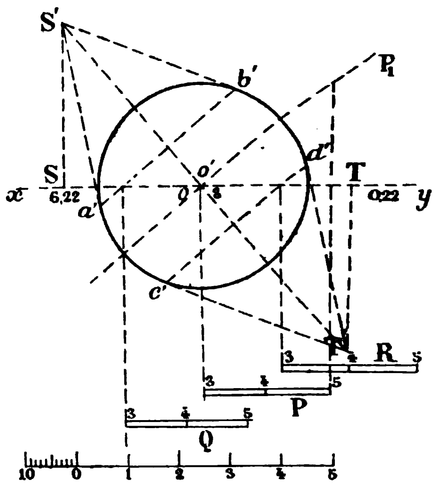


Fig. 156.

Si donc on mène par l'un quelconque des points SS' (6,22) ou TT' (0,22) un plan tangent à la sphère, il fera avec le plan P l'angle donné.

Les points de contact se trouveront dans l'un ou l'autre des plans de bout a'b', c'd' définis de plus par leurs échelles de pente Q, R.

V. — PLAN TANGENT PAR UN POINT A UNE SPHÈRE FAISANT UN ANGLE DONNÉ AVEC UN PLAN DONNÉ.

358. — 1re solution. — Le plan inconnu passera par le point donné, puis par l'un des points S, T déterminés précédemment; il suffira donc de joindre le point donné à l'un des points S, T et de mener par l'une de ces droites un plan tangent à la sphère.

359. — **2^e^ solution.** — Le point de contact inconnu se trouvera dans le plan polaire P du point par rapport à la sphère et dans l'un des plans Q ou R déterminés précédemment. Il suffira donc de chercher l'intersection du plan polaire P avec l'un des plans Q ou R et de déterminer les points de rencontre de cette droite avec la sphère.

VI. — PLAN TANGENT A UNE SPHÈRE FAISANT AVEC DEUX PLANS DES ANGLES DONNÉS.

360. — **1^re^ solution.** — On détermine d'abord les points fixes S, T par l'un desquels passent les plans tangents à la sphère faisant avec le premier plan donné un angle connu. On détermine de la même façon les points fixes S_1, T_1 relatifs au second plan.

Enfin, en joignant ces points deux à deux, il ne reste plus qu'à mener par l'une de ces quatre droites SS_1, ST_1, TS_1, TT_1 un plan tangent à la sphère, ce qui donne en tout huit plans.

361. — **2^e^ solution.** — On peut aussi déterminer les plans Q, R relatifs au premier plan donné, puis les plans Q_1, R_1 relatifs au second plan. Il suffit alors de chercher les points de rencontre de la sphère avec l'une quelconque des intersections QQ_1, QR_1, RQ_1, RR_1, ce qui donne les huit points de contact.

VII. — EMPLOI DE LA SPHÈRE POUR L'ÉTUDE DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

362. — Pour résoudre les problèmes relatifs aux plans tangents aux surfaces de révolution, nous avons montré que l'on pouvait substituer à la surface soit un cône tangent tout le long d'un parallèle, soit un cylindre tangent tout le long d'une méridienne. On peut aussi remplacer la surface de révolution par une sphère tangente tout le long d'un parallèle. Le centre de cette sphère sera l'intersection de l'axe avec le plan normal à la ligne qui décrit la surface au point où cette ligne rencontre le parallèle considéré.

Si donc on veut mener par un point extérieur un plan tangent ayant son point de contact sur un parallèle donné, on construit

d'abord la sphère ω inscrite tout le long de ce parallèle P, puis on cherche le plan polaire Q du point extérieur A par rapport à cette sphère ω. Le plan du parallèle P et le plan polaire Q se coupent suivant une droite dont les points de rencontre avec la sphère ω sont les points de contact cherchés. Ou bien, toujours après avoir construit la sphère ω, on prend le pôle S du plan du parallèle P par rapport à la sphère, et il suffit de mener par la droite SA des plans tangents à cette sphère.

LIVRE XII

RÉSOLUTION DES TRIÈDRES

363. — Les éléments numériques d'un trièdre sont au nombre de six : les trois faces a, b, c et les trois dièdres A, B, C. Trois de ces éléments suffisent pour déterminer le dièdre ; nous aurons donc à examiner les six cas suivants, dans lesquels on connaît :

1° Les trois faces F, F, F ;

2° Deux faces et le dièdre compris F, D, F ;

3° Deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles F, F, D ;

4° Une face et les deux dièdres adjacents D, F, D ;

5° Une face, un dièdre adjacent et le dièdre opposé F, D, D ;

6° Les trois dièdres D, D, D.

La résolution de ces six cas peut se ramener à celle de trois d'entre eux, à l'aide du trièdre supplémentaire. Par exemple, soit à construire un trièdre, connaissant deux faces a, b, et le dièdre compris C ; les suppléments de ces angles $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - C$ sont une face $\pi - C$ et les deux dièdres adjacents $\pi - a$, $\pi - b$ du trièdre supplémentaire. Donc, si l'on sait résoudre le quatrième cas, on pourra construire directement le trièdre supplémentaire du trièdre cherché, et, en cherchant les suppléments de ses autres éléments, on aura les éléments inconnus du trièdre primitif.

Finalement, on peut résoudre arbitrairement le premier ou le sixième cas, le deuxième ou le quatrième et enfin le troisième ou le cinquième.

Comme application des problèmes relatifs à la sphère, nous allons résoudre directement les six cas.

I. — DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS NUMÉRIQUES D'UN TRIÈDRE.

364. — Nous ramènerons tous les cas des trièdres au problème suivant : trouver les éléments numériques d'un trièdre, connaissant une face, la projection de la troisième arête sur le plan de cette face, et la cote d'un point de la troisième arête par rapport au plan de la face.

Soit ASB la face connue dans le plan horizontal (fig. 157) et Sc la projection de la troisième arête, en supposant connue la cote du

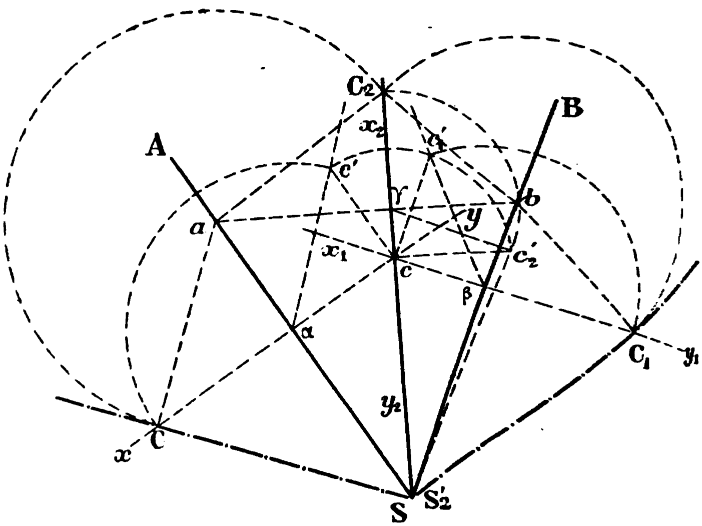


Fig. 157.

point c. Prenons comme ligne de terre xy perpendiculaire sur SA et menée par le point c. Ce dernier point se projette alors verticalement sur une perpendiculaire à xy menée par c, à une distance cc' au-dessus de xy égale à la cote connue du point c. La droite $c'\alpha$ représente alors la trace verticale du plan ASC, et par suite $c'\alpha c$ mesure le dièdre A.

Rabattons maintenant le plan ASC sur le plan horizontal autour de AS. Cette opération se réduit d'ailleurs à une simple rotation autour de la ligne de bout α, mesurée par l'angle $c'\alpha x$. Elle amène

en particulier le point cc' dans le plan horizontal en C. Nous avons donc suivant ASC la face b.

En prenant de même comme ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire sur B, nous aurons suivant $c'_1\beta c$ l'angle dièdre B. Après le rabattement du plan BSC sur le plan horizontal autour de SB, BSC_1 représente la face a.

Il reste enfin à trouver le dièdre C.

365. — 1^re^ construction. — Prenons comme ligne de terre x_2y_2 la droite Sc. Le point c se projette verticalement en c'_2, à une distance au-dessus de x_2y_2 égale à la cote connue du point c. L'arête Sc a pour projection verticale $S'_2c'_2$. Menons alors par cc'_2 un plan $c'_2\gamma a$ perpendiculaire sur l'arête ScS'_2c_2. Ce plan coupe le dièdre suivant deux droites faisant entre elles l'angle C. Les traces horizontales des deux côtés de l'angle sont les points a, b. Quant au sommet de l'angle, c'est le point cc'_2.

Rabattons alors ce plan sur le plan horizontal autour de ab. Les deux points a, b, qui sont sur la charnière, restent fixes. D'ailleurs le sommet de l'angle cc'_2 est rabattu en C_2. Donc aC_2b est l'angle dièdre C.

366. — 2^e^ construction. — Considérons toujours le plan perpendiculaire sur l'arête SC menée par le point c de l'espace. Ce plan coupe la face ASC suivant une droite dont le rabattement autour de AS est une perpendiculaire à SC menée par C, soit Ca.

De même la face BSC est coupée suivant une droite dont le rabattement autour de SB est perpendiculaire sur SC_1 menée par C_1, soit C_1b.

Le plan perpendiculaire à l'arête Sc coupe donc le trièdre suivant un triangle dont on a les trois côtés : ab dans le plan horizontal, aC dans le rabattement autour de AS, et bC_1 dans le rabattement autour de SB.

Rabattons ce triangle sur le plan horizontal autour de ab, autrement dit, construisons sur ab un triangle dont nous connaissons les trois côtés ab, aC, bC_1. Pour cela, de a comme centre avec aC pour rayon on décrit une circonférence, puis de b comme centre avec bC_1 une autre circonférence qui coupe la première au point C_2.

Finalement aC_2b est l'angle dièdre C.

Signalons dans l'épure, outre les vérifications provenant des deux constructions de l'angle C, que les longueurs SC, SC_1,

$S'_2C'_2$ sont égales entre elles, puisqu'elles représentent toutes trois la longueur de l'arête SC.

II. — PREMIER CAS DES TRIÈDRES.

367. — Le premier des cas des trièdres est celui où l'on connaît les trois faces. Prenons comme plan horizontal de projection le plan de l'une des faces, par exemple le plan de la plus grande ASB. Figurons ensuite les rabattements ASC, BSC_1 des deux autres faces sur le plan horizontal, successivement autour de AS et de BS (fig. 158).

Si nous prenons les longueurs $SC = SC_1$, les deux points C, C_1 peuvent être considérés comme les rabattements autour de SA et

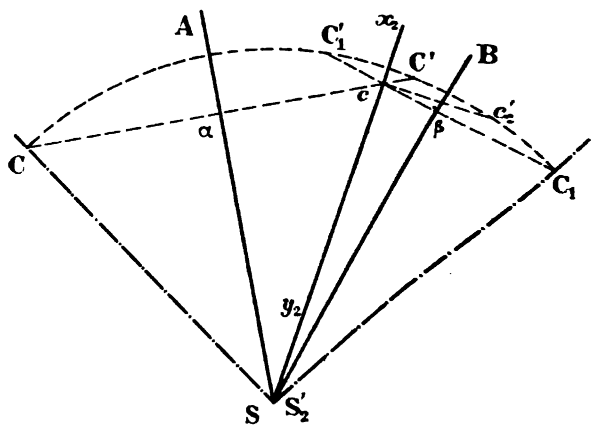


Fig. 158.

SB d'un même point de l'arête SC. Or, en relevant la face ASC autour de AS, le point C décrit en projection horizontale la droite $C\alpha$ perpendiculaire sur SA. De même, en relevant le point C_1 autour de SB, il décrit en projection horizontale la droite $C_1\beta$ perpendiculaire sur SB.

En résumé, le point c, intersection de $C\alpha, C_1\beta$, α est la projection horizontale d'un point de la troisième arête, et par suite Sc est la projection de cette troisième arête.

Pour trouver la cote du point c, on a pris comme ligne de terre Sc ou x_2y_2. Le point c doit alors se projeter verticalement en c'_2,

sur la circonférence CC_1, parce que les longueurs SC, SC_1, $S'_2c'_2$ doivent être égales.

On peut aussi expliquer la construction précédente en disant : L'arête inconnue S*c* est une génératrice commune à deux cônes de révolution ayant pour sommet commun le point S, pour axes SA, SB, et pour demi-angles au sommet *b* et *a*. Le point S est un premier point de cette génératrice. Pour en trouver un second point, on a coupé les deux cônes par une même sphère ayant pour centre le sommet commun S. On obtient ainsi deux parallèles $C\alpha$, $C_1\beta$, qui se coupent au point *c*.

Enfin, pour trouver la cote du point *c*, il suffit dans le système x_2y_2 de le considérer comme appartenant à la sphère auxiliaire.

Pour que le problème soit possible, il faut que le point *c* se trouve à l'intérieur du contour apparent de la sphère, ou bien :

$$ASC' + BSC'_1 > ASB,$$

ou :

$$c < a + b,$$

c'est-à-dire la plus grande face plus petite que la somme des deux autres.

Si nous supposions les trois angles donnés obtus, l'angle *c* étant toujours le plus grand, la condition précédente deviendrait, en remplaçant les angles au sommet des cônes par les angles adjacents, pour retrouver des angles aigus, comme dans l'exemple primitif :

$$(\pi - a) + (\pi - b) > c \quad \text{ou} \quad a + b + c < 2\pi.$$

En résumé, les conditions de possibilité sont :

1° La plus grande face plus petite que la somme des deux autres ;

2° La somme des trois faces plus petite que quatre droits.

Lorsque ces conditions sont remplies, le problème présente deux solutions, car on peut aussi supposer le point *c* au-dessous du plan ASB.

Quand on demande de mener par S une droite faisant avec SA et SB des angles donnés sans s'inquiéter des directions SA, SB, le problème peut alors présenter quatre solutions réelles, provenant de ce fait que deux cônes de révolution ayant même sommet peuvent se couper suivant quatre génératrices réelles.

Il faut alors remplacer l'angle c par son supplément $\pi - c$.

La condition primitivement établie donne, pour la réalité des deux nouvelles solutions, la relation suivante :

$$\pi - c < a + b \quad \text{ou} \quad a + b + c > \pi.$$

Donc, en résumé :

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c<2\pi \\ a+b+c>\pi \\ c<a+b \end{array}\right\} \text{quatre solutions.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c<\pi \\ c<a+b \end{array}\right\} \text{deux solutions.}$$

III. — DEUXIÈME CAS DES TRIÈDRES.

368. — Nous nous donnons maintenant deux faces et le dièdre compris.

Soit ASB l'une des faces données dans le plan horizontal (fig. 159), ASC le rabattement de la deuxième face connue sur le

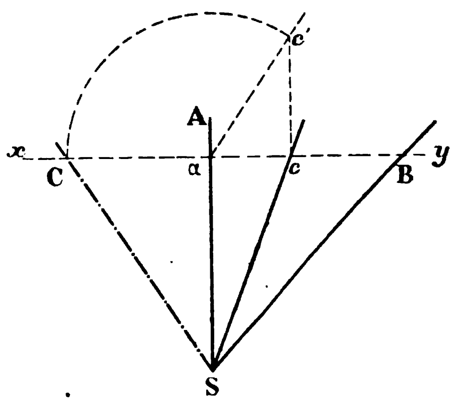


Fig. 159.

plan horizontal autour de AS. Le dièdre A étant également connu, si nous prenons comme ligne de terre une perpendiculaire sur AS, dans ce système, le plan ASC a pour trace verticale une droite menée par α et faisant avec la ligne de terre l'angle dièdre A. Dans ce plan, relevons l'arête SC. Le point C décrit

alors dans le plan vertical une circonférence de centre α et vient se placer en $c'c$. En résumé, Sc est la projection de la troisième arête et cc' est la cote du point c.

On trouve comme solution le trièdre figuré dans l'épure et le trièdre symétrique par rapport au plan horizontal.

IV. — TROISIÈME CAS OU CAS DOUTEUX.

369. — Pour construire un trièdre, connaissant deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles, prenons comme plan de projection le plan de la face connue adjacente au dièdre donné, soit ASB (fig. 160). En appelant A le dièdre connu, si nous prenons comme ligne de terre xy une perpendiculaire sur SA, dans ce système le plan ASC a pour trace verticale une droite menée par α et faisant avec xy l'angle dièdre A. D'ailleurs, le dernier élément connu étant la face BSC, nous pouvons figurer le rabattement BSC$_1$ de cette face sur le plan horizontal autour de BS.

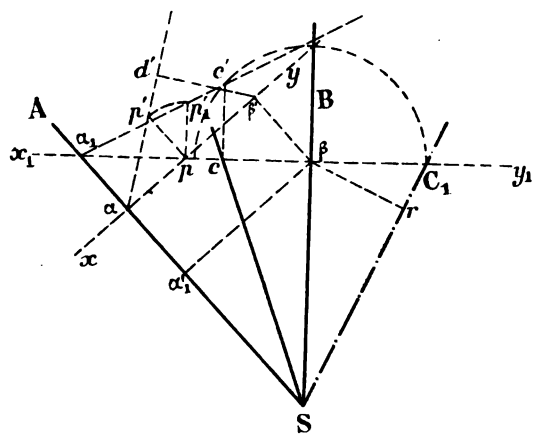


Fig. 160.

Il reste donc à relever la droite SC$_1$ autour de SB, de façon à l'amener dans le plan ASB.

Prenons donc comme nouveau plan vertical le plan x_1y_1 perpendiculaire sur SB. La nouvelle trace verticale du plan ASC est $\alpha_1p'_1$, qu'on a obtenue en faisant le changement de plan indiqué pour les points α_1 et pp' du plan ASC dans le système primitif.

Dans le nouveau système x_1y_1, le point C_1 décrit dans le plan vertical une circonférence de centre β et vient se placer en $c'c$ sur la trace verticale nouvelle du plan ASC.

En résumé, Sc est la projection de la troisième arête, la cote du point c étant mesurée par cc'.

On peut donner de cette construction une autre explication beaucoup plus naturelle en disant que l'arête SC est l'intersection du plan ASC avec le cône de révolution ayant pour sommet S, pour axe SB et pour demi-angle au sommet BSC_1 ou a.

Dans le système x_1y_1 on a la base du cône qui est dans le plan vertical la circonférence décrite de β comme centre avec βC_1 pour rayon.

Le plan ASC étant défini par ses traces dans le système xy, on a déterminé sa trace sur le plan de base du cône, c'est-à-dire sa nouvelle trace verticale $\alpha_1 p'_1$ dans le système x_1y_1.

Le plan ASC coupe donc le cône suivant la génératrice $ScS'c'$, qui est l'une des solutions du problème.

Pour que le problème soit possible, il faut que le plan ASC coupe le cône ou, ce qui revient au même, il faut que le plan ASC coupe une sphère inscrite dans le cône.

Si nous prenons, par exemple, la sphère inscrite ayant pour centre le point β, et dont le rayon est mesuré par la distance βr du centre à la génératrice principale SC_1, il faut que ce rayon soit plus grand que la distance du même centre β au plan ASC.

Or, dans le système xy, le point β se projette verticalement en β' sur xy, et la distance de ce point $\beta\beta'$ au plan ASC est mesurée dans le même système par la distance $\beta'd'$ du point β' à la trace verticale $\alpha p'$ du plan ASC.

La condition de possibilité est donc :

$$\beta r > \beta' d'.$$

Évaluons ces deux quantités en fonction des données. Menons d'abord par β la parallèle $\beta\alpha'_1$ à xy.

Le triangle rectangle $S\beta\alpha'_1$ donne :

$$\beta\alpha'_1 = S\beta \sin c = \beta'\alpha.$$

D'ailleurs, le triangle rectangle $\alpha\beta'd'$ donne :

$$\beta'd' = \alpha\beta' \sin A = S\beta \sin c \sin A.$$

D'un autre côté, le triangle rectangle $S\beta r$ donne :

$$\beta r = S\beta \sin a.$$

La condition de possibilité est alors :

$$\sin a > \sin c \sin A.$$

Cette condition exprime simplement la réalité des génératrices d'intersection du plan avec le cône, mais il faut en outre que ces génératrices se trouvent au-dessus du plan horizontal.

Lorsque $\beta C_1 > \beta \alpha_1$, c'est-à-dire lorsque $\sin a > \sin c$, l'un des points d'intersection passe au-dessous du plan horizontal et la solution correspondante ne convient pas, parce que l'angle dièdre obtenu A serait obtus.

Si l'angle A était obtus, cette dernière solution conviendrait seule et l'on devrait avoir $\sin a > \sin c$.

En résumé, avec

$$A < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \sin c > \sin a > \sin c \sin A,$$

on a deux solutions.

Quand

$$A > \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \sin c < \sin a,$$

une seule solution.

Si

$$A > \frac{\pi}{2} \quad \text{avec} \quad \sin c > \sin a > \sin c \sin A,$$

on n'a aucune solution.

Enfin, lorsque

$$A > \frac{\pi}{2} \quad \text{avec} \quad \sin c < \sin a,$$

on a une seule solution toujours réelle, car la condition $\sin a > \sin c \sin A$ est nécessairement remplie.

V. — QUATRIÈME CAS DES TRIÈDRES.

370. — Les données sont ici une face ASB et les deux dièdres adjacents A, B. Prenons le plan de la face connue comme plan horizontal (fig. 161). Si nous prenons comme ligne de terre xy une perpendiculaire sur SA, dans ce système le plan ASC a pour trace verticale une droite menée par α et faisant avec la ligne de terre l'angle dièdre A.

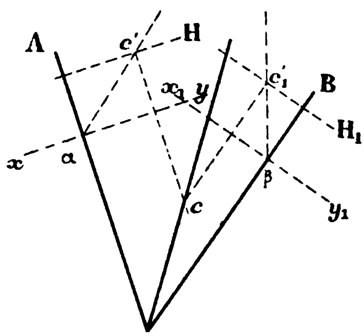


Fig. 161.

De même, en prenant comme ligne de terre x_1y_1 une perpendiculaire sur SB, dans ce nouveau système le plan BSC a pour trace verticale une droite menée par β et faisant avec x_1y_1 l'angle B.

Il reste à trouver l'intersection des deux plans ASC, BSC. Nous connaissons déjà le point S. Il suffit donc de couper les deux plans donnés par un plan horizontal auxiliaire dont nous avons figuré les traces verticales H, H_1 dans les deux systèmes, parallèles aux deux lignes de terre et à la même distance au-dessus de ces deux lignes de terre. Nous obtenons ainsi les deux lignes de bout c', c'_1 qui se rencontrent au point c.

Finalement Sc est la projection de la troisième arête, la cote du point c étant celle du plan horizontal employé.

VI. — CINQUIÈME CAS DES TRIÈDRES.

371. — Nous avons toujours une face ASC, mais un dièdre adjacent A et le dièdre opposé B.

Prenons comme plan de projection le plan de la face inconnue ASB adjacente aux deux dièdres donnés, soit ASB (fig. 162). Si nous choisissons comme ligne de terre xy une perpendiculaire sur l'arête SA, dans ce système, le plan ASC a pour trace une droite menée par α et faisant avec xy l'angle dièdre A, que nous supposons obtus.

La face ASC étant connue en grandeur, nous avons figuré son rabattement sur le plan horizontal autour de AS, ce qui nous permet de relever l'arête SC en $ScS'c'$ dans le plan ASC. Il ne reste plus qu'à mener par $ScS'c'$ un plan BSC faisant avec le plan horizontal l'angle dièdre B.

Le plan inconnu sera tangent à un cône de révolution à axe vertical, ayant pour sommet le point cc' et pour angle à la base

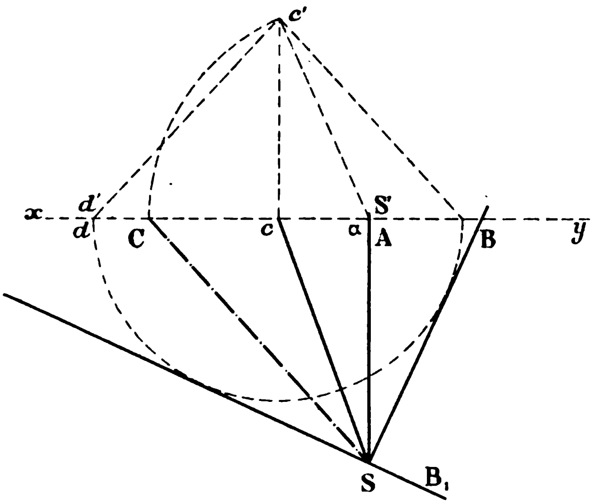


Fig. 162.

l'angle B. Soit $c'd'$ une génératrice principale de ce cône. On en déduit la base du cône dans le plan horizontal, c'est la circonférence ayant pour centre c et pour rayon cd.

L'arête SB sera l'une des tangentes SB ou SB_1 menées par le point S à la base du cône.

Pour que le problème soit possible, il faut qu'on puisse mener par S des tangentes à la base du cône ou, ce qui revient au même, il faut que la longueur de l'oblique $ScS'c'$ soit plus grande que la longueur de la génératrice du cône $c'd'$,

ou:
$$SC > c'd'.$$

Or, dans le triangle rectangle $SC\alpha$,

$$SC = \frac{SS'}{\cos b} \quad \text{et} \quad C\alpha = SS' \operatorname{tang} b = \alpha c'.$$

Le triangle rectangle $cc'\alpha$ donne ensuite :

$$cc' = c'\alpha \sin A = SS' \operatorname{tang} b \sin A.$$

Enfin le triangle rectangle $cc'd'$ donne à son tour :

$$c'd' = \frac{cc'}{\sin B} = \frac{SS' \operatorname{tang} b \sin A}{\sin B}.$$

La condition de possibilité est donc :

$$\frac{SS'}{\cos b} > \frac{SS' \operatorname{tang} b \sin A}{\sin B},$$

ou :

$$\sin B > \sin b \sin A.$$

Dans l'épure, nous avons supposé $B < A$ ou $\sin B < \sin A$, alors les deux solutions convenaient ; mais, si l'on avait $\sin B > \sin A$, le problème serait possible et une seule solution conviendrait.

Lorsque A est aigu, il n'y a jamais qu'une solution qui convienne.

En résumé, lorsque

$$A > \frac{\pi}{2} \text{ avec } \sin A > \sin B > \sin b \sin A,$$

on a deux solutions.

Si

$$A > \frac{\pi}{2} \text{ avec } \sin A < \sin B,$$

on a une seule solution toujours réelle.

Enfin, quand

$$A < \frac{\pi}{2} \text{ avec } \sin B > \sin b \sin A,$$

on a une seule solution.

VII. — SIXIÈME CAS DES TRIÈDRES.

372. — Nous connaissons enfin les trois trièdres. Prenons alors comme plan horizontal le plan de l'une des faces ASB, par exemple (fig. 163), et comme plan vertical un plan perpendi-

culaire sur l'arête SA. Dans ce système, le plan ASC a pour trace verticale une droite menée par α et faisant avec la ligne de terre l'angle dièdre A.

Il reste à construire le plan BSC, qui fait avec le plan horizontal l'angle B et avec le plan ASC l'angle C. Nous pouvons nous donner, pour déterminer complètement ce plan, une condition de plus. Nous allons, par exemple, l'assujettir à passer par un point pp', choisi arbitrairement dans le plan vertical.

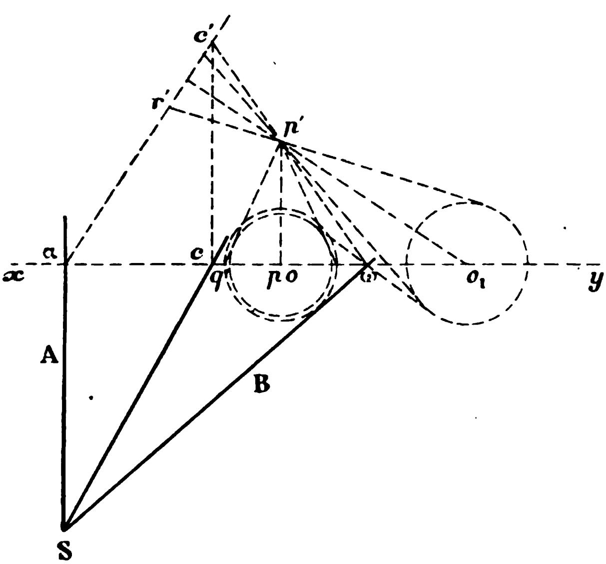


Fig. 163.

Le plan inconnu, faisant avec le plan horizontal un angle B, sera tangent à un premier cône de révolution ayant pour sommet pp', pour axe la verticale p et pour demi-angle au sommet le complément de l'angle B. Soit $p'q'$ une génératrice principale du cône.

De même, le plan inconnu, faisant avec le plan ASC l'angle C, sera tangent à un nouveau cône de révolution ayant pour sommet pp', pour axe une perpendiculaire sur le plan ASC et pour demi-angle au sommet le complément de l'angle C. Soit $p'r'$ une génératrice principale de ce cône.

Pour mener maintenant un plan tangent commun à ces deux cônes, nous leur substituons des sphères inscrites, par exemple

celles qui ont pour centres les traces horizontales des deux axes o, o_1.

Le plan inconnu passera par l'un des centres de similitude des deux sphères, soit le centre de similitude inverse ω.

La trace verticale du plan tangent commun est $\omega p'$. Quant à la trace horizontale, elle passe par ω et elle est tangente à la base du premier cône dans le plan horizontal. Or cette base est la circonférence décrite de o comme centre avec oq' pour rayon. Nous avons ainsi l'arête SB. D'ailleurs l'arête SC est l'intersection du plan ASC et du plan tangent commun que nous venons de construire. Les deux traces verticales se coupent en $c'c$. Par suite, Sc est la projection horizontale de la troisième arête, la cote du point C étant mesurée par cc'.

Pour que le problème soit possible, il faut que les deux cônes de sommet p ne se coupent pas; la somme des deux angles au sommet $\frac{\pi}{2} - \text{B}$, $\frac{\pi}{2} - \text{C}$ doit donc être plus petite que l'angle des deux axes, lequel est égal à A :

$$\frac{\pi}{2} - \text{B} + \frac{\pi}{2} - \text{C} < \text{A},$$

ou:

$$\text{A} + \text{B} + \text{C} > \pi.$$

La somme des trois dièdres est plus grande que deux droits.

Lorsque les angles B, C sont obtus, la condition précédente devient, en remplaçant ces angles par leur complément, pour retrouver les véritables demi-angles au sommet :

$$\frac{\pi}{2} - (\pi - \text{B}) + \frac{\pi}{2} (\pi - \text{C}) < \text{A},$$

ou :

$$\text{B} + \text{C} < \text{A} + \pi.$$

Le plus petit dièdre, augmenté de deux droits, est plus grand que la somme des deux autres.

LIVRE XIII

SURFACE GAUCHE DE RÉVOLUTION

CHAPITRE PREMIER

I. — PROPRIÉTÉS.

373. — *On appelle surface gauche de révolution la surface engendrée par une ligne droite en tournant autour d'une droite fixe qui ne coupe pas la première.*

374. — En supposant l'axe de révolution vertical, les projections horizontales des génératrices sont toutes tangentes à une même circonférence, c'est la circonférence décrite par le pied de la perpendiculaire commune entre la droite et l'axe. Cette circonférence s'appelle le cercle de gorge ou le collier. Ce cercle de gorge servira de contour apparent horizontal lorsque l'axe de révolution sera vertical.

375. — **Détermination d'un point.** — Soit une surface gauche de révolution définie par la génératrice A dont on a la projection et l'échelle, puis par son axe vertical *o* (fig. 164). Proposons-nous de trouver le point de la surface projeté horizontalement en *m*. Pour cela, on considère le parallèle de la surface passant par le point inconnu. La projection horizontale est une circonférence passant par le point *m* et ayant pour centre le pied de l'axe *o*. Ce parallèle rencontre A aux

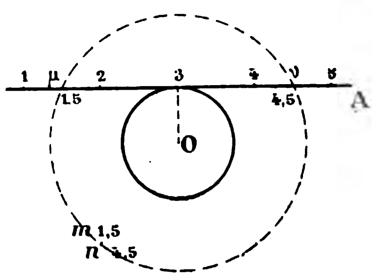


Fig. 164.

points μ (1,5), ν (4,5), donc les points de la surface projetés horizontalement en m ont aussi pour cotes le premier, m (1,5), et le second, n (4,5).

376. — Il est facile de reconnaître que la surface admet deux systèmes de génératrices. En effet (fig. 165), soit a (1) b (0) une droite que l'on fait tourner autour de la verticale o de façon à engendrer une surface gauche de révolution. Abaissons du pied de l'axe o une perpendiculaire $o\alpha$ sur ab et considérons la droite a_1 (1) b_1 (0) symétrique de ab par rapport au plan vertical $o\alpha$.

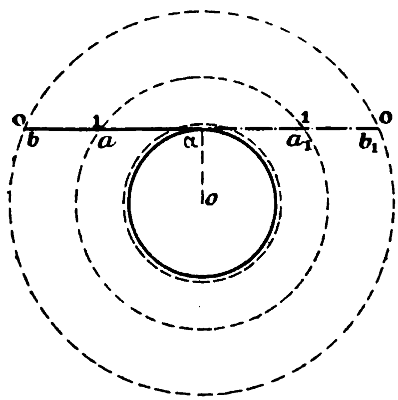


Fig. 165.

Cette droite a_1b_1, en tournant autour du même axe vertical o, va engendrer une deuxième surface gauche de révolution. Il s'agit d'abord de reconnaître que les deux surfaces sont identiques.

En effet, coupons les deux droites par un même plan horizontal, les points ayant mêmes cotes sur ab et a_1b_1 seront symétriques par rapport au point α; donc les rayons qui joignent ces deux points au point o seront égaux et par suite un plan horizontal quelconque coupe les deux surfaces suivant le même parallèle.

Il faut montrer de plus que les deux droites $a(1)b(0)$, $a_1(1)\ b_1(0)$, tout en engendrant la même surface, ne peuvent jamais coïncider, quel que soit l'angle dont on les fait tourner autour de l'axe.

En effet, supposons la droite ab fixe, et faisons tourner seulement la droite a_1b_1. Sa projection horizontale sera tangente au cercle de gorge qui est décrit de o comme centre, avec $o\alpha$ pour rayon.

Donc, aussitôt qu'on fait tourner a_1b_1 d'un angle quelconque, les projections horizontales deviennent différentes, par suite les droites ab, a_1b_1 sont actuellement dans la seule position où leurs projections horizontales puissent coïncider. Or, comme dans

l'espace elles sont actuellement distinctes, il en résulte qu'après une rotation quelconque elles ne coïncideront jamais. La surface admet par conséquent deux systèmes de génératrices.

377. — Pour distinguer les systèmes des génératrices, considérons un observateur placé debout sur le plan horizontal en b, trace horizontale de ab. Cet observateur voit le cercle de gorge à sa droite et la génératrice ab à sa gauche.

Au contraire, un observateur placé debout sur le plan horizontal en b_1 voit le cercle de gorge à sa gauche et la génératrice a_1b_1 à sa droite.

Au lieu de deux observateurs, on peut se contenter d'un seul placé alors debout sur l'axe en o et regardant le point de contact α de chaque génératrice sur le cercle de gorge. Pour cet observateur unique, la génératrice ab a sa trace horizontale b à gauche, tandis que la trace horizontale b_1 de la génératrice a_1b_1 est à droite.

Enfin, on peut convenir de figurer de chaque génératrice uniquement la région comprise entre le plan horizontal et le plan du cercle de gorge, en figurant la génératrice ab par la demi-tangente en trait plein $b\alpha$, tandis que la génératrice a_1b_1 sera figurée par la demi-tangente en trait mixte $b_1\alpha$. On aura donc, en appliquant la même convention à toutes les génératrices, un système de demi-tangentes en trait plein dirigées toutes dans le même sens, et un autre système de demi-tangentes en trait mixte dirigées aussi dans le même sens les unes par rapport aux autres, mais de sens différent des premières, de telle sorte que deux traits de même nature ne se traverseront jamais.

378. — **THÉORÈME.** — *Deux génératrices de système différent se rencontrent toujours, et deux génératrices de même système ne se rencontrent jamais.*

Soit A, B les projections horizontales de deux génératrices, sans tenir compte de leur système (fig. 166); la verticale μ qui s'appuie sur ces deux génératrices les rencontre en deux points m, n tels que $m\mu = n\mu$. Cela résulte de l'égalité des triangles rectangles $m\alpha\mu$, $n\beta\mu$ qui sont égaux comme ayant un côté égal et un angle aigu égal.

Les côtés égaux sont en effet $\mu\alpha$, $\mu\beta$ comme tangentes issues d'un point à une circonférence. Les angles en α, β sont aussi

égaux, parce que toutes les génératrices font avec le plan horizontal le même angle.

Supposons maintenant que A et B (fig. 166) soient de système différent, les portions dessinées des deux génératrices seront de sens contraire, donc le point m de A se trouve au-dessous du plan du cercle de gorge ainsi que le point n de B, et par suite les deux points m et n sont confondus.

On peut dire aussi que les horizontales $\alpha\beta$, ab, qui s'appuient sur les deux droites, la première dans le plan du cercle de gorge, la seconde dans le plan horizontal, sont parallèles ; donc elles sont dans le même plan, qui sera précisément le plan tangent en m.

Supposons, au contraire (fig. 167), que les deux génératrices A et B soient de même système, auquel cas elles sont figurées par des demi-tangentes dirigées dans le même sens.

La verticale qui s'appuie sur ces deux génératrices rencontre

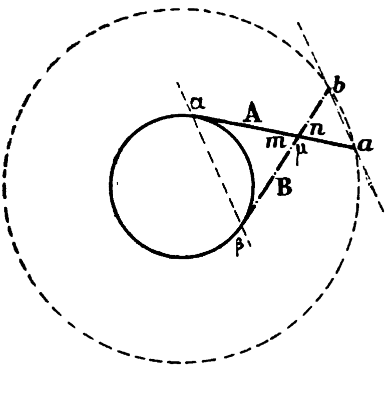


Fig. 166.

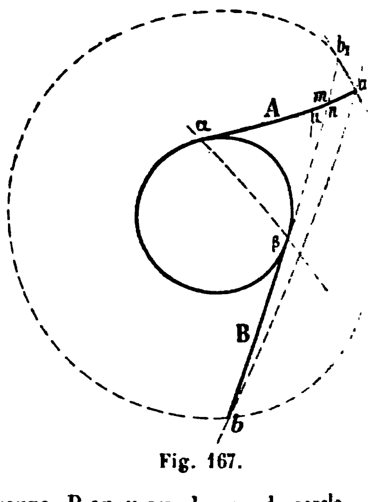


Fig. 167.

A en m au-dessous du cercle de gorge, B en n au-dessus du cercle de gorge. Donc, cette fois, les deux points m, n, loin d'être confondus, sont toujours symétriques l'un de l'autre par rapport au plan du cercle de gorge.

On peut dire aussi : considérons les horizontales $\alpha\beta$, ab s'appuyant sur les deux droites, elles ne sont plus comme tout à l'heure parallèles entre elles, car par le point a on ne peut mener qu'une droite ab_1 parallèle à $\alpha\beta$ et le point b_1 de la génératrice n'a pas une cote nulle.

Nous remarquons de plus que l'angle des deux horizontales $\alpha\beta$, ab est constant, quelles que soient les positions des deux génératrices, car il est égal à l'angle bab_1 dont la grandeur est constante, puisqu'il est inscrit dans la circonférence bab_1 et qu'il sous-tend une corde bb_1 de grandeur constante.

379. — Plan tangent. — Nous pourrions d'abord procéder comme pour une surface de révolution quelconque, mais il est avantageux de profiter de la présence des génératrices.

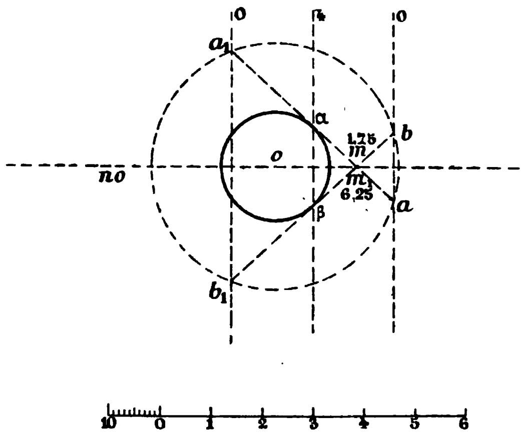


Fig. 168.

Nous dirons donc que le plan tangent en m (fig. 168) est déterminé par les deux génératrices $m\alpha$, $m\beta$ passant par le point et tangentes au cercle de gorge.

Nous retrouvons ici une propriété que nous avions déjà reconnue pour la sphère, c'est que le plan tangent en un point m de la surface a pour trace sur le plan du contour apparent la polaire $\alpha\beta$ de la projection du point de contact par rapport au contour apparent.

Les traces horizontales des deux génératrices se trouvent en a, b sur la trace horizontale de l'hyperboloïde, en ayant soin de remarquer que ab doit être parallèle à $\alpha\beta$ ou bien en a_1b_1.

Nous paraissons trouver deux solutions, cela tient à ce qu'il existe deux points de la surface projetés en m. Le premier point étant au-dessous du plan du cercle de gorge, le plan tangent en ce point a pour trace horizontale ab. Le second point est au-dessus

du plan du cercle de gorge, et la trace horizontale du plan tangent en ce point est a_1b_1 α.

Les horizontales ab, a_1b_1, $\alpha\beta$ ayant des cotes connues, on en déduit les échelles des quatre génératrices et par suite les cotes des deux points m, m_1, (1,75) et (6,25).

380. — Normale. — Ayant construit le plan tangent en un point quelconque m, on peut en déduire la normale, en menant par le point de contact une perpendiculaire sur ce plan tangent. Ainsi, le plan $\alpha\beta mab$ ayant pour module 0,4, la normale aura pour module $\frac{1}{0,4} = 2,75$ et sa trace horizontale se trouvera en n à une distance mn égale à $2,75 \times 1,75 = 4,81$.

381. — Axe horizontal. — Soit une surface gauche de révolution définie par son axe horizontal A (3) et par une géné-

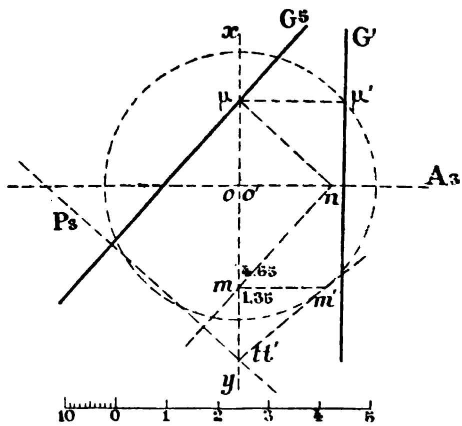


Fig. 169.

ratrice horizontale G (5) (fig. 169). Proposons-nous de déterminer les points de la surface projetés horizontalement en m. Le parallèle passant par le point inconnu se projette horizontalement suivant une perpendiculaire à l'axe A menée par m et rencontre la génératrice G en μ. Mettons en évidence ce parallèle en prenant comme ligne de terre xy. Le point μ se projette verticalement en μ', $\mu\mu'$ étant la différence de cotes entre G et A. La projection verticale du parallèle est donc la circonférence décrite de o' comme centre avec $o'\mu'$ pour rayon. Finalement, le point m se pro-

jette verticalement en m' et par suite les deux points répondant à la question ont pour cote (3 plus ou moins mm'), soit (4,65) et (1,35).

Le plan tangent en mm' contient la tangente $mtm't'$ au parallèle. D'ailleurs le plan normal en $\mu\mu'$ à GG' est vertical et coupe l'axe au point fixe n, donc mn est la normale à la surface au point m. On en déduit l'horizontale P (3) du plan tangent, en menant par t une perpendiculaire sur mn.

II. — MÉRIDIENNE PRINCIPALE.

382. — Pour trouver un point quelconque de la méridienne principale, il suffit de prendre l'intersection d'un parallèle quelconque de la surface ou encore d'une génératrice avec le plan méridien principal.

Soit par exemple (fig. 170) une surface gauche de révolution

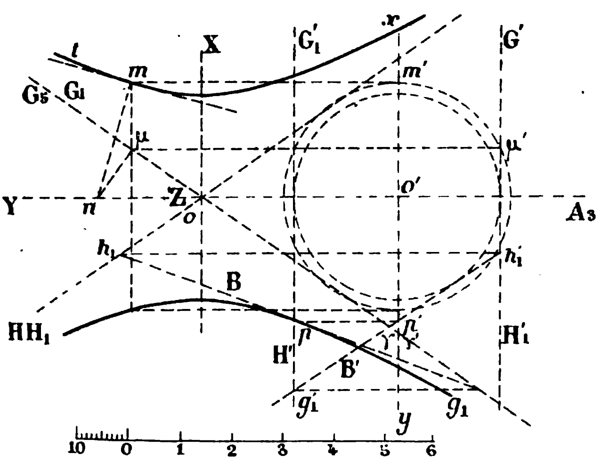


Fig. 170.

définie par son axe horizontal A (3) et une génératrice horizontale G (5). Prenons immédiatement comme ligne de terre xy une perpendiculaire sur A et figurons le parallèle du point $\mu\mu'$ de GG'. Ce parallèle a sa projection horizontale parallèle à xy, sa projection verticale est une circonférence de centre o' et passant par μ'. Le même parallèle coupe le plan méridien principal, c'est-à-dire le plan horizontal mené par l'axe au point mm' qui

est un point de la méridienne principale. Le plan normal en μ' à GG' est vertical, il coupe l'axe au point fixe *n*, donc *mn* est la normale à la méridienne principale. La tangente *mt* sera perpendiculaire sur *mn*.

383. — Proposons-nous maintenant de traiter la même question, en utilisant les propriétés des génératrices. Commençons par figurer les génératrices principales de la surface qui sont GG', $G_1G'_1$, HH' et $H_1H'_1$.

Pour construire ensuite une génératrice quelconque, on se donne sa projection verticale qui est une tangente quelconque B' au cercle de gorge. En la supposant de système différent de $G_1G'_1$, $H_1H'_1$, elle rencontre ces deux droites en g'_1g_1, h'_1h_1 et par suite sa projection horizontale est g_1h_1 ou B. Cette génératrice rencontre finalement le plan horizontal mené par l'axe au point $p'p$ qui sera un point quelconque de la méridienne principale.

Remarquons que la droite B est en même temps en projection horizontale la tangente à la méridienne principale, parce qu'au point *p* le plan tangent doit être vertical.

384. — **Asymptotes.** — Pour que le point pp' soit rejeté à l'infini, il faut que la génératrice devienne parallèle au plan horizontal. Les droites GG', HH', $G_1G'_1$, $H_1H'_1$ donneront donc les points à l'infini de la méridienne principale, et comme, dans chacune des positions de la génératrice, sa projection horizontale est tangente à la méridienne, quand elle sera horizontale, on aura l'asymptote.

Par conséquent les asymptotes de la méridienne principale sont précisément les projections horizontales G et H des quatre génératrices principales.

385. — **Équation de la méridienne principale.** — Prenons comme origine le centre oo' du cercle de gorge, pour axe des X une parallèle à la ligne de terre, pour axe des Y l'axe de révolution et pour axe des Z la verticale O ; la génératrice principale GG' aura pour équations $Z = a$ et $Y = \frac{b}{a}X$, en appelant $\frac{b}{a}$ la tangente de l'angle de G avec l'axe de révolution (fig. 170).

Les coordonnées du point $\mu\mu'$ seront donc X, $Y = \frac{b}{a}X$ et a.

Les équations du parallèle passant par ce point seront :

$$y = \frac{b}{a} X;$$

$$x^2 + z^2 = X^2 + a^2.$$

Ce parallèle coupe le plan des xy au point mm' dont les coordonnées seront :

$$y = \frac{b}{a} X;$$

$$x^2 = X^2 + a^2.$$

L'équation de la méridienne s'obtiendra en éliminant X entre ces deux équations, ce qui donne :

$$x^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2} + a^2,$$

ou :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ce qui est l'équation d'une hyperbole rapportée à ses axes. L'axe transverse a pour longueur a, c'est-à-dire le rayon du cercle de gorge. Les asymptotes sont, comme nous l'avons déjà vu, les génératrices principales $y = \pm \frac{b}{a} x$.

La surface gauche de révolution n'est donc autre chose qu'un hyperboloïde de révolution à une nappe.

386. — Ponctuation. — En supposant l'axe vertical, le contour apparent horizontal est le cercle de gorge, il partage la surface en deux régions, l'une au-dessus du plan du cercle de gorge qui est vue ; l'autre au-dessous du cercle de gorge est cachée. Si l'axe était horizontal, le contour apparent serait alors formé par la méridienne principale ; elle partage également la surface en deux régions, l'une au-dessus du plan horizontal mené par l'axe qui est vue, l'autre au-dessous du plan méridien principal et qui est cachée.

Mais ces résultats ne sont plus vrais lorsque l'hyperboloïde est solide.

Remarquons d'abord que les conventions ordinaires pour définir l'intérieur et l'extérieur ne sont plus applicables ici. Ainsi on appelle extérieur d'une sphère ou d'un cône du second degré l'ensemble des points par lesquels on peut mener à la surface des plans tangents réels. Le centre d'une sphère définit l'intérieur de la sphère. Les foyers de la base d'un cône ou d'un cylindre définissent également l'intérieur de ces surfaces.

Pour la surface gauche de révolution, une pareille définition n'est plus applicable, parce qu'un plan mené par une génératrice et un point tout à fait arbritraire est toujours tangent à la surface. Il est donc indispensable d'établir ici une convention particulière. Il est admis par tout le monde que le centre définit l'intérieur. Quand on dit qu'un hyperboloïde de révolution à une nappe est solide, sans ajouter autre chose, on suppose toujours qu'il est solide à l'intérieur, c'est-à-dire du côté du centre.

Dans ces conditions, en supposant l'axe vertical, l'hyperboloïde est caché tout entier en projection horizontale, en particulier le cercle de gorge est lui-même caché. Si au contraire l'axe est horizontal, la méridienne principale reste vue comme si on ne représentait que la surface.

C'est l'inverse lorsque l'hyperboloïde est solide à l'extérieur, quand on le projette sur le plan du cercle de gorge, ce cercle de gorge est vu ainsi qu'une moitié de la surface. Si au contraire on le projette sur un plan méridien, la méridienne principale est cachée tout entière ainsi que la surface.

387. — Cône directeur. — Dans l'étude d'une surface gauche, il est souvent utile de connaître le cône directeur de la surface, c'est-à-dire le cône obtenu en menant par un point de l'espace des parallèles à toutes les génératrices de la surface. Dans le cas d'un hyperboloïde de révolution, ce cône directeur sera aussi de révolution. Il aura son axe parallèle à l'axe de l'hyperboloïde, son demi-angle au sommet étant égal à l'angle des génératrices de l'hyperboloïde avec son axe.

388. — Cône asymptote. — Considérons en particulier le cône directeur ayant pour sommet oo' le centre de l'hyperboloïde, il aura pour génératrice principale $o\gamma o'\gamma'$ parallèle à GG (fig. 170). Le plan tangent à ce cône particulier suivant $o\gamma o'\gamma'$ est le plan vertical $o\gamma$, nous voyons donc qu'il contient les deux génératrices GG', $G_1G'_1$.

Donc tout plan tangent au cône asymptote coupe l'hyperboloïde suivant deux génératrices parallèles à la génératrice de contact sur le cône, et symétriques par rapport à cette génératrice de contact.

Comme un plan contenant deux génératrices d'un hyperboloïde est tangent à la surface au point de rencontre des deux génératrices, on peut dire aussi que tout plan tangent au cône asymptote est tangent à l'infini à l'hyperboloïde. Ce cône asymptote est donc aussi tangent à l'hyperboloïde tout le long d'un parallèle rejeté à l'infini.

CHAPITRE II

I. — PLAN TANGENT PARALLÈLE A UN PLAN DONNÉ

389. — Quand nous avons résolu ce problème pour une surface de révolution en général, nous avons supposé connue la méridienne de la surface. L'existence des génératrices sur une surface gauche de révolution permet de résoudre directement le même problème sans passer par l'intermédiaire de la méridienne.

Le plan tangent inconnu doit en effet contenir deux génératrices de la surface, il suffira donc de chercher d'abord les directions de ces génératrices, puis leur position. Le point de rencontre de deux de ces génératrices de système différent sera le point de contact cherché.

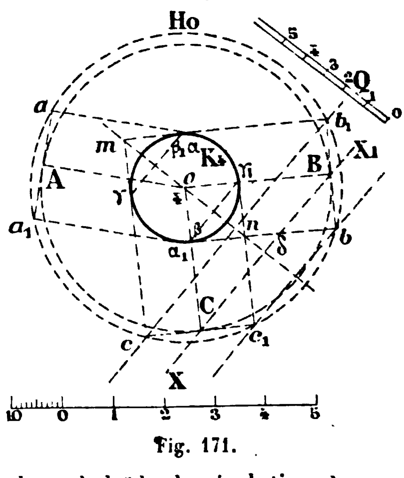


Fig. 171.

Soit donc un hyperboloïde de révolution à axe vertical défini par son cercle de gorge K (4) et sa trace horizontale H (0), puis un plan défini par son échelle de pente Q (fig. 171).

Commençons par construire le cône asymptote de la surface.

Pour cela, figurons deux génératrices parallèles $a\alpha$, $a_1\alpha_1$ de l'hyperboloïde et menons par le centre o une parallèle à ces deux génératrices. Soit oA, dont la trace horizontale se trouve en A au milieu de aa_1.

La base du cône asymptote est donc dans le plan horizontal la circonférence décrite de o comme centre, avec oA pour rayon.

Menons ensuite par le centre un plan parallèle au plan donné Q. Soit XX_1 sa trace horizontale, la longueur $o\delta$ étant égale à quatre fois le module du plan Q. Ce plan oXX_1 coupe le cône asymptote suivant les génératrices OB, OC qui sont les directions des génératrices de la surface parallèles au plan donné.

Pour trouver ensuite les positions de ces génératrices, il suffit de mener au cercle de gorge des tangentes parallèles à OB, OC. Les traces horizontales de ces génératrices se trouveront sur la trace horizontale de l'hyperboloïde. Mais, comme chaque fois nous avons deux points d'intersection, il est préférable de remarquer que les génératrices parallèles à OB sont contenues dans le plan tangent au cône asymptote suivant OB. Donc les génératrices parallèles à OB ont pour traces horizontales b, b_1 et les génératrices parallèles à OC ont leurs traces horizontales en c, c_1.

Il reste à combiner ces quatre génératrices, de façon à former avec elles des plans parallèles au plan donné. Les combinaisons possibles sont donc b avec c_1 ou b_1 avec c, parce que les traces horizontales bc_1, cb_1 des plans tangents ainsi obtenus sont parallèles à la trace horizontale du plan donné.

On peut dire aussi que l'on combine les génératrices $b_1\beta_1$, $c\gamma$, parce que leur point de rencontre se trouve dans le plan méridien $o\delta$ perpendiculaire sur le plan donné.

Ainsi donc les plans tangents cherchés ont pour points de contact m, n, pour traces horizontales b_1c, cb_1 et pour traces sur le plan du cercle de gorge $\beta_1\gamma$, $\gamma_1\beta$. Les cotes de ces différentes horizontales étant connues, on en déduit celles des points de contact.

II. — PLAN TANGENT PAR UN POINT EXTÉRIEUR, LE POINT DE CONTACT ÉTANT DANS UN PLAN MÉRIDIEN DONNÉ.

390. — Soit un hyperboloïde de révolution défini par son axe vertical O et une génératrice A dont on a la projection et l'échelle.

Proposons-nous de mener par le point P (2) un plan tangent ayant son point de contact dans le plan méridien M (fig. 172).

Le plan inconnu sera perpendiculaire sur le plan méridien donné, il contiendra donc la perpendiculaire sur ce plan méridien menée par le point P, soit l'horizontale D.

Or le plan horizontal D (2) coupe la surface suivant le parallèle Δ mené par le point δ (2) de A, par suite la droite D coupe l'hyperboloïde aux points μ, ν.

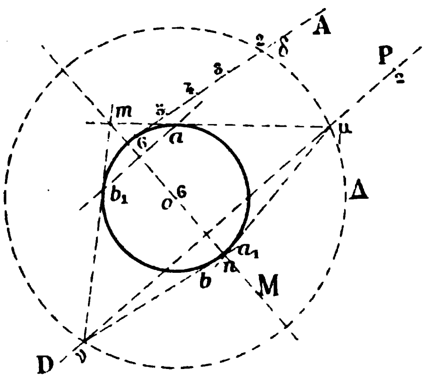


Fig. 172.

Par chacun de ces deux points, on peut faire passer deux génératrices μa, μa_1, νb, νb_1.

Prenons par exemple les deux génératrices μa, νb_1, elles sont de système différent et se coupent en m qui est le point de contact d'un premier plan tangent.

De même, les génératrices μa_1, νb sont aussi dans un même plan avec la droite D, elles déterminent un deuxième plan tangent dont le point de contact est à l'intersection n des deux génératrices contenues dans le plan tangent.

Comme vérification, les deux points de contact doivent se trouver dans le plan méridien donné M.

Le premier plan tangent est défini par l'horizontale D(2), puis par sa trace ab_1 (6) sur le plan du cercle de gorge. De même le second plan tangent est déterminé par l'horizontale D(2) et par sa trace a_1b (6) sur le plan du cercle de gorge.

Les cotes de ces différentes horizontales étant connues, on en déduit les cotes des points de contact.

III. — PLAN TANGENT PARALLÈLE A UNE DROITE, LE POINT DE CONTACT ÉTANT DANS UN PLAN MÉRIDIEN DONNÉ.

391. — Le plan inconnu sera perpendiculaire comme précédemment sur le plan méridien donné, on connaît donc complètement la direction du plan tangent. Par un point de l'espace on

mènera une parallèle à la direction donnée, puis une perpendiculaire sur le plan méridien : ces deux droites définissent un plan ; puis on mènera à la surface un plan tangent parallèle à ce plan.

IV. — PLAN TANGENT PAR UN POINT EXTÉRIEUR, LE POINT DE CONTACT ÉTANT SUR UNE GÉNÉRATRICE DONNÉE.

392. — Soit un hyperboloïde de révolution défini par son axe vertical o et la génératrice A. Proposons-nous de mener par le point P (3) un plan tangent à la surface, le point de contact étant sur A (fig. 173).

Le plan tangent inconnu est complètement déterminé par le point P (3) et par la droite A. L'horizontale de ce plan passant par le point P passe aussi par le point a(3) de la droite A. La trace du plan tangent sur le plan du cercle de gorge est donc la parallèle à Pa menée par la trace α de A sur le plan du cercle de gorge.

Cette trace coupe le cercle de gorge en un deuxième point β. Par suite, le plan tangent considéré coupe l'hyperboloïde suivant une deuxième génératrice dont la projection horizontale est tangente en β au cercle de gorge. Finalement, cette seconde génératrice coupe la première au point de contact cherché m, dont la cote se déduit de l'échelle de A.

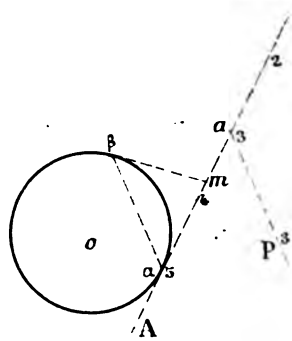


Fig. 173.

V. — PLAN TANGENT PARALLÈLE A UNE DROITE, LE POINT DE CONTACT ÉTANT SUR UNE GÉNÉRATRICE.

393. — Soit un hyperboloïde défini par son axe vertical o et la génératrice A (fig. 174). Nous voulons mener à la surface un plan tangent parallèle à D, le point de contact étant sur A.

Le plan tangent inconnu devant contenir A et être parallèle à D sera déterminé par A et par une parallèle à D menée par un point quelconque p (4) de A. Cette parallèle est p (4) a_1 (5), la longueur pa_1 étant égale au module de D.

Une horizontale de ce plan tangent est la droite $a(5)\,a_1(5)$, donc la trace du plan tangent sur le plan du cercle de gorge est la parallèle à aa_1 menée par la trace α de A sur le plan du cercle de gorge. Cette dernière trace coupe le cercle de gorge en un second point β. Le plan tangent coupe donc l'hyperboloïde suivant une deuxième génératrice tangente en β au cercle de gorge, et dont le point de rencontre avec la première A est le point de contact cherché.

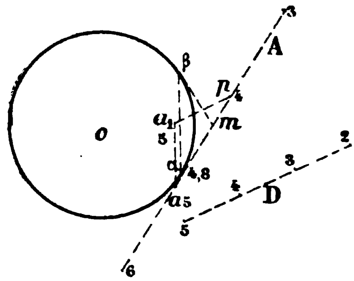


Fig. 174.

La cote du point de contact *m* est donnée par l'échelle de A.

VI. — CONTOUR APPARENT, AXE OBLIQUE.

394. — Proposons-nous de trouver un point du contour apparent d'une surface gauche de révolution à axe quelconque.

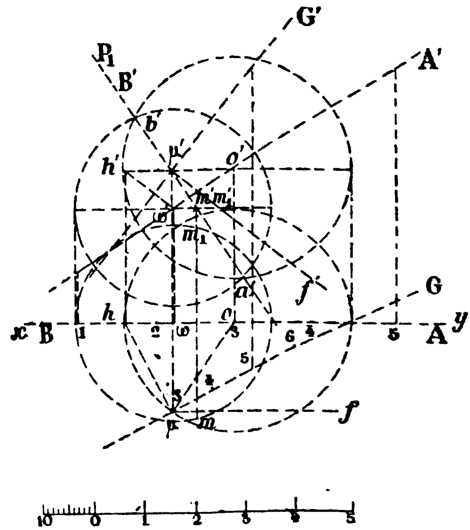


Fig. 175.

Soit A l'axe, G une génératrice de la surface (fig. 175). Commençons par prendre comme ligne de terre la droite A, les pro-

ections verticales de l'axe et de la génératrice sont alors A′ et G′.

Choisissons ensuite sur la génératrice un point arbitraire $\mu\mu'$ et menons par ce point un plan perpendiculaire à l'axe, ce sera le plan du parallèle. Dans l'épure, ce plan est de bout et il a pour trace verticale P_1 perpendiculaire à A′ menée par μ'.

Menons ensuite le plan normal en $\mu\mu'$ à la génératrice GG′.

Il est déterminé par l'horizontale $\mu h \mu h'$ et par la ligne de front $\mu f \mu' f'$. Puis cherchons l'intersection de ce plan normal avec l'axe, à l'aide du plan vertical A qui coupe l'horizontale $\mu h \mu' h'$ en hh' et la ligne de front à l'infini. On a donc mené par h' une parallèle à $\mu' f'$ qui rencontre l'axe AA′ en $\omega\omega'$.

Ce point $\omega\omega'$ est le centre de la sphère inscrite dans la surface tout le long du parallèle considéré.

395. — Les points sur le contour apparent vertical par exemple se trouveront dans le plan du parallèle P_1 et aussi dans le plan du contour apparent vertical de la sphère inscrite, c'est-à-dire dans le plan de front ω. Ils seront par suite sur la droite BB′, intersection de ces deux plans.

Les points cherchés se trouvent de plus sur le parallèle, ils sont donc à l'intersection de BB′ avec le parallèle, ou encore à l'intersection de la droite BB′ avec une sphère quelconque passant par le parallèle.

Nous avons choisi en particulier la sphère ayant pour centre le point de rencontre oo' de l'axe avec le plan horizontal μ'. Cette sphère a pour rayon $o\mu$, ce qui permet de figurer ses contours apparents.

Finalement la droite BB′ coupe cette sphère oo' en a', b' qui sont des points du contour apparent vertical.

Les normales en ces deux points sont $\omega' a'$, $\omega' b'$ dont les longueurs donnent en même temps le rayon de la sphère inscrite.

Le contour apparent vertical n'est pas autre chose ici que la méridienne principale.

396. — Les points sur le contour apparent horizontal se trouveront également dans le plan du parallèle P_1 et aussi dans le plan du contour apparent horizontal de la sphère inscrite, c'est-à-dire dans le plan horizontal ω'. Ils se trouvent donc sur la ligne de bout m' et en même temps sur le parallèle P, ou encore sur la même sphère o que précédemment.

Nous pourrions donc couper la sphère o par le plan horizontal

m', ce qui donnerait un parallèle sur lequel se trouverait le point demandé en m ou m_1.

Les normales en ces deux points sont ωm, ωm_1, et comme vérification $\omega m = \omega' a'$, ces longueurs représentant toutes deux le rayon de la sphère inscrite.

Au lieu d'employer ce procédé, nous nous sommes contentés de projeter les points m, m_1 sur le contour apparent horizontal de la sphère inscrite ω.

LIVRE XIV

SECTIONS PLANES

CHAPITRE PREMIER

I. — SECTION PLANE DU CONE DE RÉVOLUTION.

397. — THÉORÈME (*de Dandelin*). — *Toute section plane d'un cône ou d'un cylindre de révolution est une des courbes, ellipse, hyperbole ou parabole, ayant :*

1° *Pour axe focal, l'intersection du plan sécant avec le plan méridien perpendiculaire au plan sécant ;*

2° *Pour foyers, les points de contact du plan sécant avec les sphères inscrites dans le cône et tangentes au plan sécant ;*

3° *Pour directrices, les droites d'intersection du plan sécant avec les plans des parallèles de contact du cône et des sphères inscrites précédentes.*

En effet, prenons comme plan vertical (fig. 176) le plan méridien perpendiculaire au plan sécant et comme plan horizontal un plan perpendiculaire à l'axe.

Soit S'A', S'B' les deux génératrices principales du cône, A'B' la trace verticale du plan sécant qui est de bout.

Remarquons d'abord que le plan vertical passant par l'axe est un plan de symétrie pour le cône, puisqu'il est perpendiculaire sur le plan sécant, c'est aussi un plan de symétrie pour ce plan sécant.

C'est donc encore un plan de symétrie pour l'intersection, et par suite la ligne de plus grande pente ABA'B' est un axe de la courbe.

Figurons les sphères inscrites dans le cône et tangentes au plan

sécant, elles ont pour contour apparent vertical les deux circonférences $o'o'_1$, ayant leurs centres sur l'axe et tangentes aux génératrices principales S'A', S'B' ainsi qu'à la trace verticale du plan sécant.

Soit $a'b'ab$ le cercle de contact de l'une des sphères, choisis-

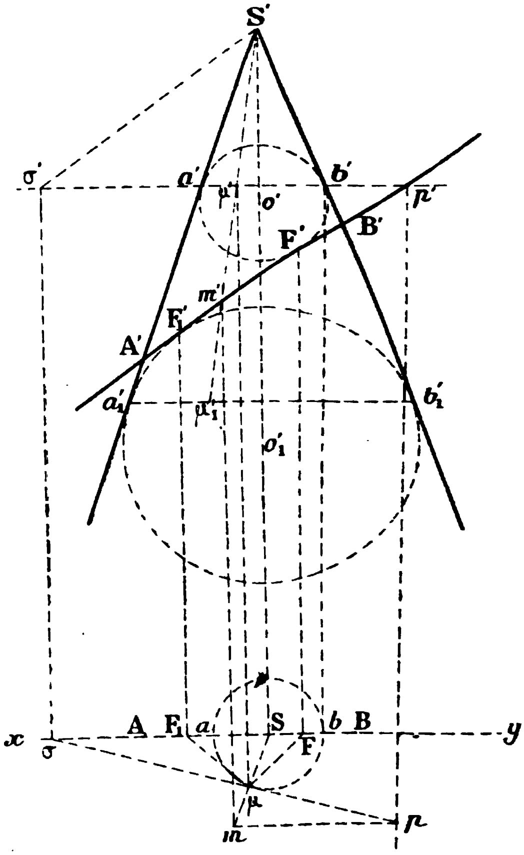


Fig. 176.

sons sur ce parallèle un point $\mu\mu'$ et joignons-le au sommet du cône, pour avoir suivant $S\mu S'\mu'$ une génératrice de ce cône.

Cette génératrice coupe le plan sécant au point mm' qui est un point de la section.

Le plan sécant est tangent aux deux sphères inscrites en FF', $F_1F'_1$; donc les droites $mFm'F'$, $m_1Fm'F'_1$ sont aussi tan-

gentes aux sphères, aux deux mêmes points. D'un autre côté, la génératrice $SmS'm'$ est aussi tangente aux deux sphères aux points $\mu\mu'$, $\mu_1\mu'_1$, et par suite on a :

$$(mFm'F') = (m\mu m'\mu'),$$

et :

$$(mF_1\, m'F'_1) = (m\mu_1 m'\mu'_1).$$

D'où, en ajoutant :

$$(mF\, mF') + (mF\, m'F'_1) = (m\mu m'\mu') + (m\mu_1 m\mu'_1) =$$

$$(\mu\mu_1\, \mu'\mu'_1) = a'a'_1,$$

quantité constante.

Les deux points FF', $F_1F'_1$ sont donc les foyers de la courbe dans l'espace.

Mettons en évidence maintenant la propriété de la directrice. Pour cela, considérons l'intersection du plan sécant avec le plan du parallèle de contact $a'b'$, c'est la ligne de bout p'. Menons ensuite par mm' une parallèle à $ABA'B'$ qui coupe la ligne de bout p' en pp'.

Enfin, menons aussi par SS' une parallèle à $ABA'B'$ qui coupe le plan du parallèle de contact en $\sigma'\sigma$.

Les deux droites $S\sigma S'\sigma'$, $mpm'p'$ étant parallèles à $ABA'B'$ sont aussi parallèles entre elles, et par suite elles sont dans un même plan qui contient en outre la génératrice $SmS'm'$.

On en déduit que les traces $\sigma\sigma'$, $\mu\mu'$, pp' des trois droites $S\sigma S'\sigma'$, $S\mu S'\mu'$, $mpm'p'$ sur le plan du parallèle sont en ligne droite.

Nous formons ainsi les triangles semblables $S\mu\sigma\ S'\mu'\sigma'$, $m\mu p\ m'\mu'p'$ qui donnent :

$$\frac{(m\mu\ m'\mu')}{(mp\ m'p')} = \frac{(S\mu\ S'\mu')}{(S\sigma\ S'\sigma')} = \frac{S'a'}{S'\sigma'}.$$

Or $m\mu m'\mu'$ est égal à $mFm'F'$ comme tangentes issues du point mm' à la sphère, donc :

$$\frac{(mF\ m'F')}{(mp\ m'p')} = \frac{S'a'}{S'\sigma'},$$

rapport constant.

Le point FF′ est donc un foyer dans l'espace, la ligne de bout p' étant la directrice correspondante.

Remarque. — Au lieu d'employer une sphère inscrite dans le cône et tangente au plan sécant, choisissons une sphère toujours inscrite dans le cône, mais coupant le plan sécant.

En remplaçant la droite $mFm'F'$ par la tangente menée par mm' à la section faite dans la sphère par le plan sécant, soit $mtm't'$, on aurait encore :

$$\frac{(mtm't')}{(mp\,m'p')} = \frac{S'a'}{S'\sigma'}.$$

Donc le cercle d'intersection de la sphère et du plan sécant serait alors un cercle focal, la ligne de bout p' étant la directrice correspondante.

398. — Un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire pour le cône de révolution peut s'appliquer aussi à la section plane d'une surface gauche de révolution. Nous allons nous en servir pour la méridienne principale en particulier.

Soit une surface gauche de révolution ayant pour axe la ligne de bout o' dans le plan horizontal (fig. 177) et définie de plus par la génératrice principale horizontale AA′.

Commençons par choisir sur la génératrice AA′ deux points arbitraires aa', bb', et figurons les parallèles passant par ces deux points. Ces parallèles coupent le plan méridien principal horizontal o' aux points $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, qui sont deux points de la méridienne principale.

La normale en aa' à la surface est aussi normale à la génératrice A, elle se projette donc horizontalement suivant la perpendiculaire à A menée par a. Soit ω son point de rencontre avec l'axe. Le point ω est alors le centre de la sphère inscrite dans la surface tout le long du parallèle $a\alpha$, le rayon de cette sphère étant mesuré par $\omega\alpha$. Nous avons figuré le contour apparent horizontal de cette sphère, c'est une circonférence décrite de ω comme centre avec $\omega\alpha$ pour rayon. De même, la sphère inscrite tout le long du parallèle $b\beta$ a pour trace horizontale et en même temps pour contour apparent la circonférence décrite de ω_1 comme centre avec $\omega_1\beta$ pour rayon.

Considérons maintenant une génératrice quelconque BB′, sa

projection verticale est une tangente quelconque au cercle de gorge, soit B′. Nous l'avons projetée horizontalement à l'aide de ses points de rencontre *mm′*, *nn′*, avec les parallèles des points *aa′*, *bb′*. Cette génératrice rencontre le plan méridien principal, c'est-à-dire le plan horizontal, au point *pp′* qui est un point de la méridienne principale.

Or la génératrice *pmn p′m′n′* est tangente aux deux sphères ω,

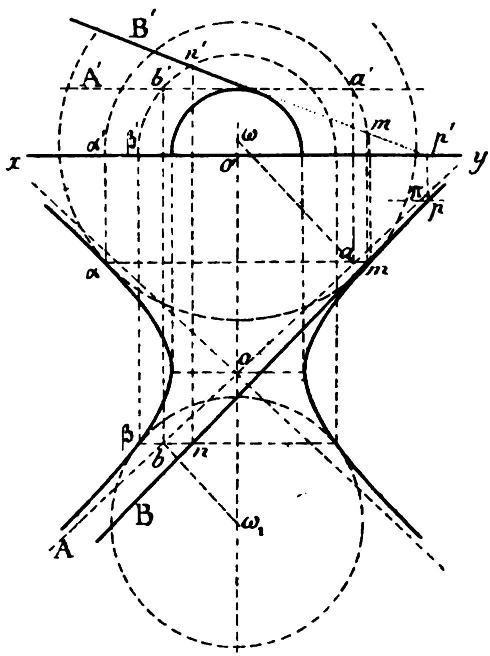


Fig. 177.

ω_1, les longueurs *pmp′m′ pnp′n′* sont aussi les distances tangentielles du point *pp′* aux contours apparents horizontaux des deux sphères.

D'un autre côté, si nous faisons tourner la génératrice BB′ autour de l'axe, de façon à la faire coïncider avec AA′, les points *mm′*, *nn′*, *pp′* viennent se placer en *aa′*, *bb′*, π, et les longueurs *pm*, *pn* sont mesurées par πa, πb. Mais la différence entre les longueurs πb, πa est constante, puisqu'elle est égale à *ab*, donc la différence des distances tangentielles d'un point quel-

conque p de la méridienne aux deux cercles fixes ω, ω_1 est constante. Autrement dit, la méridienne principale est une hyperbole admettant comme cercles focaux les cercles ω, ω_1.

II. — PROJECTION SUR UN PLAN PERPENDICULAIRE A L'AXE.

399. — THÉORÈME. — ***Toute section plane d'un cône de révolution se projette sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône suivant une des courbes, ellipse, hyperbole ou parabole, ayant pour foyer le pied de l'axe, et pour directrice correspondante la projection de l'intersection du plan sécant avec le plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet du cône.***

Soit un cône de révolution ayant pour sommet SS′, son axe vertical, $aba'b'$ étant un cercle de base du cône. Coupons ensuite ce cône par le plan de bout $P\alpha P_1$. Une génératrice quelconque $S\mu S'\mu'$ coupe le plan sécant au point mm'. Le plan de front m coupe la trace horizontale du plan sécant au point pp'. D'un autre

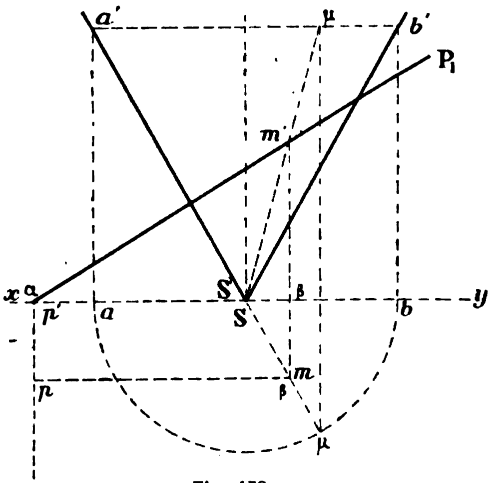


Fig. 178.

côté, la verticale m coupe le plan horizontal au point $\beta\beta'$ (fig. 178).

Le triangle rectangle $Sm\beta S'm'\beta'$ donne :

$$S\beta = m'\beta' \text{ tang } \theta,$$

en appelant θ le demi-angle au sommet du cône.

De même, le triangle rectangle $m\beta p m'\beta' p'$ donne :

$$p\beta = m'\beta' \text{ tang } \alpha,$$

en appelant α l'angle du plan sécant avec l'axe.

On en déduit, en divisant ces deux égalités membre à membre :

$$\frac{S\beta}{p\beta} = \frac{\text{tang } \theta}{\text{tang } \alpha}.$$

Le lieu du point β ou du point m est donc bien une conique ayant pour foyer le point S et pour directrice P.

III. — NATURE DE LA SECTION.

400. — Nous avons reconnu que, si le plan sécant coupait une seule nappe du cône, les deux sphères inscrites étaient d'un même côté par rapport au sommet du cône, et la section était une ellipse. Nous constatons en même temps que le plan sécant fait avec l'axe un angle plus grand que le demi-angle au sommet du cône.

En faisant les mêmes raisonnements avec un plan coupant les deux nappes du cône, on constate d'abord que les deux sphères sont de part et d'autre du sommet, et que la quantité constante n'est plus $mF + mF_1$, mais $mF_1 - mF$. Donc dans ce cas la section est une hyperbole et l'on reconnaît en même temps que l'angle du plan sécant avec l'axe est plus petit que le demi-angle au sommet du cône.

Enfin, lorsque le plan sécant fait avec l'axe un angle égal au demi-angle au sommet du cône, il n'y a plus qu'une sphère inscrite. La démonstration relative aux deux foyers est en défaut, mais celle concernant la directrice montre que la courbe est le lieu des points équidistants du foyer et de la directrice. La section est donc une parabole.

401. — **1er exemple : Ellipse.** — Soit le cône de révolution à axe vertical ayant pour sommet S et pour génératrice A ou la symétrique A_1 par rapport à la verticale S, puis le plan P défini par son échelle de pente (fig. 179).

Pour déterminer un point, on a coupé les deux surfaces par le

plan horizontal (1) qui donne dans le plan sécant l'horizontale *h* (1) et dans le cône la circonférence de centre *o* et passant par le point μ (1) de A. Ces deux lignes se coupent en *m* ou m_1.

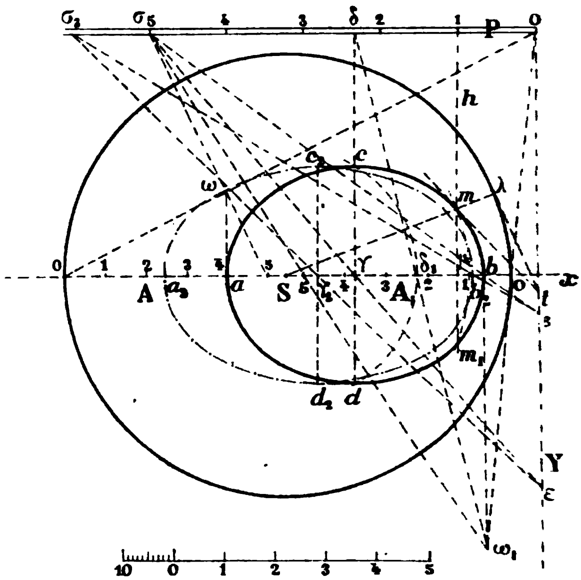


Fig. 179.

La tangente en *m* est l'intersection du plan tangent qui a pour trace horizontale la tangente λ*t* à la base avec le plan sécant. Les deux traces horizontales se coupent en *t*, donc *mt* est la tangente cherchée.

Le module du plan étant plus grand que celui de A, la section est une ellipse.

Un axe est la ligne de plus grande pente *ox* qui rencontre l'axe du cône. Les sommets sur cet axe sont les points de rencontre de A ou A_1 avec le plan P.

Pour A, les horizontales (0) et (5) qui s'appuient sur A et sur l'échelle de pente P se rencontrent au point ω par lequel on mène l'horizontale du plan sécant qui donne en *a* un premier sommet.

Pour A_1, le point fixe est ω_1, dont l'horizontale donne le second sommet *b*.

Le centre est alors au milieu de ab en γ. Le deuxième axe est donc l'horizontale $\gamma\delta$.

La droite $\omega_1\delta$ donne en δ_1 le point de A_1 qui a même cote que δ.

Il en résulte que le plan horizontal γ coupe le plan sécant suivant $\gamma\delta$ et le cône suivant la circonférence décrite de S comme centre avec $S\delta_1$ pour rayon, d'où l'on déduit en c et d les deux nouveaux sommets.

Nous avons enfin cherché la grandeur de la section, en rabattant le plan sécant sur le plan horizontal autour de sa trace horizontale tY. Le point σ (5) de la ligne de plus grande pente se rabat en σ_2 à une distance de la charnière égale à $5\sqrt{1+m^2} = 5\sqrt{1+\overline{1,5}^2} = 9$.

La droite $\sigma\gamma\varepsilon$ se rabat suivant $\sigma_2\gamma_2\varepsilon$, ce qui donne en γ_2 le centre de la courbe et par suite les positions des deux axes. De même, la droite $\sigma b\beta$ se rabat suivant $\sigma_2\beta$, ce qui donne en b_2 le rabattement du sommet b. Enfin les sommets c et d se rabattent en c_2d_2.

402. — 2^e exemple : Hyperbole. — On donne un cône à axe vertical défini par son sommet et la génératrice A (fig. 180). Un plan sécant est donné par son échelle de pente P. Ayant déjà fait précédemment la détermination d'un point, nous passons immédiatement à la recherche des éléments de la courbe.

Nous voyons d'abord que la section est du genre hyperbole, parce que le module du plan est plus petit que celui de la génératrice A.

Les sommets sont les points de rencontre des génératrices A, A_1 avec le plan P. On les a trouvés, comme dans l'exemple précédent, à l'aide des points fixes ω, ω_1, ce qui a donné les sommets a, b.

Pour trouver les asymptotes, commençons par chercher les directions des génératrices du cône parallèles au plan sécant. Pour cela, menons par le sommet du cône un plan parallèle au plan sécant. L'horizontale $S\omega$ donne en θ le point de l'échelle de pente P ayant même cote que S.

Il suffit donc de prendre $S\mu = \theta\pi$, et de mener par μ une parallèle à la trace horizontale XX_1 du plan sécant, pour avoir suivant YY_1 la trace horizontale du plan parallèle au plan sécant mené par le sommet du cône.

Cette droite coupe la base du cône aux points *c*, *d*, donc S*c*, S*d* sont les génératrices du cône parallèles au plan sécant. Les points d'intersection correspondants sont rejetés à l'infini ; quant aux limites des tangentes en ces points, c'est-à-dire les asym-

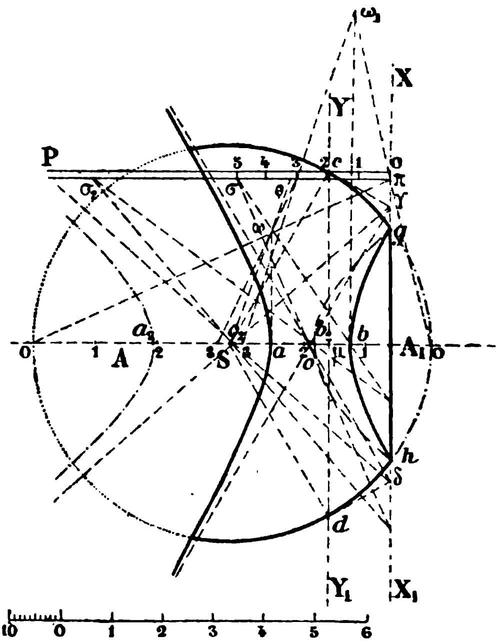


Fig. 180.

ptotes, elles s'obtiendront en prenant comme toujours l'intersection du plan tangent et du plan sécant.

Ainsi, la tangente en *c* à la base du cône coupe la trace XX_1 du plan sécant au point γ, et, comme le point de contact est à l'infini sur S*c*, l'asymptote sera la parallèle à S*c* menée par γ.

La seconde asymptote $o\delta$ s'obtient de la même façon que la précédente.

On aurait pu aussi trouver les asymptotes en tenant compte de ce que nous avons les sommets *a*, *b* et le foyer S.

Nous avons rabattu la section sur le plan horizontal en procédant comme dans l'exemple précédent.

403. — 3e exemple : Parabole. — Soit toujours S le sommet du cône, A une génératrice de la surface et P la ligne de

lus grande pente du plan sécant (fig. 181). Le module du plan tant égal au module de la génératrice, la section est une arabole.

Le sommet *a* est l'intersection de la génératrice A dans le plan éridien perpendiculaire au plan sécant avec ce plan sécant.

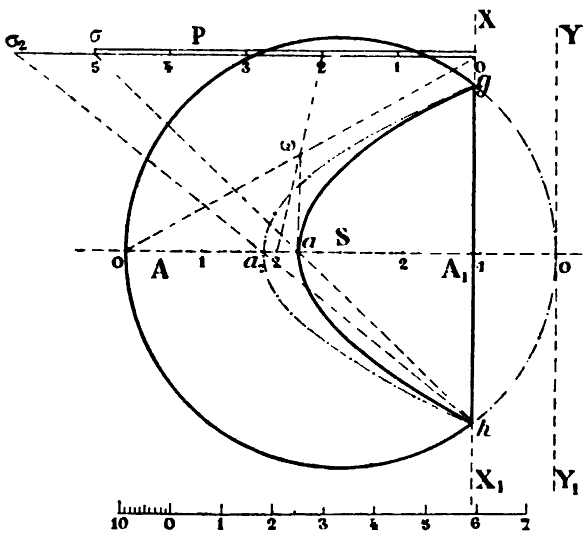


Fig. 181.

Le foyer est le point S. La section, comme dans l'exemple précédent, passe par les points de rencontre de la base avec la trace horizontale du plan sécant *g* et *h*.

Le sommet de la section rabattue est a_2, sa détermination étant d'ailleurs indépendante de la nature de la courbe.

Dans ces trois exemples, on a représenté la partie solide du cône placée au-dessous du plan sécant et au-dessus du plan horizontal.

CHAPITRE II

I. — SECTION PLANE DU CYLINDRE DE RÉVOLUTION.

404. — Le théorème de Dandelin, que nous avons démontré dans le cas du cône (399), est applicable également au cylindre de révolution qui est un cas particulier du cône, sauf que les sections sont toujours des ellipses. Soit un cylindre de révolution à axe vertical (fig. 182) et un plan sécant défini par son échelle de pente P.

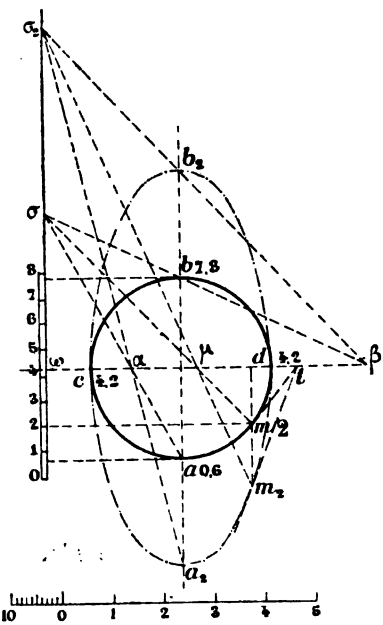


Fig. 182.

La projection horizontale de la section est évidemment connue, c'est la base même du cylindre. Pour en déterminer un point m, il suffit de chercher la cote de ce point en le considérant comme appartenant au plan sécant. Ainsi, le point m (2) est un point de la courbe. L'axe focal se projette horizontalement suivant la ligne de plus grande pente ab. Les projections horizontales des sommets sont donc a (0,6), b (7,8), c (4,2), d (4,2).

Nous avons enfin rabattu la section sur le plan horizontal mené par le centre autour de l'axe horizontal cd. La longueur $\sigma\omega$ étant égale à 6 modules du plan, le point σ se rabat en σ_2 à une distance de la charnière $\sigma_2\omega = 6\sqrt{1 + m^2} = 6\sqrt{1 + \overline{0,5}^2} = 6,6.$

Les droites σa, σb se rabattent suivant $\sigma_2 \alpha a_2$, $\sigma_2 \beta b_2$, ce qui donne en a_2, b_2, c, d les quatre sommets de la section rabattue.

La même construction appliquée au point quelconque m donne m_2, la tangente en ce point passant par le point fixe sur la charnière.

II. — PROJECTION D'UNE CIRCONFÉRENCE.

405. — Soit mm' (fig. 183) un point de la section par le plan de bout A'B' d'un cylindre de révolution à axe vertical o. Considérons le sommet CC' du petit axe, et menons par ce point une perpendiculaire sur le plan ABCDA'B'C'D'. Prenons ensuite sur cette droite un point $C_1C'_1$ tel que les longueurs $C_1\omega C'_1\omega'$ et $A\omega'A\omega'$ soient égales entre elles.

Le point $C_1C'_1$ ainsi obtenu détermine, avec ABA'B', un certain plan. Proposons-nous de trouver le lieu des points de rencontre de ce plan avec des parallèles à $CC_1C'C'_1$, menées par les différents points de la section du cylindre. Soit $m_1m'_1$ l'un de ces points.

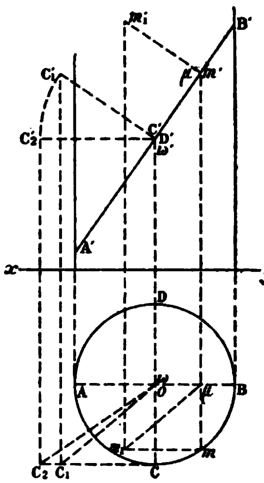


Fig. 183.

Les deux triangles $(m\mu m_1 m'\mu' m'_1)$, $(C\omega C_1 C'\omega' C'_1)$ sont semblables et donnent :

$$\frac{(m_1\mu m'_1\mu')}{(m\mu m'\mu')} = \frac{(C_1\omega C'_1\omega')}{(C\omega C'\omega')} = \frac{A'\omega'}{A\omega'} = \frac{A'\mu'}{A\mu}.$$

Donc la courbe contenue dans le plan C_1AB est semblable à la circonférence AmB et, par suite, cette courbe est elle-même une circonférence.

Ainsi l'ellipse, section plane du cylindre, peut être considérée comme la projection orthogonale d'une circonférence.

Pour démontrer la réciproque, il suffit de faire voir qu'une ellipse quelconque peut être considérée comme la section plane d'un cylindre de révolution.

En effet, soit AB, CD les deux axes d'une ellipse (fig. 184). Dans le plan perpendiculaire à ABCD, mené par le grand axe AB, décrivons une circonférence sur Aω comme diamètre, et prenons la corde Ao égale au demi petit axe Cω.

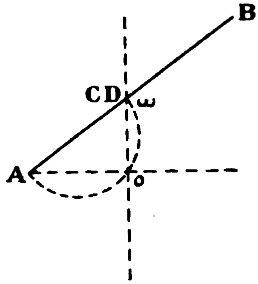


Fig. 184.

Considérons alors le cylindre de révolution ayant pour axe ωo et pour rayon Cω. Ce cylindre sera coupé par le plan ABCD suivant une ellipse ayant pour sommets ABCD et qui coïncide avec l'ellipse donnée.

Cette détermination peut se faire connaissant seulement les quatre points A, B, C, D. Donnons-nous alors une circonférence quelconque et projetons-la sur le plan ABCD, puis déterminons ces quatre points A, B, C, D, d'où nous déduirons le cylindre de révolution.

Les égalités précédentes nous prouvent encore que la circonférence de l'espace est semblable à la base du cylindre et que les différents points de la circonférence se projettent orthogonalement sur la section plane de ce cylindre.

Donc, en résumé, la projection orthogonale d'une circonférence est bien une ellipse.

III. — DÉVELOPPEMENT DU CYLINDRE.

406. — Le développement de la surface latérale d'un cylindre est la limite du développement de la surface latérale d'un prisme inscrit, les côtés de la base du prisme diminuant indéfiniment.

Nous ne nous occuperons ici que du cylindre de révolution.

La base du cylindre a pour transformée une ligne droite perpendiculaire sur les transformées des génératrices.

Soit un cylindre de révolution à axe horizontal *oy* (fig. 185).

Prenons comme ligne de terre LT une perpendiculaire sur cet axe, alors la base du cylindre est dans le plan vertical une circonférence ayant pour centre o' et pour rayon le rayon du cylindre.

Prenons comme génératrice initiale AA′ et faisons le développement sur le plan horizontal, en prenant comme génératrice initiale correspondante A_1.

La transformée de la base contenue dans le plan vertical sera perpendiculaire sur A_1, soit LT.

Pour trouver la transformée d'une génératrice quelconque μ', il suffit de prendre la longueur $\omega_1\mu_1$ égale à l'arc $A'\mu'$. Quand cet arc est très petit, on peut le remplacer par sa corde; mais, quand il est quelconque, on le décompose en petits arcs que l'on rem-

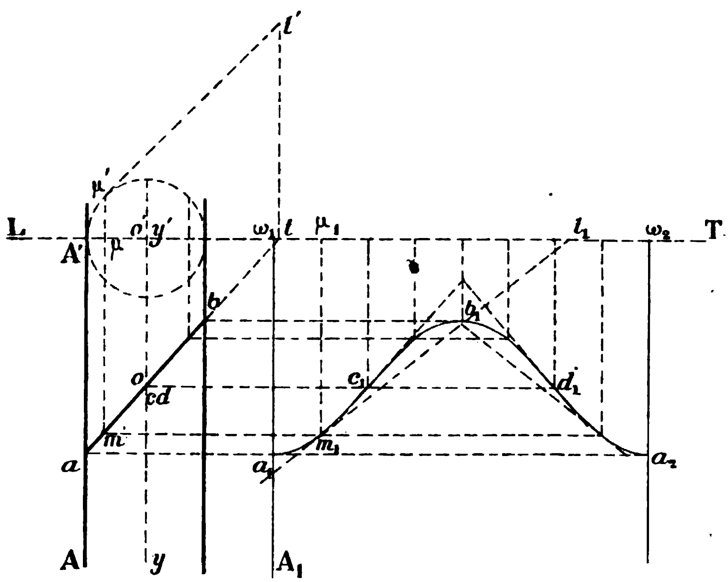


Fig. 185.

place chacun par sa corde, pourvu que la différence entre chaque petit arc et la corde correspondante soit négligeable graphiquement.

Pour plus d'exactitude, on peut calculer l'arc $A'\mu'$ en fonction de l'angle $A'o'\mu'$, à l'aide de la relation :

$$\text{arc } A'\mu' = 2\pi R \frac{(\text{angle } A'o'\mu')^\circ}{360^\circ}.$$

Il suffit donc de calculer une fois pour toutes le nombre $\frac{2\pi R}{360^\circ}$ et de le multiplier chaque fois par le nombre de degrés $(A'o'\mu')^\circ$.

Le résultat obtenu représente des unités de même espèce que celles que l'on a employées pour mesurer R.

On peut aussi éviter ces calculs en cherchant seulement la longueur $2\pi R$ de la circonférence de base.

On porte cette longueur suivant $\omega_1\omega_2$. Puis on partage la base en un nombre quelconque de parties égales et $\omega_1\omega_2$ dans le même nombre de parties égales.

On trouve ainsi les transformées exactes d'un certain nombre de génératrices.

Pour en trouver une autre quelconque, il suffira d'établir sa position par rapport à la génératrice exacte la plus voisine.

407. — Transformée d'une section plane. — Nous avons appliqué dans l'épure les raisonnements précédents à la section du cylindre par le plan vertical *abcd*. La génératrice μ ayant pour transformée μ_1, le point correspondant à m s'obtient en prenant $m_1\mu_1 = m\mu$.

Pour trouver la tangente, on remarque que dans le cas d'un prisme l'angle d'un côté du polygone de section avec les arêtes se conserve dans le développement. Il en est donc de même à la limite, c'est-à-dire que la tangente à une courbe tracée sur le cylindre fait avec la génératrice un angle qui se conserve dans le développement.

Il en résulte que la tangente à une courbe forme avec la génératrice et avec la tangente à la section droite un triangle qui se conserve aussi dans le développement. On énonce ce résultat en disant que la sous-tangente ne change pas.

Dans l'épure, le triangle considéré est $m\mu t m'\mu' t'$, la sous-tangente étant mesurée par $\mu' t'$.

Construisons donc dans le développement sur $m_1\mu_1$ le triangle $m_1\mu_1 t_1$ égal au triangle $m\mu t m'\mu' t'$. Pour cela, nous avons simplement pris $\mu_1 t_1$ égal à la sous-tangente $\mu' t'$. Finalement $m_1 t_1$ est la tangente cherchée.

La même construction appliquée aux sommets a, b donne en $a_1 b_1 a_2$ les sommets de la transformée.

Aux points c, d, la tangente à la courbe fait avec la génératrice du cylindre le plus petit angle possible, il en est donc de même en c_1, d_1 dans le développement, et par suite les points c_1, d_1 sont des point d'inflexion. La tangente en c_1 est parallèle à ab.

CHAPITRE III

I. — SECTION ANTIPARALLÈLE DU CONE A BASE CIRCULAIRE.

408. — Étant donné un cône à base circulaire, si l'on mène par le sommet du cône et le centre de la base un plan perpendiculaire sur le plan de base, ce plan est un plan de symétrie pour le cône, et on l'appelle plan principal.

Soit SA, SB (fig. 186) les deux génératrices d'intersection du cône avec le plan principal, menons une droite CD antiparallèle de AB par rapport à SA, SB, puis par cette droite faisons passer un plan perpendiculaire sur le plan SAB. On dit que ce dernier plan est antiparallèle du plan de base par rapport au cône.

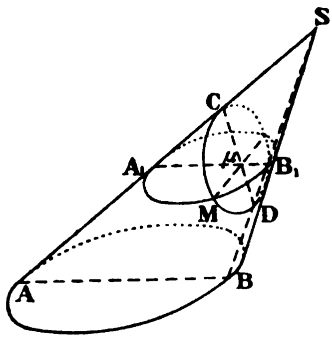


Fig. 186.

409. — THÉORÈME. — *La section d'un cône à base circulaire par un plan antiparallèle du plan de base est une circonférence.*

En effet, coupons le cône et le plan sécant par un plan parallèle au plan de base; la section dans le cône sera une circonférence décrite sur A_1B_1 comme diamètre. D'ailleurs le plan auxiliaire coupe le plan sécant suivant $M\mu$ perpendiculaire au plan SAB.

Or, dans la circonférence A_1MB_1, nous avons :

$$\overline{M\mu}^2 = A_1\mu \times B_1\mu ;$$

mais, les droites A_1B_1 et CD étant antiparallèles, on a :

$$A_1\mu \times B_1\mu = C\mu \times D\mu.$$

Donc :

$$\overline{M\mu}^2 = C\mu \times D\mu.$$

Et par suite le lieu du point M est la circonférence décrite sur CD comme diamètre.

410. — Il résulte de ce théorème que tout cône ayant pour base une section plane d'une sphère coupe la sphère suivant une deuxième circonférence.

En effet, prenons comme plan de projection le plan passant par le sommet du cône, le centre de la sphère et le centre de la base. Ce plan sera perpendiculaire sur le plan de base, ce sera donc un plan principal du cône. Les génératrices principales SA, SB coupent le grand cercle de la sphère contenu dans le plan SAB (fig. 187) aux deux points C et D. Menons enfin par CD un plan perpendiculaire sur le plan SAB. Comme AB et CD sont antiparallèles par rapport à SA, SB, le plan que nous venons de construire coupera le cône et la sphère suivant deux circonférences décrites sur CD comme diamètre. Ces deux circonférences sont donc identiques et constituent avec la première circonférence décrite sur AB comme diamètre l'intersection des deux surfaces.

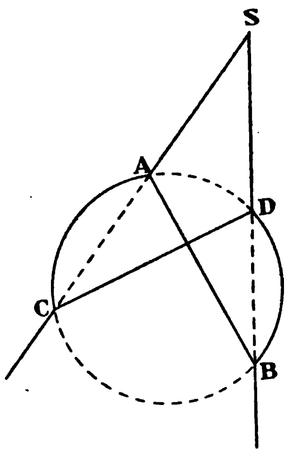


Fig. 187.

Les résultats précédents s'appliquent également au cylindre qui est un cas particulier du cône.

II. — OMBRE D'UN HÉMISPHÈRE.

411. — *On donne un hémisphère creux reposant par son pôle sur le plan horizontal. Soit* o(2) *le centre. Trouver les ombres produites, l'objet étant éclairé par le point lumineux* S(5) (fig. 188)

Nous commençons par prendre pour ligne de terre xy. La pro-

jection verticale o' du centre coïncide avec o ; quant au point S, il se projette verticalement en S'.

Dans ce système, la courbe de contact du cône circonscrit à la sphère se projette verticalement suivant $a'b'$, polaire de S' par rapport au contour apparent vertical.

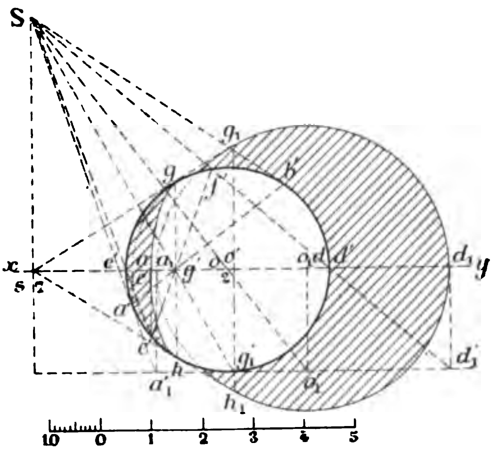


Fig. 188.

Le cône qui a pour sommet S' et pour base l'ouverture de l'hémisphère a pour contour apparent vertical S'c'S'd'. Ce cône coupe la sphère suivant une deuxième circonférence dont la projection verticale est la droite $e'f'$ passant d'ailleurs par le point de rencontre g' de $c'd'$ et $a'b'$.

La partie utile de l'ombre propre en projection verticale est $a'g'$, celle de l'ombre portée dans l'intérieur de l'hémisphère par l'ouverture de l'hémisphère se réduit à $e'g'$.

Connaissant d'ailleurs les plans des deux courbes, on sait en déduire les sommets de la projection horizontale. Nous nous sommes contentés de figurer dans l'épure les sommets a pour l'ombre propre, e pour l'ombre portée, puis les points de contact g et h avec le contour apparent horizontal de la sphère.

L'ombre propre en projection horizontale se réduit donc à l'arc gah qui est caché, tandis que l'ombre portée est limitée à l'arc geh qui est vu.

Il reste enfin à trouver l'ombre portée sur le plan horizontal. Elle se compose de l'ombre portée par la sphère complète et de

l'ombre portée par l'équateur. Cette dernière est une circonférence ayant pour centre $o_1o'_1$, ombre du point oo' et passant par $d_1d'_1$, ombre de dd'. La partie utile est limitée aux points g_1, h_1, ombres des points g et h. Pour l'ombre de la sphère, nous avons marqué simplement le sommet $a_1a'_1$, ombre de aa', la partie utile se réduisant à g_1a_1h.

La région vue de cette ombre portée est celle qui se trouve en dehors du contour apparent horizontal de la sphère.

III. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE SPHÈRE.

412. — Le théorème des sections antiparallèles permet de trouver l'intersection d'une droite et d'une sphère à l'aide de raisonnements différents de ceux que nous avons utilisés jusqu'à présent.

Soit la sphère o et la droite D définie par sa trace σ sur le plan horizontal mené par le centre de la sphère et par le point a dans le plan horizontal tangent au point le plus haut s de la sphère (fig. 189).

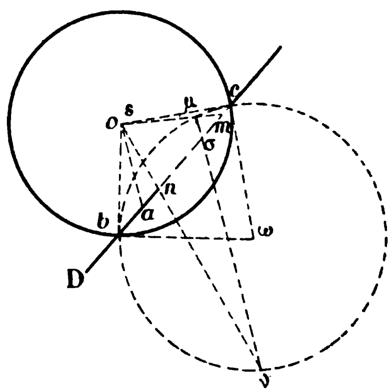


Fig. 189.

Considérons comme plan auxiliaire le plan projetant horizontalement la droite, il coupe la sphère suivant un petit cercle décrit sur bc comme diamètre. Le cône ayant pour sommet le point le plus haut s de la sphère et pour base ce petit cercle bc coupe la sphère suivant un deuxième cercle de rayon nul s. Donc, la base de ce cône dans un plan horizontal quelconque est une circonférence bitangente au contour apparent du cône. En particulier, la base dans le plan de l'équateur de la sphère est la circonférence ω tangente en b et c aux deux droites sb, sc.

On peut dire aussi que la perspective du petit cercle vertical bc sur le plan de l'équateur, en prenant comme point de vue le point s, est le cercle ω.

Cherchons ensuite la perspective de D sur le même plan.

Le point σ est à lui-même sa perspective ; d'ailleurs, la perspective de a est à l'infini. Donc la perspective de D est la parallèle à Sa menée par σ. Elle rencontre la perspective ω du cercle bc aux points μ, ν qui sont les perspectives des points cherchés m, n.

IV. — PLAN TANGENT PAR UNE DROITE.

413. — Les résultats que nous venons d'établir sont indépendants du choix du plan auxiliaire passant par D. Plus généralement, la perspective d'une section plane quelconque de la sphère sur le plan de l'équateur, en prenant comme point de vue le point le plus haut de la sphère, est une circonférence. Si l'on considère des plans passant par une même droite D, les sections dans l'espace passent par deux points fixes qui sont les points de rencontre de la droite D avec la sphère. Les perspectives de ces sections passeront également par deux points fixes.

Or, parmi les cercles passant par ces deux points fixes, il y en a deux réduits à un point, ces points seront alors les perspectives des points de contact des plans tangents à la sphère menés par la droite. Soit donc une droite D et une sphère définie comme dans l'exemple précédent (fig. 190). Considérons comme plan auxiliaire le plan vertical D, il coupe la sphère suivant une circonférence qui a pour perspective la circonférence ω. D'un autre côté, la perspective de D est la parallèle à Sa menée par σ, soit Δ.

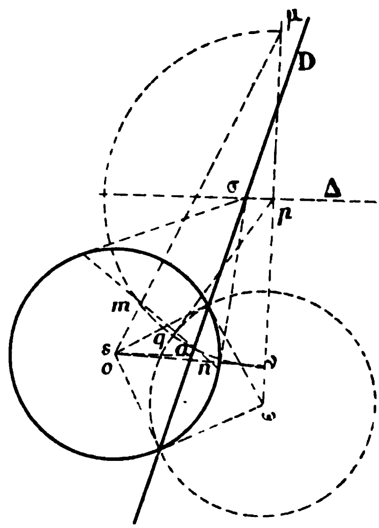


Fig. 190.

Il faut donc trouver les cercles de rayon nul passant par les points de rencontre de Δ avec le cercle ω. Pour cela, abaissons

de ω une perpendiculaire ωp sur Δ, puis menons par p une tangente à la circonférence ω. En rabattant la longueur pq sur $p\omega$ suivant $p\mu$, $p\nu$, on a finalement en μ et ν les perspectives des points de contact.

Ainsi donc les points de contact cherchés se trouvent sur $s\mu$, $s\nu$. D'ailleurs ils sont aussi sur la polaire du point σ par rapport au contour apparent horizontal de la sphère, ils sont donc finalement en m, n.

CHAPITRE IV

I. — SECTION PLANE D'UN CONE QUELCONQUE.

414. — Comme nous l'avons déjà dit à propos du cône de révolution, pour trouver un point quelconque d'une section plane d'un cône, il suffit de déterminer l'intersection du plan sécant avec une génératrice quelconque de la surface.

Il y a donc lieu d'employer des plans auxiliaires passant successivement par toutes les génératrices du cône.

Pour obtenir des constructions plus symétriques et en même temps plus rapides, il est avantageux d'assujettir le plan à une condition de plus; par exemple, à passer par une droite fixe menée par le sommet du cône.

Soit donc un cône défini par son sommet S (6) et par sa base dans le plan horizontal, puis un plan sécant défini par son échelle P (fig. 191).

Menons par le sommet du cône une droite quelconque, par exemple la parallèle à la ligne de plus grande pente P, elle coupe le plan de base au point σ, Sσ valant 6 modules du plan. Elle coupe ensuite le plan sécant en un point σ_1, qui est ici à l'infini dans la direction Sσ.

Soit de plus XX_1 l'intersection du plan de base et du plan sécant, c'est ici l'horizontale *o* du plan sécant.

Un plan auxiliaire quelconque mené par $S\sigma\sigma_1$ a pour trace sur le plan de base une droite quelconque $\sigma\alpha aa'$. Sa trace sur le plan sécant est $\sigma_1\alpha$, qui ici est parallèle à Sσ.

Ce plan auxiliaire coupe donc le cône suivant Sa, Sa', qui rencontrent $\sigma_1\alpha$ aux points a_1, a'_1. En résumé, a_1, a'_1 sont deux points de l'intersection. La cote du point a_1 peut se déduire des cotes de S (6) et a (0) ou de l'échelle du plan sécant.

On peut aussi dans le cas actuel employer comme surface auxi-

liaire un simple plan horizontal, par exemple le plan horizontal a. Il coupe le plan sécant suivant l'horizontale H (2) et le cône suivant une circonférence ayant pour centre le point o_2 de cote (2) sur So et passant par le point a_2 de cote (2) sur Sa. On obtient ainsi les points m, n et l'on a en même temps leur cote.

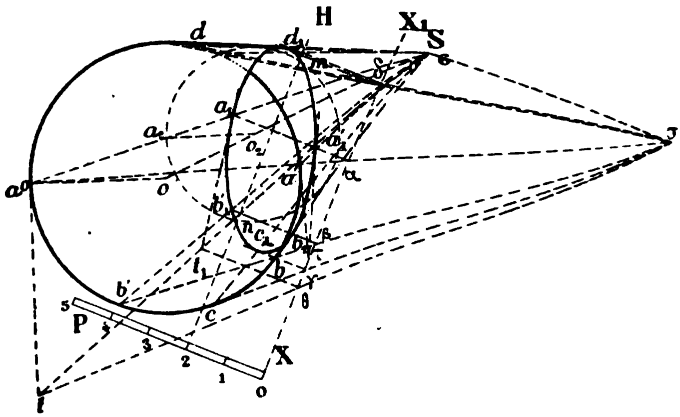


Fig. 191.

Cette façon de procéder, qui rentre tout à fait dans l'esprit de la méthode des plans cotés, ne convient réellement ici que par ce fait que la base du cône est une circonférence. D'un autre côté, elle ne permet pas de trouver un seul point remarquable et n'est bonne que pour obtenir des points courants. Aussi, nous allons continuer l'application de la première méthode.

415. — Tangente. — La tangente au point a_1 par exemple est l'intersection du plan sécant avec le plan tangent au cône au même point. Ce plan tangent est déterminé par la génératrice Sa_1a, et par la tangente at à la base. Nous connaissons déjà un point de la tangente, c'est le point de contact a_1. Il suffit donc d'en trouver un second, que l'on obtiendra en coupant le plan tangent et le plan sécant par l'un des plans auxiliaires, par exemple $\sigma\theta\sigma_1$. Cette façon de procéder revient à assimiler le plan tangent à un cône de sommet S et ayant pour base at. Le plan auxiliaire coupe le plan tangent suivant St et le plan sécant suivant $\sigma_1\theta$, ce qui donne en t_1 un second point de la tangente. En résumé, a_1t_1 est la tangente cherchée. Quand les données le permettent, il est avantageux aussi d'employer comme plan auxiliaire le plan de

base ; c'est ce que nous avons fait pour le point a_1. Le plan de base coupe le plan sécant suivant XX_1 et le plan tangent suivant $a'\tau$, donc $a'_1\tau$ est la tangente cherchée.

416. — Points sur les contours apparents. — Ces points, qu'il est très utile de déterminer, s'obtiennent en faisant passer le plan auxiliaire successivement par toutes les génératrices de contour apparent.

Ainsi, le plan passant par la génératrice de contour apparent Sb est le plan $\sigma b\beta\sigma_1$, il coupe le cône suivant Sb, Sb' et le plan sécant suivant $\sigma_1\beta$, ce qui donne les deux points b_1, b'_1. Sur ces deux points, il n'y en a qu'un de remarquable, c'est le point b_1. En ce point, la projection de la courbe est tangente au contour apparent en projection du cône. Ce point servira de plus de limite entre les parties vues et cachées de la courbe sur la surface du cône.

417. — Plans limites. — Les plans auxiliaires menés par $S\sigma\sigma_1$ ne donnent pas tous des points d'intersection. Les plans limites $\sigma\gamma\sigma_1$, $\sigma\delta\sigma_1$ s'obtiennent en menant par σ des tangentes à la base du cône. Les points correspondants sont c_1 et d_1. De plus, en ces deux points, les tangentes sont $\sigma_1 c_1$, $\sigma_1 d_1$, puisque ce sont précisément les intersections des plans tangents $S\sigma c$, $S\sigma d$ avec le plan sécant.

418. — Lorsqu'on juge que le nombre des points est suffisant, il suffit de les joindre dans le même ordre que les points correspondants de la base. Cette opération est facilitée en ayant soin de donner à chaque point le nom du point correspondant de la base, affecté d'un indice.

Ainsi, sur la base, nous trouvons les points dans l'ordre :

$$ab'cba'da.$$

Il suffira donc de joindre les points dans l'ordre :

$$a_1b'_1c_1b_1a'_1d_1a_1$$

pour avoir la courbe.

419. — Ponctuation. — Dans l'épure, nous avons représenté la surface opaque du cône comprise entre le plan de base et le plan sécant.

Pour arriver à ce résultat, on commence par établir la ponctuation de la courbe et de la base sur le cône réduit à sa surface

opaque seule et conservée tout entière. Les régions bca, $b_1c_1a_1$ sont donc vues, tandis que les régions $ba'd$, $b_1a'_1d_1$ sont cachées.

Ensuite, on conserve avec sa ponctuation primitive la surface du cône comprise entre les deux plans, bb_1 par exemple est conservée et vue. Enfin, une partie des courbes redevient vue comme contour apparent.

Ici, c'est d'abord la section qui redevient vue tout entière, et ce serait tout si le cône était solide; mais, comme il est réduit à sa surface, la portion de la base à l'intérieur de la section redevient également vue.

420. — Cas du cylindre. — Toutes les constructions précédentes s'appliquent aussi au cylindre ; seulement la droite fixe $\sigma\sigma_1$ est choisie parallèle aux génératrices du cylindre.

II. — AXES DE LA SECTION.

421. — Nous supposerons que la base se projette horizontalement suivant une circonférence. Dans ces conditions, proposons-nous de trouver les axes de la projection horizontale de la section.

Nous avons vu dans le cas d'un cône de révolution que, pour trouver les directions des asymptotes d'une section plane, on menait par le sommet du cône un plan parallèle au plan sécant, qui coupait le cône suivant les directions demandées.

Cette construction s'applique également dans le cas d'un cône quelconque. Soit donc (fig. 192) un cône défini par son sommet S

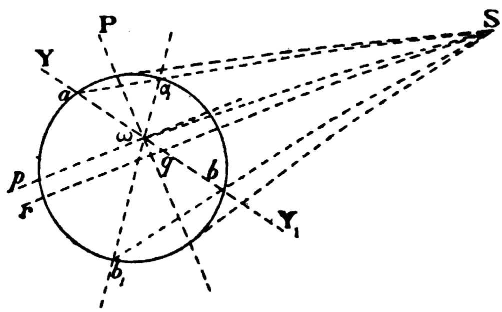


Fig. 192.

et sa base que nous supposons circulaire. Menons par le sommet du cône un plan parallèle au plan sécant, et soit YY_1 sa trace sur

le plan de base. Cette droite YY_1 coupe la base aux points a, b ; donc Sa, Sb seront les directions des asymptotes de la section.

En prenant les bissectrices de l'angle aSb, on aura les directions des axes de la projection de la section. Ce sont ces bissectrices que nous nous proposons de trouver dans le cas d'une section elliptique, alors que les points a, b sont imaginaires.

Lorsque a et b sont réels, les droites Sa, Sb coupent la base circulaire aux points a_1, b_1.

Or la corde a_1b_1 fait avec la corde ab des angles dont les bissectrices sont parallèles aux bissectrices de l'angle aSb.

En effet, soit ωp la bissectrice de l'angle $a\omega b$, et Sq la bissectrice de l'angle aSb, il s'agit de démontrer que ces deux droites sont parallèles, c'est-à-dire que les angles $a\omega p$, aqr sont égaux.

Mais l'angle $a\omega p$ a pour mesure :

$$\frac{ab_1}{4}+\frac{a_1b}{4}.$$

D'un autre côté l'angle aqr est égal à la somme $qaS + aSq$, il a donc pour mesure :

$$\frac{a_1b}{2}+\left(\frac{ab_1}{4}-\frac{a_1b}{4}\right)=\frac{ab_1}{4}+\frac{a_1b}{4}.$$

Donc, si nous connaissions la droite a_1b_1, la bissectrice de l'angle aba_1b_1 serait parallèle à la bissectrice de l'angle aSb.

422. — Or les droites ab, a_1b_1 se coupent en un point ω qui appartient à la polaire P du point S par rapport à la base du cône. De plus, la droite $S\omega$ est conjuguée harmonique de P par rapport à ab, a_1b_1.

Donc finalement a_1b_1 est la quatrième droite d'un faisceau harmonique dont on connaît les trois autres droites P, $S\omega$ et ab.

423. — Soit alors YY_1 (fig. 193) la trace sur le plan de base du plan parallèle au plan sécant mené par le sommet du cône.

On construira d'abord la polaire P de S par rapport à la base, elle coupe YY_1 ou ab en ω. Puis on joint $S\omega$, et l'on construit la quatrième droite du faisceau harmonique P, $S\omega$, YY_1. Soit a_1b_1

cette droite qui a été obtenue en prenant le segment np égal au segment mn sur la corde mn parallèle à P.

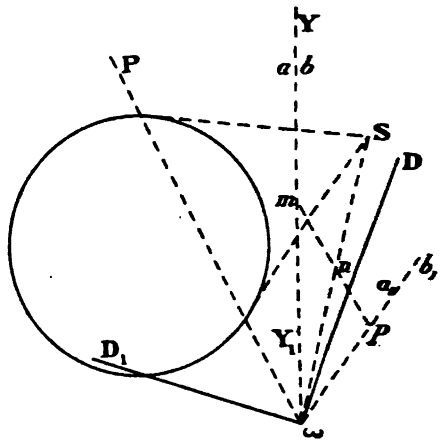


Fig. 193.

En résumé, D, D_1, bissectrices de l'angle aba_1b_1, sont les directions des axes de la section.

424. — Connaissant la direction des axes de la section, on trouvera les sommets eux-mêmes en menant à la section des tangentes parallèles aux directions des axes D, D_1. Les tangentes parallèles à D par exemple seront les droites d'intersection du plan sécant avec les plans tangents au cône parallèles à la droite D.

CHAPITRE V

I. — SECTION PLANE D'UN HYPERBOLOIDE.

425. — Pour trouver un point quelconque d'une section plane d'un hyperboloïde, on peut employer comme plan auxiliaire un plan perpendiculaire à l'axe, ou encore chercher directement l'intersection d'une génératrice quelconque de la surface avec le plan sécant.

Soit par exemple un hyperboloïde de révolution à axe vertical *o* (fig. 194), admettant comme génératrice la droite A et un plan sécant défini par son échelle P.

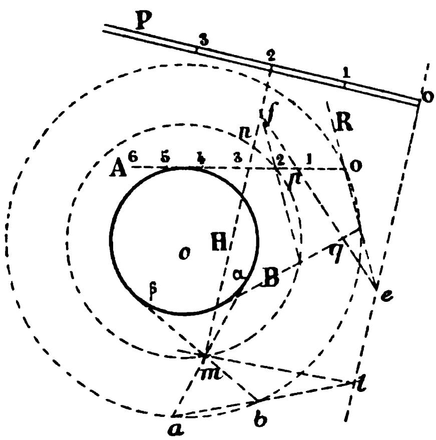


Fig. 194.

Le plan horizontal (2) par exemple coupe le plan sécant suivant l'horizontale H (2) et la surface suivant un parallèle de centre *o* et passant par le point (2) de A. Ces deux lignes se coupent en *m* et *n*, qui sont deux points de la section.

Le second procédé consiste à faire passer par la droite A un plan quelconque, ayant par exemple pour trace horizontale R. Ce plan coupe la surface suivant A et une autre génératrice B. Il coupe ensuite le plan donné suivant *ef* qu'on a obtenu à l'aide des horizontales (0) et (2) du plan sécant et du plan auxiliaire. On obtient ainsi les deux points d'intersection *p* et *q*.

Si, bien entendu, le plan auxiliaire passe constamment par la génératrice A, on retrouvera constamment le point *p* de A, et c'est seulement le point *q* qui décrira la courbe.

426. — Tangente. — La tangente au point *m* par exemple est l'intersection du plan sécant avec le plan tangent en *m*. Ce plan tangent contient les deux génératrices *ma*, *mb* tangentes au cercle de gorge menées par *m*. Leurs traces horizontales sont en *a*, *b* sur la trace horizontale de l'hyperboloïde. Donc *ab* est la trace horizontale du plan tangent; elle rencontre la trace horizontale du plan sécant au point *t*, et par suite *mt* est la tangente cherchée.

427. — Éléments de la courbe. — Soit *o* le cercle de gorge d'un hyperboloïde, D la trace du plan sécant sur le plan du cercle de gorge et *m* un point de la section (fig. 194). La génératrice issue de *m* touche le cercle de gorge au point *a*. Ensuite la ligne de plus grande pente du plan sécant menée par *m* coupe D au point *p*. Enfin, la verticale *m* coupe le plan du cercle de gorge au point μ.

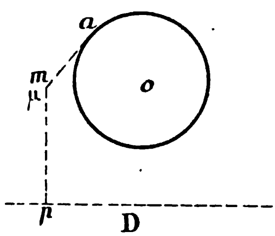


Fig. 195.

Dans le triangle rectangle $m\mu a$, on a :

$$\mu a = m\mu \text{ tang } \theta,$$

en appelant θ l'angle des génératrices de l'hyperboloïde avec l'axe. De même, dans le triangle rectangle $m\mu p$, on a :

$$\mu p = m\mu \text{ tang } \varphi,$$

en appelant φ l'angle du plan sécant avec l'axe.

En divisant ces deux égalités membre à membre, on a :

$$\frac{\mu a}{\mu p} = \frac{\tang \theta}{\tang \varphi},$$

rapport constant.

Donc, en utilisant la remarque faite à propos du théorème de Dandelin, toute section plane d'un hyperboloïde se projette sur le plan du cercle de gorge suivant une conique admettant le cercle de gorge comme cercle focal, et pour directrice correspondante l'intersection du plan sécant et du plan du cercle de gorge.

La méthode des parallèles montre que le plan méridien perpendiculaire au plan sécant est un plan de symétrie. Son intersection avec le plan sécant sera un axe de la section. Les points de rencontre de cet axe avec la section seront deux sommets.

En prenant le milieu, on en déduira le centre, et alors le deuxième axe sera l'horizontale du plan sécant menée par le centre.

428. — Section elliptique. — Soit un hyperboloïde défini par son cercle de gorge o et sa trace horizontale, puis un plan sécant défini également par sa trace sur le plan du cercle de gorge X_1Y_1 et par sa trace horizontale XY (fig. 196).

Le module aa_1 du plan sécant étant plus grand que le module bb_1 de la génératrice, la section, comme nous le reconnaîtrons plus loin, est une ellipse.

Le grand axe est la ligne de plus grande pente aa_1 du plan sécant qui rencontre l'axe. Cherchons donc les points de rencontre de cette droite avec la surface.

Employons comme surface auxiliaire le cône de révolution engendré par la droite aSa_1 en tournant autour de la verticale o. Sa base dans le plan horizontal est la circonférence décrite de o comme centre avec oa_1 pour rayon.

Ce cône coupera l'hyperboloïde suivant des parallèles, et pour les déterminer il suffit d'en chercher un point. Nous prendrons par exemple l'intersection de la génératrice bb_1 avec ce cône.

Menons donc par le sommet S et par la droite bb_1 un plan Sbb_1 et cherchons sa trace horizontale.

Un premier point est b_1, trace horizontale de bb_1. Le second point est β, trace horizontale de Sb que l'on a trouvé à l'aide du plan Sba qui admet pour horizontale ab et pour trace horizontale la parallèle $a_1\beta$ à ab menée par a_1.

Donc le plan Sbb_1 a pour trace horizontale $b_1\beta$ qui coupe la base du cône en m_1n_1.

Le cône est alors coupé suivant les génératrices Sm_1, Sn_1 qui rencontrent bb_1 en m et n.

Enfin, les parallèles menées par m et n coupent aa_1 aux sommets cherchés μ, ν. Il faut remarquer que le parallèle m coupe aa_1 en deux points; mais, le point m étant compris entre b et b_1, il

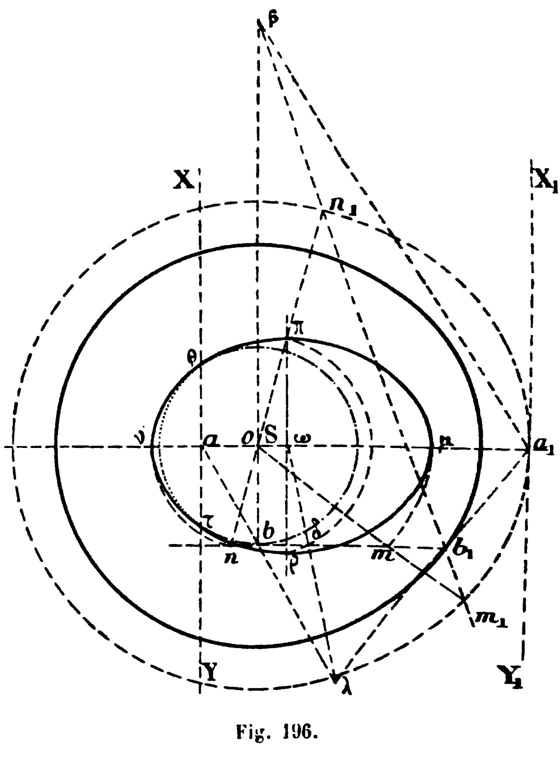


Fig. 196.

faut choisir le point μ entre a et a_1; de même le second parallèle ne donne qu'un seul point ν.

Le centre est au milieu ω de $\mu\nu$. Le plan horizontal mené par ce point coupe le plan sécant suivant l'horizontale ω et l'hyperboloïde suivant une circonférence de centre o et passant par le point δ de bb_1 qui a même cote que le point ω de ab. Pour obtenir ce point δ, on a joint ab, a_1b_1 qui se coupent en λ, puis on joint λ, ω.

En résumé, les quatre sommets sont μ, ν, π, ρ. Enfin les points de contact avec le cercle de gorge sont en $\theta\tau$ sur XY.

On a représenté la partie solide de l'hyperboloïde au-dessous du plan sécant et au-dessus du plan horizontal.

429. — Section hyperbolique. — La section est du genre hyperbole, lorsqu'il existe des génératrices de la surface parallèles au plan sécant. Pour trouver les directions de ces génératrices, nous mènerons par le sommet du cône asymptote un plan parallèle au plan sécant, et nous prendrons l'intersection de ce plan avec le cône asymptote. La section est donc du genre hyperbole lorsque le module du plan sécant est plus petit que celui de la génératrice de la surface. Dans le cas contraire, la section est elliptique, et enfin, lorsqu'il y a égalité, la section est une parabole. Le cône asymptote étant tangent à la surface tout le long d'un parallèle à l'infini, les asymptotes de la section dans l'hyperboloïde seront les mêmes que celles de la section par le même plan dans le cône asymptote.

Ici un seul des axes est réel. Quand on ne connaît pas à l'avance la position de l'axe réel, on commence par chercher les sommets sur l'axe horizontal. Si ces points sont imaginaires, alors on cherche les sommets sur l'axe ligne de plus grande pente.

Pour éviter cette hésitation, pendant que l'on cherche les asymptotes, on mène à la surface des plans tangents parallèles au plan sécant. Si le plan sécant est compris entre les deux plans tangents parallèles, l'axe transverse est horizontal; sinon, il est dirigé suivant la ligne de plus grande pente.

Soit par exemple un hyperboloïde défini par son cercle de gorge et par sa trace horizontale (fig. 197), puis un plan sécant déterminé par sa trace XY sur le plan du cercle de gorge et par sa trace horizontale X_1Y_1.

Construisons d'abord la base du cône asymptote dans le plan horizontal, pour cela figurons deux génératrices parallèles bb_1, cc_1; la base du cône asymptote est dans le plan horizontal une circonférence de centre o et tangente au point β à b_1c_1.

Menons ensuite par le centre o un plan parallèle au plan sécant, sa trace horizontale X'Y' est parallèle à XY, à une distance $o\alpha$ égale au module aa_1 du plan. Cette droite X'Y' coupe la base du cône asymptote aux points μ, ν, donc $o\mu$, $o\nu$ sont les génératrices du cône asymptote parallèles au plan sécant.

Les plans tangents au cône asymptote suivant $o\mu$, $o\nu$ coupent le plan sécant suivant ωm, ωn parallèles à $o\mu$, $o\nu$ et l'on a ainsi les asymptotes de la section.

Les traces horizontales des plans tangents parallèles au plan sécant seraient $\mu_1\nu_1$, $\mu_2\nu_2$. Donc le plan sécant XYX_1Y_1 est compris entre les deux plans tangents. L'axe transverse est par suite

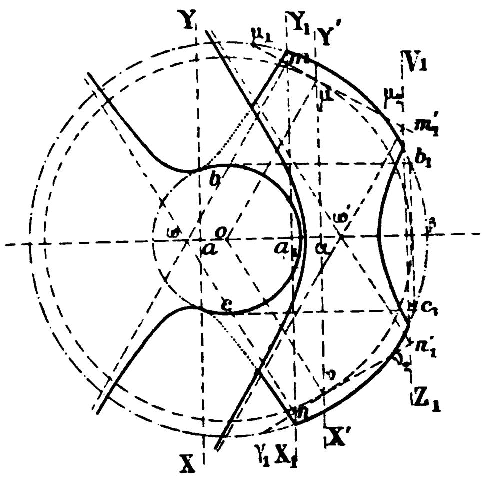


Fig. 198.

horizontal; on obtiendra donc les sommets à l'aide du plan horizontal ω.

Dans la même épure, on a figuré la section par le plan parallèle au précédent ayant pour trace horizontale Z_1V_1. Les asymptotes sont $\omega'm'_1$, $\omega'n'_1$, et, comme le plan sécant est en dehors des deux plans tangents parallèles, l'axe transverse est dirigé suivant la ligne de plus grande pente. On appliquera donc dans ce cas la construction qui a été donnée pour trouver les sommets de la section elliptique.

On a représenté dans l'épure la surface de l'hyperboloïde comprise entre les deux plants sécants et placée au-dessus du plan horizontal.

430. — Section parabolique. — Les données étant les mêmes que précédemment, sauf que le module aa_1 du plan est égal à celui d'une génératrice bb_1, alors la section est une parabole (fig. 198).

L'axe est toujours la ligne de plus grande pente. Pour trouver le sommet, nous remarquerons qu'il existe sur la surface une génératrice bb_1 parallèle à aa_1. Le plan passant par ces deux droites a pour trace sur le plan du cercle de gorge ab. Il coupe l'hyperboloïde suivant une deuxième génératrice tangente en c au cercle de

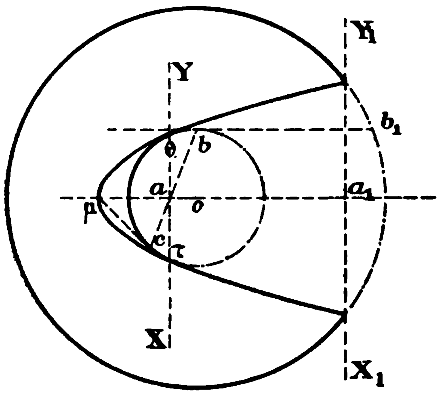


Fig. 198.

gorge, et dont le point de rencontre μ avec aa_1 est le sommet demandé.

Les points θ, τ où XY coupe le cercle de gorge sont les points de contact de la courbe avec le contour apparent. Enfin la courbe passe aussi par les points de rencontre de X_1Y_1 avec la trace horizontale de l'hyperboloïde. On a représenté la surface de l'hyperboloïde au-dessous du plan sécant et au-dessus du plan horizontal.

CHAPITRE VI

I. — INTERSECTION D'UNE SURFACE ET D'UN POLYÈDRE

431. — On peut naturellement, pour résoudre cette question, chercher séparément les intersections de la surface avec toutes les faces du polyèdre et prendre ensuite les parties utiles de ces différentes courbes.

Pour procéder plus rapidement, on peut aussi suivre la marche que nous allons indiquer.

On commence avant tout par déterminer les points de rencontre de la surface avec toutes les arêtes du polyèdre, ainsi que les deux tangentes en chacun de ces points. On a ainsi les extrémités des parties utiles des différentes courbes. On détermine ensuite les points sur les contours apparents de la surface. Ces quelques points suffisent dans bien des circonstances pour définir très exactement les parties utiles des courbes, ou au moins ils en donnent une première approximation. C'est seulement maintenant que l'on cherche des points courants, en faisant son possible pour en déterminer seulement dans les régions mal définies des courbes en question. Si de plus l'arc à tracer est un peu trop grand, on détermine en outre quelques tangentes intermédiaires, et c'est enfin dans le cas où la courbe est presque complète, comme une moitié d'ellipse, par exemple, que l'on détermine les éléments de la courbe.

432. — **Exemple** (Saint-Cyr, 1896). — *Une sphère est tangente au plan horizontal au point* o, *elle passe par le point* a *qui a pour cote* (72 *millimètres*), *la longueur* oa *en projection horizontale vaut* (96 *millimètres*). *On considère le plan* P *mené par le point* o *du plan horizontal, perpendiculairement au rayon de la sphère* oao'a', *et le triangle équilatéral* bcdb'c'd' *inscrit dans la section de la sphère par le plan* P, *en plaçant horizon-*

talement** le côté* cd, *de manière que sa cote soit **inférieure** à **celle** de* b. *Sur la perpendiculaire en* bb′ *au plan* P, *prendre un **point ss′ *de cote* (240 *millimètres*).

Représenter** le solide commun à la sphère et au trièdre **illimité sbcd (fig. 199).

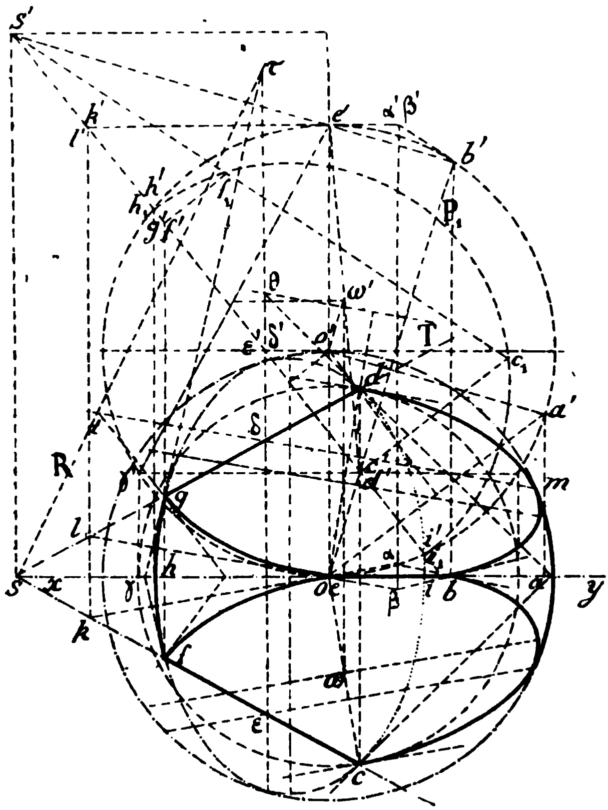


Fig. 199.

Nous commençons, pour construire les données, par prendre comme ligne de terre *oa*. Le centre de la sphère *oo′* est alors à l'intersection de la verticale *o* avec le plan perpendiculaire au milieu de la ligne de front *oao′a′*.

On remarquera que, d'après la disposition des données :

$$oa' = \sqrt{\overline{oa}^2 + \overline{aa'}^2} = \sqrt{\overline{96}^2 + \overline{72}^2} = 120.$$

Le triangle oaa' étant semblable au triangle formé par oo', oa et la perpendiculaire abaissée de o sur oa', on en déduit :

$$\frac{oo'}{120} = \frac{60}{72} \quad \text{ou} \quad oo' = 100.$$

Le centre oo' étant connu, on a figuré les deux contours apparents de la sphère, ce sont les circonférences ayant pour centres o et o' et pour rayon 100.

Le plan perpendiculaire à $oao'a'$ mené par le point o du plan horizontal est ici un plan de bout, défini par sa trace verticale P_1, perpendiculaire sur $o'a'$ menée par o.

Le triangle équilatéral inscrit a pour premier sommet bb' sur le contour apparent vertical de la sphère. Les deux autres sommets cc', dd' se projettent verticalement à une distance de o qui est le quart de ob'.

Pour trouver leurs projections horizontales, on a coupé la sphère par le plan horizontal $c'\gamma'$, ce qui donne en projection horizontale la circonférence décrite de o comme centre avec $o\gamma$ pour rayon.

La perpendiculaire au plan P menée par bb' est une ligne de front passant par le point le plus haut de la sphère ee' ; elle est coupée par le plan horizontal de cote (240) au point ss'.

Maintenant que les données sont établies, déterminons les points de rencontre des arêtes du trièdre avec la sphère.

L'arête $sbs'b'$, qui est dans le plan vertical, coupe la sphère aux deux points ee', bb'. Les tangentes en ee' sont les intersections des faces sbd, sbc avec le plan tangent en ee' à la sphère. Ce dernier plan est horizontal, il rencontre $scs'c'$, $sdsd'$ en kk', ll', et par suite ek, el sont les tangentes en e.

De même, le plan tangent à la sphère en bb' est de bout ; il coupe les horizontales ek, el des deux faces sbc, sbd en $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ et, par suite, $b\alpha$, $b\beta$ sont les deux tangentes en b.

Pour trouver ensuite les points sur l'arête $scs'c'$, nous avons fait un changement de plan horizontal, en prenant comme ligne de terre $s'c'$ et en comptant les éloignements à partir du plan de front o.

La section dans la sphère par le plan de bout $s'c'$ a pour projection horizontale, dans le nouveau système, la circonférence décrite sur h_1i_1 comme diamètre ; d'ailleurs, la nouvelle projection

horizontale de l'arête $scs'c'$ est $s'c_1$, qui donne le point déjà connu $c'c_1$ et le nouveau point f_1f', qui se projette horizontalement en f sur sc.

Si l'on remarque que le plan de front so est un plan de symétrie, la construction précédente nous permet de trouver en même temps les points gg', dd' sur l'arête $sds'd'$.

Le plan tangent en g à la sphère a pour trace, sur le plan de l'équateur, la polaire R du point g par rapport au contour apparent horizontal. Le plan scd a aussi pour trace sur le plan horizontal o' la ligne de bout δ'; quant au plan sbd, il est coupé par le plan horizontal o' suivant une horizontale parallèle à $lo\beta$ menée par δ.

Ces trois droites se rencontrent en τ et t, d'où l'on déduit suivant $g\tau$ et gt les deux tangentes en g.

Les tangentes en f coupent les précédentes sur l'axe de symétrie xy.

Le plan tangent à la sphère au point d a pour trace, sur le plan horizontal o', la polaire T du point d par rapport à l'équateur; elle coupe $\delta\tau$ au point θ, donc θd est la tangente en d à l'intersection de la sphère par le plan scd. La symétrique de θd par rapport à xy donnera la tangente en c.

Enfin, la tangente en d à la section par le plan sbd est horizontale, comme nous le montrerons plus loin.

Les points sur le contour apparent horizontal de la sphère s'obtiennent en coupant la sphère et le trièdre par le plan horizontal o'. Les horizontales $\delta\varepsilon$, δt ont déjà été considérées; elles donnent un seul point utile m pour la face sbd, et l'on en déduit un point symétrique également utile pour la face sbc.

Le plan de bout $s'c'd'$ coupe le contour apparent vertical de la sphère en hh', ii', qui sont les sommets utiles du petit axe de la projection horizontale. Les deux autres sommets sont sur la perpendiculaire au milieu de hi, et à des distances de part et d'autre de hi égales à la moitié de $h'i'$. Ces points étant en dehors de la face scd ne serviront pas pour la partie utile de l'intersection.

Déterminons enfin les éléments de la section par le plan sbc. Le centre $\omega\omega'$ est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan sécant. Or, en joignant le point cc' au point le plus bas de la sphère, la droite ainsi obtenue est aussi perpendiculaire sur le plan sbc, elle est donc parallèle à $o\omega o'\omega'$, et, comme le point oo' est le milieu du diamètre vertical de la

sphère, il en résulte que $\omega\omega'$ est aussi le milieu de *ece'c'*. Ce raisonnement nous montre que *e* et *c* sont les deux sommets du petit axe de la projection horizontale et nous prouvons ainsi, comme nous l'avions dit précédemment, que la tangente en *c* ou *d* est horizontale. Le grand axe est l'horizontale menée par ω, sa

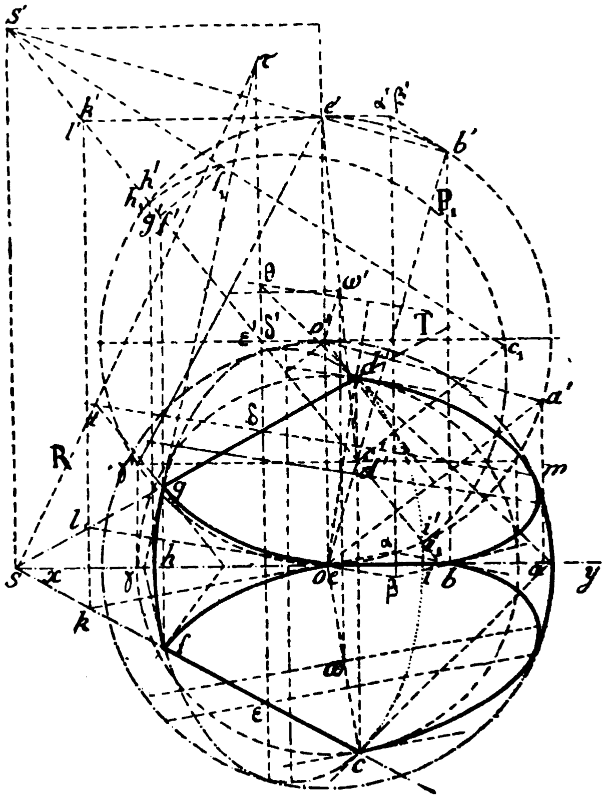


Fig. 199.

longueur étant mesurée par $e'\gamma'$, qu'on a obtenue en rendant *ece'c'* de front.

En résumé, les parties utiles des trois sections sont *ghf*, *dic* pour la face *scd* ; *ge* et *dmb* pour la face *sbd* ; et enfin les portions symétriques *fe*, *bc* des précédentes pour la face *sbc*.

Pour représenter le solide commun, on établit d'abord la ponctuation des intersections sur l'un des corps supposé solide,

seul et conservé tout entier. Par exemple, sur la sphère, tous les arcs de courbe sont vus, excepté *dm* et son symétrique.

On conserve ensuite, avec sa ponctuation primitive, la surface de chaque corps contenue dans l'autre. Donc, la région du contour apparent de la sphère à droite des deux points de contact est conservée et vue, depuis *m* jusqu'à son symétrique. De même, les arêtes du trièdre sont conservées et vues dans les régions *eb*, *gd*, *fc* à l'intérieur de la sphère. Enfin, la partie *dm* de l'intersection et sa symétrique redeviennent vues comme contours apparents.

II. — TAS DE SABLE.

433. — *Représenter un tas de sable* (fig. 200) *ayant pour face supérieure le rectangle* ABCD (5), *les faces latérales ont pour pente* (2). *Ce tas de sable est formé sur un plan incliné dont l'échelle de pente est* P.

Les deux faces adjacentes ABA_1B_1, BCC_1B_1 étant également inclinées sur le plan horizontal, leur intersection BB_1 est la bissectrice de l'angle des deux horizontales AB et BC. Il en est de même pour les autres arêtes latérales du tas de sable.

Nous n'avons plus qu'à chercher les intersections des faces latérales avec le plan P.

On a d'abord coté les quatre faces latérales en remarquant que leur module est $\frac{1}{2}$, et en partant des horizontales AB (5), BC (5), CD (5), DA (5).

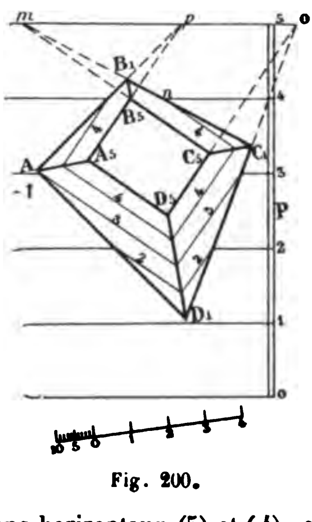


Fig. 200.

Pour trouver, par exemple, l'intersection des deux plans P et BB_1CC_1, on les a coupés par les plans horizontaux (5) et (4), ce qui donne la droite *mn*, dont la partie utile est B_1C_1.

Connaissant les deux sommets B_1, C_1, il suffit de trouver un point de chacune des intersections du plan P avec les faces ABB_1A_1, CDD_1C_1. Soit les deux points *o* et *p* obtenus à l'aide du plan (5).

On a donc joint pB_1 et oC_1, qui donnent comme parties utiles A_1B_1 et C_1D_1. Enfin il reste à joindre A_1 et D_1.

III. — SAILLANT DE FORTIFICATION.

434. — On appelle ainsi un angle de la ligne de défense ayant son sommet vers l'extérieur de l'ouvrage.

Soit ABCD (fig. 201) la crête intérieure ou ligne de feu. L'arête BC est supposée horizontale et a pour cote (10,5), les points

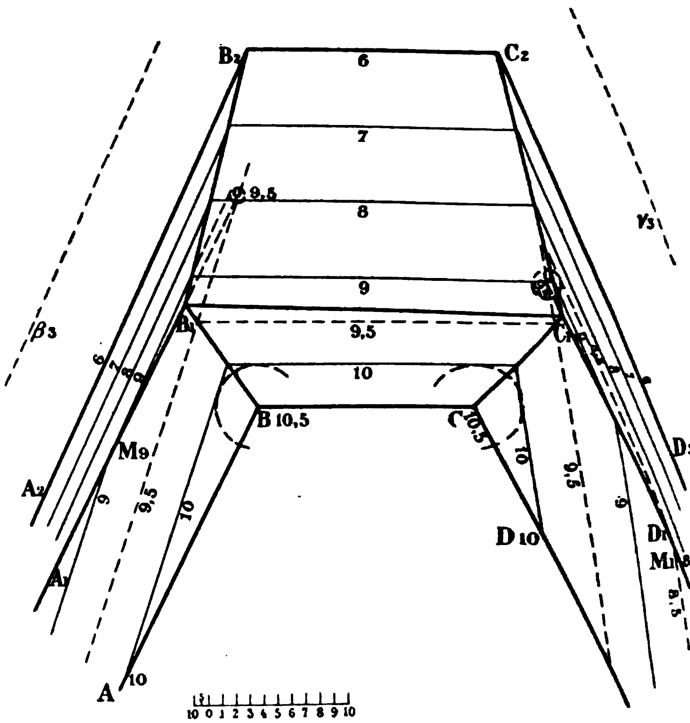


Fig. 201.

A et D ont pour cote (10). (Dans la pratique, les trois droites AB, BC, CD sont dans un même plan, qu'on appelle le plan des crêtes.)

Les plongées s'obtiennent en menant, par les trois lignes de feu, des plans inclinés en dehors et ayant pour pente $\frac{1}{6}$.

L'horizontale du plan ABA_1B_1 menée par A (10) est donc tangente à la circonférence décrite de B (10,5) comme centre, avec un rayon égal à la moitié du module, c'est-à-dire 3.

On a effectué les mêmes opérations pour les deux autres plongées, et l'on en a déduit les intersections BB_1, CC_1 de ces plans deux à deux. Les deux plongées sont alors limitées à deux plans verticaux parallèles aux crêtes et à 8 mètres des crêtes. Nous définissons ainsi les arêtes A_1B_1, C_1D_1 et par suite B_1C_1 qui, on le remarquera, n'est pas horizontale. Le polygone $A_1B_1C_1D_1$ s'appelle la crête extérieure.

On a ensuite soutenu les arêtes A_1B_1, C_1D_1 par des talus à $\frac{1}{1}$. Par exemple, on a l'horizontale (9) du plan $A_1B_1A_2B_2$, en menant par le point M (9) de l'arête A_1B_1 une tangente à la circonférence décrite du point *o* (9,5) comme centre, avec un rayon égal à la moitié du module, soit 0,5.

Connaissant une horizontale de chacun de ces deux plans à $\frac{1}{1}$, on les a cotés et limités au plan horizontal *b*.

Enfin, on a soutenu l'arête B_1C_1 à l'aide d'un plan déterminé par B_1C_1 et le point (3) de l'intersection des deux plans $A_1B_1A_2B_2$, $C_1D_1C_2D_2$.

En appelant *o* ce point qui, d'ailleurs, est donné par l'intersection des deux horizontales β (3), γ (3), on a joint oB_1, oC_1, ce qui donne les intersections de ce dernier plan avec les deux plans à $\frac{1}{1}$.

IV. — PLATE-FORME AVEC RAMPE.

435. — *La plate-forme est limitée à un rectangle* ABCD, *ayant pour cote* (11) *et pour dimensions* 10 *mètres de long sur* 7 *de large* (fig. 202). *L'axe de la rampe aboutit au milieu du petit côté* CD *et il est perpendiculaire sur* CD.

La largeur de la rampe est de 3 *mètres, sa pente de* $\frac{1}{5}$.

Le tout est établi sur un plan incliné dont l'échelle de pente est P.

Tous les talus de déblai et de remblai sont à $\frac{1}{1}$.

Le sommet A étant au-dessous du plan incliné, les talus aboutissant aux trois arêtes AB et AD seront en déblai.

Le talus ABA_1B_1, par exemple, doit avoir pour pente $\frac{1}{1}$; nous pouvons donc le coter en partant de l'horizontale AB (11), l'intervalle étant égal à 1.

L'intersection du plan ABA_1B_1 avec le plan incliné a été obtenue en coupant ces deux plans successivement par les deux plans (12) et (15), ce qui donne les deux points *m* et *n*.

On a, de même, construit l'intersection du talus ADA_1D_1 avec le plan incliné, et l'on a trouvé A_1D_1. Comme vérification, AA_1, intersection des deux talus, est la bissectrice de l'angle BAD.

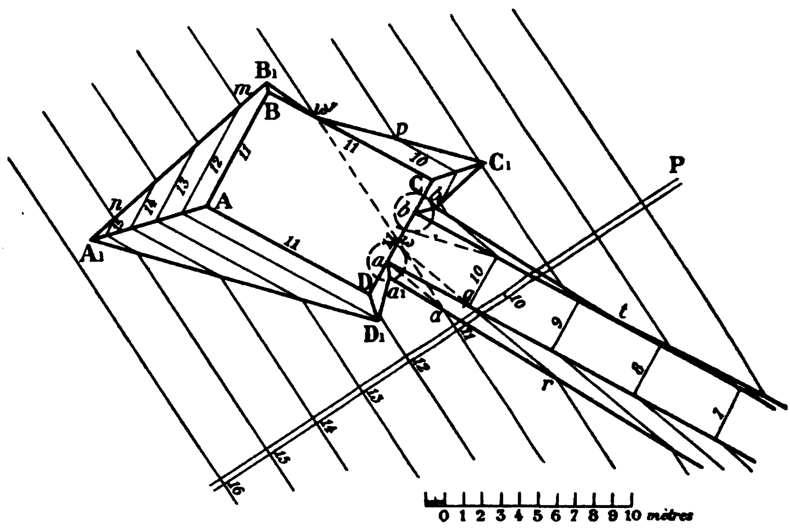


Fig. 202.

La région $B\omega'$ de BC étant au-dessous du plan incliné, le talus correspondant sera encore en déblai. On s'est servi de la bissectrice BB_1 pour trouver la trace de ce plan $BB_1\omega'$ sur le plan incliné.

Le talus qui soutient $C\omega'$ est maintenant en remblai, son horizontale (10) rencontre l'horizontale (10) du plan incliné au point *p* que l'on a joint au point ω', de manière à former le plan $C\omega'C_1$.

Enfin, les talus aboutissant à CD sont moitié en déblai, moitié

en remblai, et leurs traces sur le plan incliné s'obtiennent en joignant $D_1\omega$, $C_1\omega$.

Passons maintenant à la construction de la rampe; sa pente étant $\frac{1}{5}$, son module est égal à 5, ce qui permet de la coter à partir de l'horizontale CD (11).

Les points *a* et *q* sont au-dessous du plan incliné, donc le talus correspondant est en déblai; on en a trouvé une horizontale, en menant par le point *q* (10) une tangente à la circonférence décrite de *a* comme centre avec un rayon égal à 1. On a ainsi coté ce talus, dont on a construit l'intersection avec le sol, soit αr. La partie utile est limitée à gauche en a_1 sur $D_1\omega$, ce qui donne l'arête aa_1.

La même opération a été faite de l'autre côté de la rampe; seulement de *b* en *t*, le talus est en remblai, et à partir de *t* il est en déblai.

V. — TÉTRAÈDRE RÉGULIER.

436. — *Construire un tétraèdre régulier, reposant par une face sur un plan dont l'échelle de pente est* P. *On a en* a *et* b *les projections de deux sommets de la base* (fig. 203).

On commence par rabattre le plan P sur le plan horizontal.

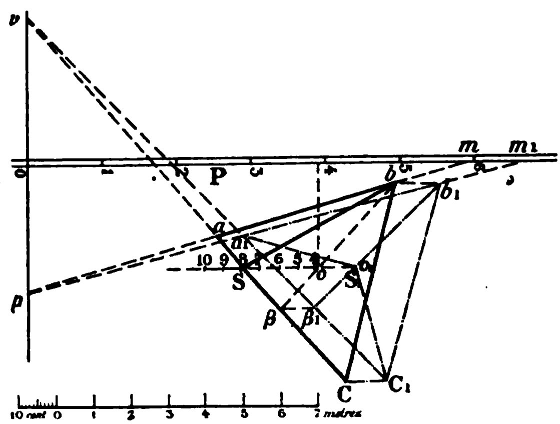


Fig. 203.

En particulier, le point *m* (6) de l'arête *ab* se rabat sur une perpendiculaire à l'horizontale (0) et à une distance

$$\delta = \sqrt{6^2 + 12^2} = 13,4.$$

Soit μm_1 le rabattement de l'arête, on en déduit en $a_1 b_1$ les rabattements des deux sommets a et b.

Actuellement, la base du tétraèdre est, dans le plan horizontal, un triangle équilatéral $a_1 b_1 c_1$ construit sur $a_1 b_1$ comme côté.

Le quatrième sommet est rabattu en S_1, et sa cote

$$H = a_1 b_1 \sqrt{\frac{2}{3}} = 5,5 \sqrt{\frac{2}{3}} = 4,47.$$

Il reste à relever le tétraèdre. On a d'abord relevé le sommet c_1 en c sur $a\gamma$, et le centre de la base o_1 en o sur la médiane $b\beta$. Le centre de la base a pour cote (3,9); d'ailleurs la hauteur du tétraèdre étant perpendiculaire sur le plan de base, elle a un module inverse de celui du plan, ce qui permet de la coter.

Enfin, il reste à porter sur cette droite une longueur égale à la hauteur du tétraèdre (4,47); δ étant la différence de cotes entre les deux points S et o, on doit avoir :

$$H = 4,47 = d\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2},$$

d'où l'on tire :

$$d = 3,98.$$

La cote du point S est donc $3,9 + 3,98 = (7,88)$.

CHAPITRE VII

HÉLICE.

437. — Soit un cylindre de révolution à axe vertical (fig. 204). Développons ce cylindre sur le plan vertical, la base étant développée, par exemple, sur la ligne de terre.

En prenant la longueur A_1A_2 égale à la circonférence de base, la surface comprise entre les deux verticales A_1, A_2 représente un premier développement de la surface latérale du cylindre.

De A_2 à A_3, nous avons un deuxième développement de la même surface, etc.

On sait que l'hélice se développe suivant une ligne droite. Soit donc a_1a_2 cette droite, A_2a_2 étant la hauteur du pas.

Proposons-nous de trouver un point quelconque de l'hélice, m_1 étant la position correspondante de ce point dans le développement.

Nous traçons la génératrice m_1M_1 dans le développement et, en portant l'arc AM égal à A_1M_1, nous aurons suivant la verticale M la génératrice correspondante sur la surface du cylindre.

L'angle AoM est d'ailleurs donné par la relation :

$$(\text{angle } AoM)^\circ = A_1M_1 \times \frac{360^\circ}{2\pi \times oA}.$$

Il ne reste plus qu'à porter sur la génératrice M la longueur $M'm'$ égale à M_1m_1, et l'on aura en mm' un point quelconque de l'hélice.

438. — Tangente. — Les angles des tangentes avec les génératrices étant conservés dans le développement, on aura la tangente en mm' à l'hélice, en menant par ce point dans le plan

tangent suivant $MmM'm'$ une droite $mtm't'$ faisant avec $MmM'm'$ l'angle $a_1m_1M_1$.

En appelant tt' la trace horizontale de la tangente inconnue,

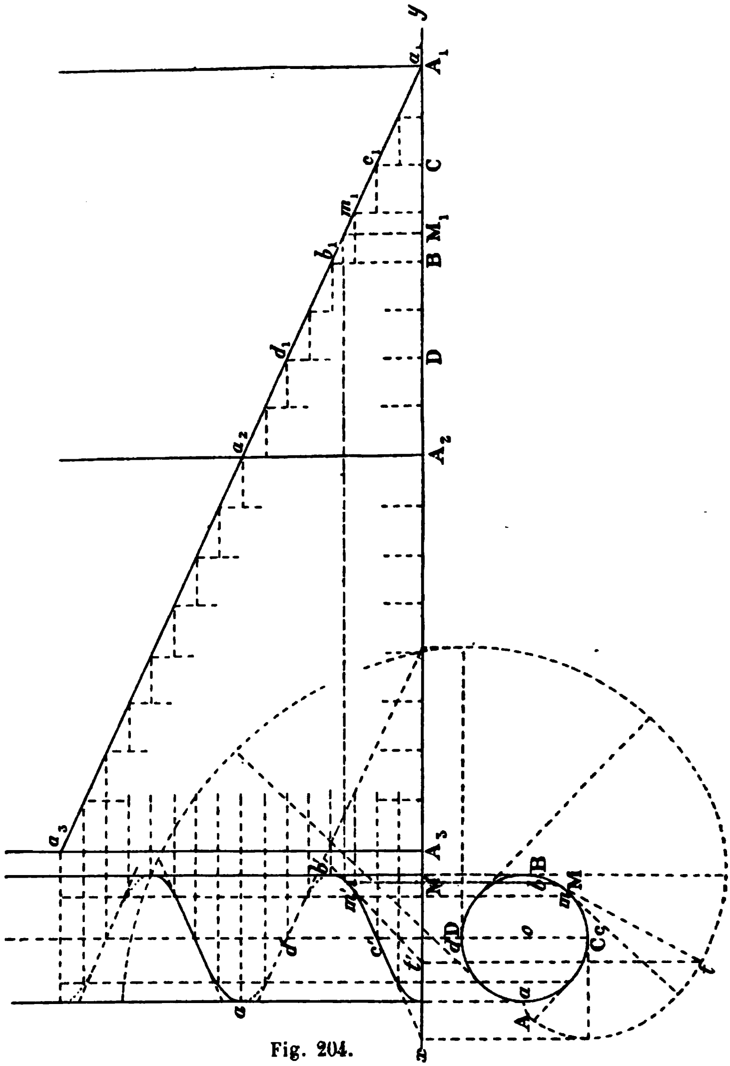


Fig. 204.

les deux triangles rectangles $tMmt'M'm'$ et $a_1M_1m_1$ seront égaux et, par suite, la trace t s'obtiendra en portant sur la tangente à la base la longueur Mt égale à M_1A_1 ou à l'arc MA.

Finalement, *mtm't'* est la tangente cherchée.

Le lieu du point *t* est la développante de la base du cylindre.

439. — Points remarquables. — Comme points remarquables de la projection verticale de l'hélice, nous avons d'abord les points sur le contour apparent vertical du cylindre. Sur la génératrice A, ces points sont à des hauteurs au-dessus du plan horizontal égales à 0, une fois, deux fois, etc., la hauteur du pas.

Sur la verticale B, les points de contact sont à des cotes égales à la hauteur du pas, multipliée successivement par :

$$\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{2},\ \text{etc.}$$

En ces deux groupes de points, la projection de l'hélice est tangente au contour apparent vertical du cylindre.

Ensuite, sur les génératrices C et D, nous avons des points dont les cotes sont égales à la hauteur du pas, multipliée successivement par :

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}+\frac{2}{2},\ \frac{1}{4}+\frac{3}{2},\ \text{etc.}$$

En ces points, la tangente étant parallèle au plan vertical, sa projection verticale fait avec la génératrice l'angle maximum $a_1a_2A_2$. Il en résulte que ces points particuliers sont des points d'inflexion de la projection verticale de la courbe.

CHAPITRE VIII

I. — SURFACES TOPOGRAPHIQUES.

440. — *On appelle surface topographique toute surface telle que celle d'un terrain, c'est-à-dire toute surface n'ayant pas de définition géométrique.*

441. — Lignes de niveau. — Pour déterminer une surface topographique, on en cherche les *lignes de niveau*, c'est-à-dire les *sections par des plans horizontaux équidistants*, et l'on arrive à ce résultat sur le terrain à l'aide de l'opération du *nivellement.*

La surface sera d'autant mieux déterminée que les plans horizontaux contenant les lignes de niveau seront plus rapprochés. Comme nous l'avons déjà dit, on suppose ces plans équidistants les uns des autres, et la différence de cotes entre deux plans consécutifs s'appelle l'équidistance. Afin de pouvoir opérer sur les surfaces topographiques comme sur les surfaces géométriques, on convient de remplacer chaque zone comprise entre deux lignes de niveau successives par une surface engendrée par une droite rencontrant constamment les deux courbes et restant constamment normale à l'une d'elles.

Cette substitution est admissible lorsque les lignes de niveau sont très rapprochées; mais, dans le cas contraire; il est nécessaire d'intercaler des lignes de niveau entre les lignes considérées.

442. — Ligne de plus grande pente. — On appelle ainsi toute ligne tracée sur la surface et rencontrant normalement les lignes de niveau. On utilise quelquefois les lignes de plus grande pente, pour mieux représenter la surface; seulement on les dessine par fragments compris entre les lignes de niveau successives. Ces lignes de plus grande pente forment alors des

hachures que l'on fait d'autant plus grosses et plus rapprochées les unes des autres que la pente est plus rapide.

443. — Sommet. — *On appelle sommet le point le plus élevé d'une région de surface topographique.* Les lignes de plus grande pente des régions voisines aboutissent à ce sommet en montant. Ainsi A, B, C (fig. 205) sont des sommets.

444. — Plateau. — *C'est une partie élevée d'un terrain dont tous les points ont la même cote.*

445. — Fond. — *Un fond est le point le plus bas d'une région de surface topographique.* Les lignes de plus grande pente des régions voisines aboutissent à ce fond, mais, en descendant ainsi, D (fig. 205) est un fond.

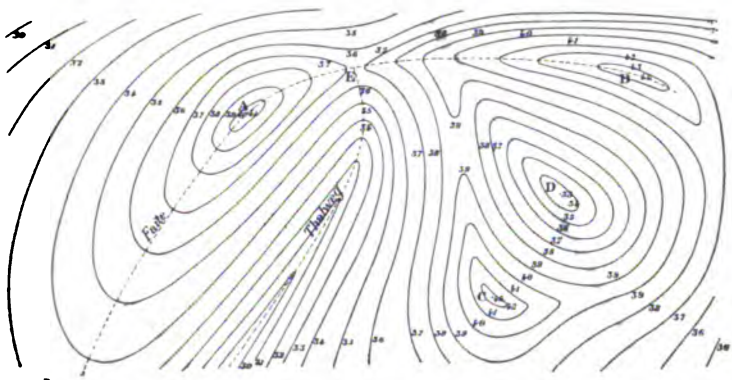


Fig. 205.

446. — Col. — *En un tel point, le plan tangent à la surface est aussi horizontal comme pour un sommet ou bien un fond, seulement ce plan tangent coupe la surface.* Il existe alors deux lignes de niveau passant par un col.

Au-dessus du col, les lignes de niveau sont dans les angles opposés par le sommet formés par les deux lignes de niveau du col.

Au-dessous du col, les lignes de niveau sont encore dans deux angles opposés par le sommet, mais adjacents aux précédents.

Ainsi (fig. 205) E est un col.

447. — **Ligne de faîte.** — *C'est la ligne de plus grande pente qui réunit deux sommets* A, B, *en passant par un col.*

448. — **Ligne de thalweg.** — *C'est la ligne de plus grande pente partant d'un col pour aller vers un fond.*

En montant sur une ligne de faîte, les lignes de niveau que l'on rencontre présentent leur convexité à l'observateur. Au contraire, en montant sur une ligne de thalweg, les lignes de niveau que l'on rencontre tournent leur concavité vers l'observateur.

449. — Les régions du terrain dans le voisinage d'une ligne de faîte forment une croupe; au contraire, celles qui sont voisines d'un thalweg appartiennent à un bassin.

II. — SECTION PLANE D'UNE SURFACE TOPOGRAPHIQUE.

450. — Soit P l'échelle de pente du plan sécant (fig. 206); on marquera les points de rencontre des lignes de niveau de la surface avec les horizontales de même cote du plan sécant, et l'on aura successivement en *a*, *b*, *c*, etc., des points de la section. Puis on joindra tous ces points par un trait continu.

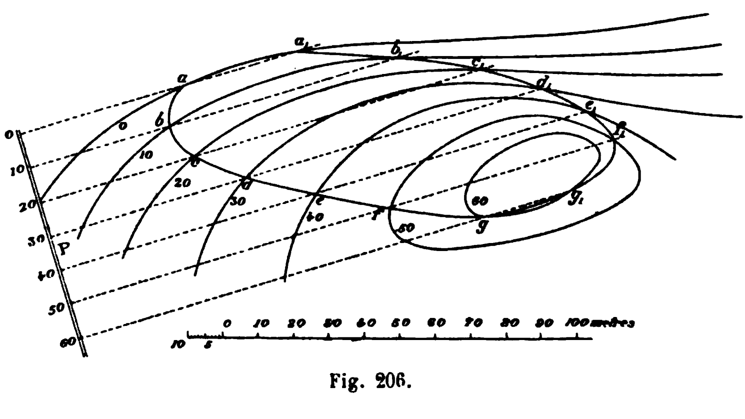


Fig. 206.

Comme cas particulier, proposons-nous de trouver la coupe d'un terrain suivant XY (fig. 207), c'est-à-dire la section de la surface par le plan vertical XY. Cette intersection se projette horizontalement suivant $fedcbaa_1b_1c_1d_1$, etc. On a projeté ensuite

tous ces points verticalement dans le système xy, à des distances au-dessus de la ligne de terre égales aux cotes des lignes de niveau correspondantes.

Pour avoir une idée plus nette de la forme de la courbe ainsi obtenue, $f'e'd'c'b'a'a'_1b'_1c'_1d'_1$, etc., on change quelquefois l'échelle des cotes.

Ainsi, en multipliant toutes les cotes par 5, on trouve le

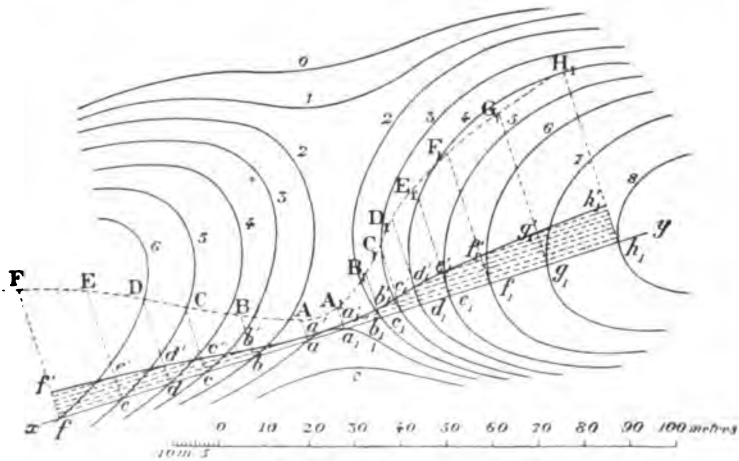


Fig. 207.

nouveau profil $FEDCBAA_1B_1C_1D_1$, etc. De cette manière, les accidents du terrain sont plus accentués.

On peut utiliser la construction précédente pour déterminer l'intersection d'une droite et d'une surface topographique en employant comme plan auxiliaire un plan quelconque passant par la droite.

Si l'on voulait de la même façon trouver l'intersection de deux surfaces topographiques, il suffirait de marquer les points de rencontre des lignes de niveau de même cote, et de joindre tous les points ainsi obtenus par une même courbe.

III. — LIGNE DE PENTE CONSTANTE.

451. — Proposons-nous de tracer sur une surface topographique une ligne de pente constante.

Soit A (fig. 208) le point de départ de la ligne que nous voulons tracer sur la surface, la pente étant $\frac{1}{4}$.

Du point A (4) avec un rayon égal à l'inverse de la pente, nous

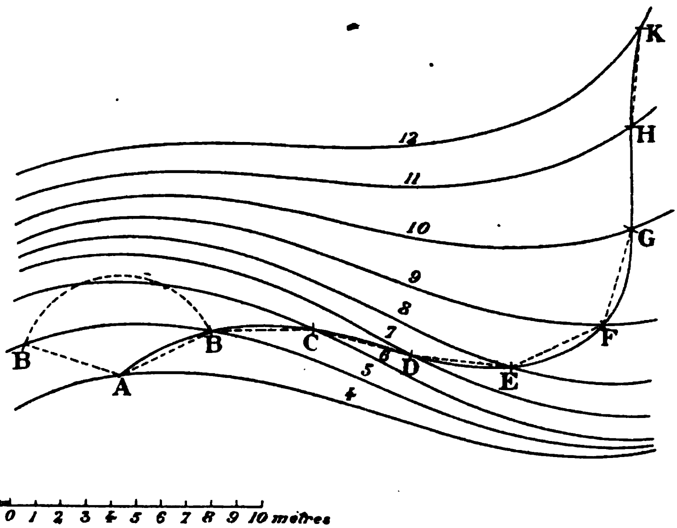


Fig. 208.

décrivons un arc de cercle qui rencontre la ligne de niveau (5) aux points B, B_1. La droite AB a la pente demandée $\frac{1}{4}$.

Opérons sur le point B comme nous l'avons fait sur A, et parmi les différentes solutions du problème, nous aurons successivement les éléments rectilignes AB, BC, CD, DE, etc., du chemin cherché.

Enfin, en joignant tous les points ainsi obtenus par un trait continu, en supposant les lignes de niveau suffisamment rapprochées, on aura suivant ABCD, etc., la ligne demandée.

EXERCICES

THÉORIQUES ET NUMÉRIQUES

1. — Construire une horizontale de grandeur donnée s'appuyant sur deux droites quelconques.

2. — Trouver la plus petite horizontale s'appuyant sur deux droites.

3. — Par une droite mener un plan dont les distances à deux points soient entre elles comme *m* et *n*.

4. — Par un point *o* mener un plan dont les distances à trois points soient entre elles comme *m*, *n*, *p*.

5. — Trouver un plan dont les distances à quatre points soient entre elles comme *m*, *n*, *p*, *q*.

6. — Mener par un point une droite s'appuyant sur deux droites données.

7. — Mener une parallèle à une droite donnée et s'appuyant sur deux droites données.

8. — Construire l'une des parallèles à un plan s'appuyant sur deux droites données.

9. — Construire l'une des droites s'appuyant sur trois droites données.

10. — Construire un tétraèdre dont les arêtes passent respectivement par six points donnés. Nombre des solutions.

11. — Mener par quatre points respectivement quatre plans parallèles entre eux et équidistants, ou dont les distances soient entre elles dans des rapports donnés.

12. — Abaisser d'un point une perpendiculaire sur un plan parallèle à la ligne de terre, sans changement de plan ni rotation.

(On se servira de ce que cette droite est contenue dans tous les plans perpendiculaires aux différentes droites du plan donné et menées par le point.)

13. — Mener par un point un plan perpendiculaire sur une droite de profil, sans changement de plan ni rotation. (On remarquera que ce plan contient toutes les perpendiculaires menées par le point au plan passant par la droite donnée.)

14. — Construire un trièdre trirectangle, connaissant les projections horizontales des trois arêtes et la cote du sommet. Condition de possibilité.

15. — Étant donné un prisme droit à base rectangle par sa projection horizontale et la cote de l'un de ses sommets, trouver les cotes des autres sommets.

16. — Perpendiculaire commune à une horizontale et à une droite quelconque.

17. — Mener par un point une droite faisant avec le plan horizontal un angle connu, connaissant d'ailleurs la projection horizontale de la droite.

18. — Trouver les plans bissecteurs d'un angle.

19. — Angle d'une droite quelconque et d'une horizontale.

20. — Angle de deux droites ayant leurs projections horizontales confondues.

21. — Plans bissecteurs d'un dièdre.

22. — Mener par un point dans un plan n rayons faisant entre eux des angles égaux à $\frac{2\pi}{n}$.

23. — Angle d'un plan quelconque et d'un plan vertical.

24. — Construire un prisme régulier ou une pyramide régulière, connaissant l'axe et une arête.

25. — Section droite d'un prisme oblique, grandeur de la section.

26. — Développer sur un plan la surface latérale d'un prisme ou d'une pyramide.

27. — Plus court chemin d'un point à un autre sur la surface d'un polyèdre, en passant sur des arêtes déterminées à l'avance. Autrement dit, forme d'un fil tendu entre deux points sur la surface d'un polyèdre.

28. — Même problème dans le cas d'un prisme ou d'une pyramide, le fil pouvant faire plusieurs fois le tour du solide.

29. — Construire un cube, connaissant la longueur de l'arête et trois points par lesquels passent trois arêtes issues du même sommet.

30. — Mener par un point de l'espace une droite ou un plan faisant des angles connus avec deux plans donnés ou avec deux droites données.

31. — Rotation d'une figure donnée autour d'un axe quelconque.

32. — Faire tourner un tétraèdre pesant autour de l'une de ses arêtes de façon à l'amener dans une position d'équilibre stable. Même question pour un prisme.

33. — Mener par un point *m* une droite B faisant avec A un angle donné et tel que la plus courte distance entre A et B soit de grandeur connue.

34. — Construire une droite s'appuyant sur deux droites données et faisant avec chacune d'elles un angle connu.

35. — Trouver la grandeur de la projection d'un angle, connaissant cet angle et les distances zénithales de chacun de ses côtés. (Réduction de l'angle à l'horizon.)

36. — Étant donnés deux surfaces S, S_1 éclairées par une même source lumineuse, *c* l'ombre propre de S_1 I l'intersection de S et S_1, *m* le point de rencontre de *c* et de I, montrer que l'ombre portée par S sur S_1 part de *m* tangentiellement à la courbe I.

37. — Étant donnés deux surfaces S, S_1, éclairées par une même source lumineuse, c_1 l'ombre propre de S_1, *d* l'ombre portée par S sur S_1, *m* le point de rencontre, montrer que la tangente au point de perte *m* à l'ombre portée *d* est le rayon lumineux passant par ce point.

38. — Construire une sphère à des distances données de quatre points donnés. (Nombre des solutions.)

39. — Plan tangent à une sphère faisant avec deux plans ou avec deux droites des angles connus.

40. — Sphère de rayon connu tangente à trois sphères données (pile de boulets triangulaire).

41. — Lieu du second point de rencontre d'un cône de révolution avec les normales à ce cône aux différents points d'une section plane.

42. — On donne dans le plan horizontal deux droites qui se coupent. Par chacune de ces droites on mène un plan. Trouver le lieu de l'intersection de ces deux plans, en les supposant rectangulaires.

43. — Étant donné un triangle par ses trois sommets cotés, trouver le centre de gravité de ce triangle, le centre du cercle inscrit, du cercle circonscrit, le point de rencontre des trois hauteurs, le point d'où l'on voit les trois côtés sous des angles égaux.

44. — Étant donné un tétraèdre par ses quatre sommets cotés, construire un point intérieur tel que les quatre tétraèdres ayant pour sommet ce point et pour bases les quatre faces du tétraèdre soient équivalents.

45. — Trouver la plus courte distance des deux projections d'une droite.

46. — Construire un tétraèdre régulier, connaissant le centre et une arête.

47. — Construire un cube connaissant le centre et une arête.

48. — Construire un octaèdre régulier, connaissant le centre et une arête.

49. — On donne un plan défini par un point F et une droite D. Trouver l'intersection de la parabole ayant pour foyer F et pour directrice D avec une droite du plan définie par sa projection horizontale A.

50. — Construire un tétraèdre régulier, connaissant deux sommets A, B, sachant que le centre ou un troisième sommet se trouve dans un plan P.

51. — Construire un cube, connaissant deux sommets A, B, sachant que le centre ou un nouveau sommet se trouve dans un plan P.

52. — Construire un octaèdre régulier, connaissant deux sommets A, B, sachant que le centre ou un nouveau sommet se trouve dans un plan P.

53. — Mener par un point parallèlement à un plan une droite dont la longueur comprise entre le point primitif et un plan donné soit connue.

54. — On donne un cylindre de révolution par trois points de sa section droite; mener à ce cylindre un plan tangent parallèle à une droite donnée horizontale.

55. — Mener par un point un plan coupant un cône de révolution suivant une conique de grandeur connue.

56. — Mener par trois points une sphère tangente au plan horizontal.

57. — Mener par trois points une sphère tangente à une horizontale.

58. — Construire une sphère tangente à deux droites, les points de contact étant connus.

59. — Trouver sur une droite les points d'où l'on voit un segment de droite sous un angle droit.

60. — Mener par une droite un plan coupant un cône de révolution suivant une parabole.

61. — Mener par une droite un plan coupant un cône à base circulaire suivant une hyperbole équilatère en projection.

62. — Mener par une droite un plan coupant un cône à base circulaire suivant une hyperbole équilatère dans l'espace.

63. — Construire une normale à un cône ou à un cylindre coupant une droite donnée sous un angle connu.

64. — Mener par une droite un plan coupant une surface gauche de révolution suivant une parabole.

65. — Mener par une droite un plan coupant une surface gauche de révolution suivant une hyperbole équilatère dans l'espace.

66. — Trouver les cotes des points d'une verticale d'où l'on voit un segment de droite horizontale sous un angle connu.

67. — On donne un tétraèdre régulier S*abc* reposant par la face *abc* sur le plan horizontal $ab = 20$ centimètres. On fait tourner le sommet S autour de *ab* de 5 degrés, puis autour de *bc* de 10 degrés, enfin autour de *ca* de 15 degrés.

Représenter le système formé par le tétraèdre supposé solide et par les trois triangles opaques S_1ab, S_2bc, S_3ca.

Figurer ensuite sur le tétraèdre son intersection avec le plan des trois points S_1, S_2, S_3.

68. — On donne un point *o* projeté au centre de la feuille et ayant pour cote 15 centimètres. Mener par ce point une droite A de pente $\frac{1}{2}$.

La droite A est l'axe d'un prisme hexagonal régulier dont la section droite a 4 centimètres de côté. Deux faces *a*, *d* du prisme font avec le plan horizontal un angle de 45 degrés.

Ce prisme est limité à deux plans perpendiculaires à l'axe à 2 centimètres de part et d'autre du point *o*, de telle sorte que les faces *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* latérales du prisme ainsi limité sont des carrés.

Sur les trois faces *a*, *c*, *e* on construit des cubes.

Représenter le système formé par le prisme et les trois cubes supposés solides et de même substance. Lignes de niveau.

69. — En prenant comme origine le centre de la feuille, pour axe des x le petit axe de la feuille et pour axe des y le grand axe, on donne les points :

a	$x = 0$	$y = 12$	$z = 0$
b	$x = -6$	$y = 0$	$z = 10$
c	$x = 10$	$y = 6$	$z = 0$
d	$x = 10$	$y = 0$	$z = 10$
e	$x = 6$	$y = -6$	$z = 0$
f	$x = 0$	$y = -6$	$z = 0$
o	$x = 0$	$y = 0$	$z = 20$

z étant la cote des différents points.

Construire : 1° le triangle équilatéral ayant pour centre *o* et pour arête la droite *ab*;

2° Le carré ayant pour centre *o* et pour arête la droite *cd*;

3° Le pentagone régulier ayant toujours pour centre *o* et pour arête la droite *ef*.

Représenter le système de ces trois polygones supposés opaques. Lignes de niveau.

70. — On donne les points :

a	$x = 4$	$y = 12$	$z = 0$
b	$x = 8$	$y = 2$	$z = 10$
o	$x = 0$	$y = 0$	$z = 20$

Construire un octaèdre régulier ayant pour centre *o* et pour arête *ab*.

Représenter le système des trois carrés diagonaux. Lignes de niveau. Éclairer ce système à l'aide de rayons lumineux horizontaux parallèles à la direction *oa*.

71. — On donne un prisme triangulaire régulier ayant son axe

horizontal $x = 0, z = 6$. Une arête de ce prisme est l'horizontale $x = -4, z = 2$.

On donne ensuite une pyramide ayant pour base dans le plan horizontal un hexagone régulier ayant pour centre $o, x = -2, y = 4$ et pour sommet $x = -10, y = 4$.

Le sommet de la pyramide est le point S, $x = 6, y = 10, z = 20$.

Représenter la partie solide de la pyramide extérieure au prisme.

72. — On donne un tétraèdre régulier ayant pour centre le point o,

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 20$$

et pour arête la droite ab,

a	$x = 4$	$y = 14$	$z = 0$
b	$x = -2$	$y = 6$	$z = 10$

On fait tourner ce tétraèdre autour de l'horizontale $x = 0, z = 20$ d'un angle droit.

Solide commun aux deux tétraèdres. Lignes de niveau.

73. — On donne les trois points :

o	$x = 0$	$z = 0$	$z = 20$
a	$x = -6$	$y = 2$	$z = 0$
b	$x = 2$	$y = 12$	$z = 10$

Construire un cube et un tétraèdre régulier ayant pour centre commun le point o et pour arête commune la droite ab.

Représenter le système des deux corps solides et de même substance. Lignes de niveau.

74. — On donne les points :

a	$x = 0$	$y = 0$	$z = 4$
a_1	$x = 0$	$y = 0$	$z = 5$
S	$x = 6$	$y = 14$	$z = 0$
S_1	$x = -10$	$y = 12$	$z = 0$

Construire : premièrement la pyramide pentagonale régulière ayant pour sommet S, pour axe Sa, et reposant par une face sur le plan horizontal ;

Deuxièmement, la pyramide hexagonale régulière ayant pour sommet S^1, pour axe S_1a_1 et reposant par une face sur le plan horizontal.

Représenter la partie solide de la pyramide hexagonale extérieure à la pyramide pentagonale. Lignes de niveau.

75. — On donne les points :

o	$x = 0$	$y = 0$	$z = 20$
h	$x = 10$	$y = 16$	$z = 0$

Le point o est le centre, et oh est le petit axe d'un rectangle ayant pour hauteur 2 centimètres et pour base 10 centimètres. Ce rectangle tournant autour de son petit axe oh engendre un cylindre. Sur chacune des bases de ce cylindre on élève un cône de révolution ayant 10 centimètres de hauteur.

Représenter le système formé par le cylindre et les deux cônes. Déterminer ensuite les ombres propres de ce système, en supposant les rayons lumineux parallèles à l'horizontale $x = 0$.

76. — On donne une sphère S ayant pour centre $x = 0, y = 0, z = 6$ et pour rayon 6, puis les deux horizontales A, $y = 0, z = 0$, B, $x = 0, z = 12$.

Mener par chacune des deux droites A et B deux plans coupant la sphère suivant des circonférences ayant 4,8 de rayon.

Représenter la partie solide du tétraèdre formé par les quatre plans extérieure à la sphère. Lignes de niveau.

77. — On donne trois sphères reposant sur le plan horizontal ayant pour centres :

a	$x = -2$	$y = 10$	$z = 5$
b	$x = -6$	$y = -8$	$z = 4$
c	$x = 8$	$y = -6$	$z = 3$

On considère le plan tangent commun à ces trois sphères et placé au-dessus de ces trois sphères.

Par les trois points de contact, on fait passer une circonférence qui sert de base à un cylindre de révolution ayant 4 centimètres de hauteur et reposant sur les trois sphères.

Représenter le système du cylindre et des trois sphères. Lignes de niveau.

78. — On donne une sphère tangente au plan horizontal, ayant pour centre le point o, $x = 0, y = 0, z = 8$, et un point $m, x = 4, y = 4$, appartenant à la sphère. (On prendra le point le plus élevé.)

Par le point m on mène une droite A, $x = 4$ tangente à la sphère, c'est une arête d'un prisme pentagonal régulier, dont l'axe parallèle à A, $x = 1$ est contenu dans le plan OA.

Représenter la partie solide de la sphère extérieure au prisme. Lignes de niveau.

79. — On donne un carré ayant pour centre le point o, $x = 0$, $y = 0, z = 10$ et pour sommet le point $a, x = 0, y = 0, z = 0$. Ce carré en tournant autour de la verticale o engendre un double cône de révolution.

Intersection de ce double cône avec un prisme dont la base dans le plan $z = 10$ est un triangle équilatéral ayant pour centre ω, $x = -2, y = -6, z = 10$ et pour sommet $\alpha, x = -4, y = -12, z = 10$.

L'axe de ce prisme passe par le point ω_1, $x = -2, y = 4, z = 18$.

Représenter la partie solide du double cône extérieure au prisme. Lignes de niveau.

80. — On donne les points S, $x = 0, y = 10, z = 0$, a, $x = 0$, $y = -10, z = 0$.

Dans le plan vertical Sa, on construit sur Sa un triangle équilatéral que l'on fait tourner autour de la hauteur issue de S de façon à engendrer un cône de révolution limité à son sommet et à sa base.

On considère ensuite un prisme droit à base carrée ayant pour arête dans le plan horizontal la droite $x = 0$ et dont l'axe passe par le centre de la base du cône.

Représenter la partie solide du cône limité extérieure au prisme. Lignes de niveau.

81. — Un tronc de cône de révolution repose par sa grande base sur le plan horizontal.

Cette base a pour centre $a, x = 0, y = -6$ et pour rayon 10 centimètres.

Le centre b de la base supérieure se projette horizontalement en a, cette base a pour rayon 6 centimètres.

On creuse dans ce tronc de cône un hémisphère ayant pour centre b et pour rayon 5.

On considère ensuite un rectangle opaque ayant pour côtés 4 centimètres et 16 centimètres; deux sommets inférieurs sont sur l'hémisphère en $x = -3, y = -4, x = -3, y = -8$.

Les deux grands côtés reposant sur l'ouverture de l'hémisphère à droite. Déterminer toutes les ombres produites par ce système, en supposant que l'ombre du point b se trouve en $\beta, x = 0, y = 12, z = 0$.

82. — Un cube a pour centre le point $x = 0, y = 0, z = 12$, une diagonale est verticale, le sommet inférieur étant dans le plan horizontal.

Les arêtes de ce cube tournant autour de la diagonale verticale engendrent un solide composé d'un hyperboloïde et de deux cônes de révolution.

Représenter la partie de ce solide au-dessus d'un plan mené par le centre du cube et de pente $\frac{1}{1}$.

83. — Un tétraèdre régulier SABC repose par la face ABC sur le plan horizontal. Le sommet S a pour coordonnées $x = 0, y = 0$ et le sommet A, $x = 0, y = 12$.

Représenter la partie solide de ce tétraèdre extérieure à la sphère qui a pour centre le milieu de BC et pour rayon la plus courte distance entre les deux arêtes opposées SA, BC.

84. — Un hyperboloïde de révolution a pour centre le point $x = 0, y = 0, z = 10$ centimètres, son axe est vertical, le rayon du cercle de gorge est de 4 centimètres.

Cet hyperboloïde est limité au plan $z = 0$ et au plan $z = 18$ centimètres.

On considère deux génératrices parallèles entre elles et à la direction $x = 0$, ce sont deux arêtes opposées d'un prisme hexagonal régulier.

Représenter la partie solide de l'hyperboloïde extérieure au prisme.

85. — On donne deux sphères ayant pour centre commun $o, x = 0, y = 0, z = 8$, et pour rayons respectivement 6 centimètres, 8 centimètres.

On donne ensuite dans le plan horizontal le point $h, x = 0, y = 12$. La droite oh est l'axe d'un prisme triangulaire régulier dont une arête placée dans le plan vertical oh au-dessus de oh est tangente à la petite sphère.

Représenter le solide compris entre les deux sphères et à l'intérieur du prisme.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE IV. — DROITES ET PLANS RECTANGULAIRES

LIVRE V. — MÉTHODES

LIVRE VI. — POLYÈDRES RÉGULIERS CONVEXES

LIVRE VII. — COURBES

LIVRE VIII. — SURFACES

LIVRE IX. — PLANS TANGENTS AUX CONES ET AUX CYLINDRES

LIVRE X. — SURFACES DE RÉVOLUTION

LIVRE XI. — DE LA SPHÈRE

LIVRE XII. — RÉSOLUTION DES TRIÈDRES

LIVRE XIII. — SURFACE GAUCHE DE RÉVOLUTION

LIVRE XIV

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES

1917

6624. — L.-Imprimeries réunies, rue Mignon, 2, Paris.